Exercice 1

1. $M^T N = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + c\gamma & a\beta + c\delta \\ b\alpha + d\gamma & b\beta + d\delta \end{pmatrix}$

donc $\boxed{\langle M, N\rangle = a\alpha + c\gamma + b\beta + d\delta}$

$\boxed{\|M\| = \sqrt{\langle M, M\rangle} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$

2. $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M_1, M_2, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^3$.

On note $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\langle \lambda M_1 + M_2, N\rangle &= (\lambda a_1 + a_2)\alpha + (\lambda b_1 + b_2)\beta + (\lambda c_1 + c_2)\gamma + (\lambda d_1 + d_2)\delta \\
&= \lambda(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta) + a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + d_2\delta \\
&= \lambda\langle M_1, N\rangle + \langle M_2, N\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle N, M_1\rangle &= \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 + \delta d_1 = a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta \\
&= \langle M_1, N\rangle
\end{aligned}$$

donc $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique.

$\langle N,N\rangle = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} \geqslant 0$

et $\langle N,N\rangle = 0 \iff a^2+b^2+c^2+d^2 = 0$

$\iff a^2=b^2=c^2=d^2=0$

$\iff a=b=c=d=0$

$\iff N = O_2$

car une somme de termes $\geqslant 0$ est nulle ssi tous les termes sont nuls

Donc $\langle .,. \rangle$ est une forme définie positive.

Ainsi $\boxed{\langle .,. \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

3. $F = \left\{ a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}$

donc $F = \mathrm{Vect}(E_1, E_2)$

où $E_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

F est engendré par (E_1, E_2)

Comme E_1 et E_2 sont non colinéaires, la famille (E_1, E_2) est libre.

$\boxed{\text{Donc } F \text{ est un sev de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ dont une base est } (E_1, E_2).}$

4. Donc $\dim(F) = 2$.

Or sait que $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$.

Donc $\dim(F^{\perp}) = 4 - 2 = 2$.

$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in F^{\perp}$ car $\langle E_1, E_3 \rangle = \langle E_2, E_3 \rangle = 0$

de même $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in F^{\perp}$.

E_3 et E_4 sont non colinéaires donc la famille (E_3, E_4) est libre. Elle est de bon cardinal car $\dim(F^{\perp}) = 2$.

Donc $\boxed{(E_3, E_4) \text{ est une base de } F^{\perp}.}$

$\|E_3\| = \sqrt{2} = \|E_4\|$

$\langle E_3, E_4 \rangle = 0$

Donc $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}E_3, \frac{1}{\sqrt{2}}E_4\right)$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Donc :

$$p_{F^{\perp}}(J) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}E_3, J \right\rangle . \frac{1}{\sqrt{2}}E_3 + \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}E_4, J \right\rangle . \frac{1}{\sqrt{2}}E_4$$

$$= \frac{1}{2} \times 0 . E_3 + \frac{1}{2} \times 2 . E_4 = \boxed{E_4}$$

On aurait aussi pu remarquer que :

$$J = \underbrace{E_1}_{\in F} + \underbrace{E_4}_{\in F^\perp}$$

d'où $p_{F^\perp}(J) = E_4$

Exercice 2

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -3x-y+z \\ x-z \end{pmatrix}$$

Donc : $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff \begin{cases} 2x+y = 0 \\ -3x-y+z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} y = -2z \\ y = -2z \\ x = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \\ z \text{ qcq} \end{cases}$$

donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\vec{V_1})$ où $\vec{V_1} = (1, -2, 1)$

Comme $\vec{V_1} \neq \vec{0}$ on a que $\boxed{(\vec{V_1}) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f)}$

Si on note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A on sait que

$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$.

Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ on sait d'après le th du rang que $\dim(\mathrm{Im}\, A) = 2$.

On remarque que $2C_2 - C_3 = C_1$

Donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_2, C_3)$

Comme C_2 et C_3 sont non colinéaires, la famille (C_2, C_3) est libre. Elle est de bon cardinal. Donc (C_2, C_3) est une base de $\mathrm{Im}(A)$.

Donc $\boxed{(\vec{V_2}, \vec{V_3}) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f)}$

où $\vec{V_2} = (1, -1, 0)$ et $\vec{V_3} = (0, 1, -1)$

2. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 2 - (0 + (-2) + (-4))$$

$$= 8 \neq 0$$

Donc $\boxed{\mathcal{E} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

$A\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{u_1}) = \vec{0}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{u_2}) = \vec{u_1}$

$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{u_3}) = \vec{u_2}$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

3. D'après le cours si $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

alors $\boxed{P \text{ est inversible et } A = PDP^{-1}}$

Exercice 3

1. On pose $n = \deg(P)$.

Comme $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ on a $n \in \mathbb{N}$.

On a $\deg(6P) = \deg P = n$

Si $n = 0$ ou 1 alors $P'' = 0$

donc $P = \frac{1}{6}(X^2 - X)P'' = 0$

Impossible.

Donc $n \geqslant 2$.

Dans ce cas $\deg(P'') = n - 2$

Donc $\deg((X^2 - X)P'') = 2 + (n-2) = n$

On raisonne sur le coefficient dominant.

Si $P = cX^n +$ termes de degré $\leq n-1$ avec $c \neq 0$

alors $(X^2 - X)P'' = cn(n-1)X^n +$ termes de degré $\leq n-1$

Par unicité des coefficients d'un polynôme :

$cn(n-1) = 6c$

Donc $n^2 - n - 6 = 0$

Donc $n = -2$ ou 3 (on calcule Δ...) 9

Donc $n = 3$.

Ainsi $\boxed{\deg(P) = 3}$

2. On a :

$$(X^2 - X)P'' = 6P \iff (X^2 - X)(6aX + 2b) = 6(aX^3 + bX^2 + cX + d)$$

$$\iff 6aX^3 + (2b - 6a)X^2 - 2bX = 6aX^3 + 6bX^2 + 6cX + 6d$$

$$\iff \begin{cases} 6a = 6a \\ 2b - 6a = 6b \\ -2b = 6c \\ 0 = 6d \end{cases}$$

par unicité des coefficients des polynômes

$$\iff \begin{cases} 4b + 6a = 0 \\ 6c + 2b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -\frac{2}{3}b = \frac{2}{9}c \\ b = -\frac{1}{3}c \\ c \text{ qcq} \\ d = 0 \end{cases}$$

Donc $\boxed{P = c\left(\frac{2}{9}X^3 - \frac{1}{3}X^2 + X\right)}$

3. $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid (X^2 - X)P'' = 6P\} = \boxed{\mathrm{Vect}\left(\frac{2}{9}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + X\right)}$

Exercice 4

1. $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ on a :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi $u_n - u_{n-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) + \ln(n-1)$

$$= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

2. donc $u_n - u_{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$

On sait que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Donc par comparaison de séries à termes positifs la série $\boxed{\sum (u_n - u_{n-1}) \text{ converge}}$.

3. D'après le th de dualité suite-séries on peut en déduire que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge}}$.

Exercice 5

1. On a $u_0 = a > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$.

Alors $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} > 0$

Donc par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$

2. $u_{n+1} - u_n = u_n e^{-u_n} - u_n$

$$= \underbrace{u_n}_{>0} \times \underbrace{(e^{-u_n} - 1)}_{<0} < 0$$

car $u_n > 0$

Donc (u_n) est décroissante.

De plus elle est minorée par 0.

Elle est donc $\boxed{\text{convergente}}$ vers $l \geq 0$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

Lorsque $n \to +\infty$: $l = l e^{-l}$

Donc $l = 0$ ou $1 = e^{-l}$.

Donc $\boxed{l = 0}$

3. On a donc $\ln(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$

D'après le th de dualité suite-séries, la série

$$\boxed{\sum \left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\right) \text{ diverge.}}$$

Or $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -u_n$

Donc $\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$

Exercice 6

1. Si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a $0 \leq \sin t \leq 1$

donc $0 \leq (\sin t)^{n+1} \leq (\sin t)^n$

Par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{0 \leq I_{n+1} \leq I_n}$$

2. $I_{n+2} - I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t - 1)(\sin t)^n dt$

$= - \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t)(\sin t)^n dt$

On pose $\begin{cases} u(t) = -\cos t \\ v'(t) = (\cos t)(\sin t)^n \end{cases}$

donc $\begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = \frac{1}{n+1}(\sin t)^{n+1} \end{cases}$

Par IPP :

$$I_{n+2} - I_n = \left[-\frac{1}{n+1} (\cos t)(\sin t)^{n+1} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n+1} \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+2} dt$$

$$I_{n+2} - I_n = 0 - 0 - \frac{1}{n+1} I_{n+2}$$

donc $\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$

3. $s = \frac{\pi}{2} - t$

t	s
0	$\pi/2$
$\pi/2$	0

donc $I_n = \int_{\pi/2}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - s\right)(-ds)$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right)\right)^n ds = \int_0^{\pi/2} \cos^n(s)\, ds$$

$$= \boxed{\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt}$$

Exercice 7

1. On note B_k = "le kième tirage donne une blanche"

$$N_k = \overline{B_k}$$

On a $(X_1 = 0) = N_1$

donc $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$

et $(X_1 = 1) = B_1$ donc $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$

Comme $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$ on a donc $\boxed{X_1 \sim \mathcal{U}(\{0;1\})}$

2. $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

Comme $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$ les évènements $(X_1 = 0)$ et $(X_1 = 1)$ forment un sce. La formule des probabilités totales donne :

$$P(X_2 = 0) = P(X_2 = 0 | X_1 = 0)\, P(X_1 = 0) + P(X_2 = 0 | X_1 = 1)\, P(X_1 = 1)$$

Sachant $X_1 = 0$: le premier tirage a donné une noire donc l'urne contient 2 noires et 1 blanche. La probabilité d'avoir ensuite encore une noire est 2/3. Donc $P(X_2 = 0 | X_1 = 0) = \frac{2}{3}$

Sachant $X_1=1$: on a déjà eu une blanche

donc $X_2=0$ est impossible.

Donc $\mathbb{P}(X_2=0 \mid X_1=1)=0$

Ainsi $\mathbb{P}(X_2=0)=\frac{1}{2}\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times 0=\frac{1}{3}$

De même :

$$\mathbb{P}(X_2=1)=\mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=0)+\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=1)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X_2=2)=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Donc $\boxed{X_2 \sim \mathcal{U}(\{0;1;2\})}$

3. De même $X_3(\Omega)=\{0;1;2;3\}$ et :

$$\mathbb{P}(X_3=0)=\sum_{j=0}^{2}\mathbb{P}(X_2=j)\,\mathbb{P}(X_3=0 \mid X_2=j)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 0=\frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X_3=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times 0=\frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X_3=2)=\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X_3=3)=\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

Donc $\boxed{X_3 \sim \mathcal{U}(\{0,1,2,3\})}$

4. C'est vrai pour $n=1$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ pour lequel $X_n \sim \mathcal{U}([\![0,n]\!])$.

On a $X_{n+1}(\Omega)=[\![0,n+1]\!]$

La formule des probabilités totales donne :

$$\forall k\in[\![0,n+1]\!],\ \mathbb{P}(X_{n+1}=k)=\sum_{j=0}^{n}\underbrace{\mathbb{P}(X_n=j)}_{=\frac{1}{n+1}}\mathbb{P}(X_{n+1}=k|X_n=j)$$

- $\mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=j)=\begin{cases}\frac{n+1}{n+2} & \text{si } j=0\\ 0 & \text{si } j\neq 0\end{cases}$

donc $\mathbb{P}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{n+2}+0+\dots+0$

$$=\frac{1}{n+2}$$

• Si $k \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=k \mid X_n=j) = \begin{cases} \frac{n+2-(k+1)}{n+2} & \text{si } j=k \\ k/(n+2) & \text{si } j=k-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car sachant $X_n=k$: l'urne contient $n+2$ boules dont $k+1$ blanches et sachant $X_n=k-1$: l'urne contient $n+2$ boules dont k blanches

donc
$$\mathbb{P}(X_{n+1}=k) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1-k}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{k}{n+2} + 0 + \dots + 0$$
$$= \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2}$$

Ainsi $X_{n+1} \sim \mathcal{U}([\![0, n+1]\!])$

Par récurrence $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X_n \sim \mathcal{U}([\![0, n]\!])}$