Revisions de mathematiques

Ce devoir est à travailler tout au long de l'été et à rendre le jour de la rentrée.

Il sera noté.

Si vous êtes bloqués sur un exercice vous pouvez m'écrire à l'adresse arnaud.begyn@free.fr

EXERCICE 1.

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^\top N)$ et de la norme euclidienne associée : $\|M\| = \sqrt{\langle M, M\rangle}$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ vérifier que $\langle M, N\rangle = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta$.
Calculer aussi $\|M\|$ en fonction de a, b, c et d.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Vérifier que $\langle \cdot\ , \cdot\ \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et trouver une base (E_1, E_2) de F.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Déterminer une base orthonormée (E_3, E_4) de $F^\perp$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ En déduire la projection orthogonale sur $F^\perp$ de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2.

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ On pose $u_1 = (2, -4, 2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis vérifier que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ est $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Ecrire la formule de changement de base reliant A et D.

EXERCICE 3.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(X^2 - X)P'' = 6P$ et $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Montrer que $\deg(P) = 3$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ On note $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Etablir les relations $\begin{cases} 4b + 6a & = & 0 \\ 6c + 2b & = & 0 \\ 6d = 0 \end{cases}$. En déduire une expression de P seulement en fonction du paramètre c.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Décrire l'ensemble $\left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid (X^2 - X)P'' = 6P \right\}$ à l'aide de la notation Vect().

EXERCICE 4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Rappeler le $DL_2(0)$ de $\ln(1+x)$ puis démontrer que : $u_n - u_{n-1} \underset{n \to +\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\boxed{\textbf{2.}}$ En déduire un équivalent de $u_n - u_{n-1}$. La série $\sum(u_n - u_{n-1})$ est-elle convergente ?

$\boxed{\textbf{3.}}$ Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

EXERCICE 5.

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 = a > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Montrer que, pour tout entier n, $u_n > 0$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Démontrer que la série $\sum \Big(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\Big)$ diverge et en déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

EXERCICE 6.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \, \mathrm{d}t$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ En intégrant par parties démontrer que $I_{n+2} - I_n = -\frac{1}{n+1} I_n$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ En posant $s = \frac{\pi}{2} - t$ démontrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)^n \, \mathrm{d}t$.

EXERCICE 7.

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire.
On y effectue des tirages successifs et, à chaque pas du tirage :
• on replace dans l'urne la boule tirée
• on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur.
On désigne par X_n le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Démontrer que $X_1 \sim \mathcal{U}\big(\{0,1\}\big)$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Donner $X_2(\Omega)$. Quelle formule du cours permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 1) \quad ?$$

Sans calcul (c'est-à-dire en utilisant la description de l'expérience dans l'énoncé) justifier que $\mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 0) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 1) = 0$ puis en déduire que $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{3}$.
Adapter le calcul pour obtenir $\mathbb{P}(X_2 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_2 = 2)$ puis conclure que $X_2 \sim \mathcal{U}\big(\{0,1,2\}\big)$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ En raisonnant de même avec X_2 et X_3 démontrer que $X_3 \sim \mathcal{U}\big(\{0,1,2,3\}\big)$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $X_n \sim \mathcal{U}\big([\![0,n]\!]\big)$.