

## Exemple d'intégrale fonction de ses bornes

$$\text{On pose } g(x) = \int_{1/\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t} dt$$

1.  $\mathcal{D}_g$   $g$  définie sur  $]0, +\infty[$

Si  $x \in ]0, +\infty[$  alors  $[\frac{1}{\sqrt{x}}, \sqrt{x}] \subseteq ]0, +\infty[$ .

or la fonction  $t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  donc

sur  $[\frac{1}{\sqrt{x}}, \sqrt{x}]$  et donc l'intégrale définissant  $g(x)$

existe.

Donc  $g$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .

Rem On n'a pas demandé de montrer que  $g$  est définie exactement sur  $]0, +\infty[$  mais seulement que  $]0, +\infty[ \subseteq \mathcal{D}_g$ , c'est-à-dire que  $g(x)$  existe au moins pour  $x > 0$ .

2.  $\mathcal{D}_g$   $g \in C^1$  sur  $]0, +\infty[$

$$\text{On pose } F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

↪ on choisit un point de l'intervalle sur lequel  $t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est continue (ici  $]0, +\infty[$ )

Comme  $t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est continue sur  $]0, +\infty[$   
 la fonction  $F$  est de classe  $C^1$  sur ce même intervalle (ceci  
 d'après le th fondamental de l'analyse).

On remarque que :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad g(x) &= \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t} dt + \int_{1/\sqrt{x}}^1 \frac{e^t}{t} dt \\ &= \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t} dt - \int_1^{1/\sqrt{x}} \frac{e^t}{t} dt \\ &= F(\sqrt{x}) - F(1/\sqrt{x}) \end{aligned}$$

La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  à valeurs dans  
 $]0, +\infty[$  et  $F$  est  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  donc par composition  
 $x \mapsto F(\sqrt{x})$  est  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

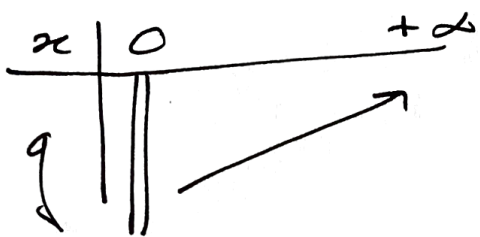
De même  $x \mapsto F(1/\sqrt{x})$  est  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

Par somme  $g$  est  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

### 3. Calcul de $g'(x)$ et variations de $g$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall x > 0, \quad g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot F'(\sqrt{x}) - \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^{3/2}} F'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x^{3/2}} \cdot \sqrt{x} \cdot e^{1/\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Donc  $\forall x > 0$ ,  $q'(x) = \frac{1}{2x} (e^{\sqrt{x}} + e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}) > 0$



4. Limite en  $+\infty$

On suppose  $x \geq 1$ . Alors  $\sqrt{x} \geq 1 \geq \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ .

Pour tout  $t \in \left[ \frac{1}{\sqrt{x}}, \sqrt{x} \right]$ :  $t > 0$  donc  $e^t \geq 1$   
 donc  $\frac{e^t}{t} \geq \frac{1}{t}$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t} dt \geq \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} \frac{dt}{t} = \left[ \ln t \right]_{t=\frac{1}{\sqrt{x}}}^{t=\sqrt{x}} = \ln(\sqrt{x}) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln x - \left(-\frac{1}{2}\right) \ln x$$

$$= \ln x$$

donc  $\forall x \geq 1$ ,  $q(x) \geq \ln x$ .

Comme  $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  le théorème de minoration [Th 24 chap 9]

on a  $\boxed{q(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty}$