dem th 17 On suppose que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant 0$.

et on pose $\forall n \geqslant n_0,\ S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$

1. On a $\forall n \geqslant n_0,\ S_{n+1} - S_n = \sum_{k=n_0}^{n+1} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0$

donc la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ est croissante.

2. On a :

la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge $\overset{\text{def}}{\iff}$ la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ converge

$\iff$ la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ est majorée

th de la limite monotone

Soit $M$ un majorant de la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$

Si on pose $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$ alors :

$\forall n \geqslant n_0,\ S_n \leq S \leq M$ d'après le théorème de la limite monotone.

Donc $\forall n \geqslant n_0,\ \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq M$

3. Si $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ est non majorée alors elle diverge vers $+\infty$ d'après le th de la limite monotone

Donc la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ diverge.

<u>dem th 18</u> On suppose que $\forall n \geqslant n_0, \; 0 \leqslant u_n \leq v_n$

et que la série $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ converge.

On pose $\forall n \geqslant n_0, \quad S_n \overset{def}{=} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$

$$T_n \overset{def}{=} \sum_{k=n_0}^{n} v_k$$

D'après le th 17 la suite $(T_n)_{n \geqslant n_0}$ est majorée. Soit M un de ses majorants :

$$\forall n \geqslant n_0, \; T_n \leq M$$

On a $\forall k \geqslant n_0, \; u_k \leqslant v_k$ donc par somme d'inégalités :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} v_k \quad \text{ie } S_n \leqslant T_n$$

Par transitivité : $\forall n \geqslant n_0, \quad S_n \leq M$

Donc la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ est majorée.

D'après le th 17, la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge.

Exemple 1 On a vu que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge vers 1. On a $\forall n \geq 2$, $n^2 \geq n^2 - n = n(n-1) > 0$

donc $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$

Par comparaison de séries à termes positifs : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ⚠ mais on ne sait pas vers quoi !

Contre-exemple 1 : si $\forall n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ diverge on ne peut rien dire sur la série $\sum u_n$.

Par ex : $\forall n \geq 2$, $n - 1 \geq 1$ donc $n(n-1) \geq n$

donc $0 \leq \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n}$

mais la série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

<u>dem cor 19</u> On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n > 0$ apcr

On a aussi $v_n > 0$ apcr.

Donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > 0$ et $v_n > 0$

De plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donne $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N', \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \varepsilon$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ :

$\exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N', \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \frac{1}{2}$

Alors $\forall n \geq N', -\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} - 1 \leq \frac{1}{2}$

donc $\forall n \geq N', \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$

On pose $n_0 = \max(N, N')$. Alors :

$\forall n \geq n_0, 0 \leq \frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

On a $\forall n \geq n_0, 0 \leq \frac{1}{2} v_n \leq u_n$

Par comparaison par inégalités de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{2} v_n$ converge.

Donc la série $2 \sum \frac{1}{2} v_n = \sum v_n$ converge aussi

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que la série $\sum v_n$ converge.

Alors la série $\frac{3}{2} \cdot \sum v_n = \sum \frac{3}{2} v_n$ converge aussi.

Or $\forall n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n$

Donc par comparaison par inégalités de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

Exemple 2 * On a $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ puisque $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

On a vu que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique)

donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge aussi.

* On a $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ car $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

On a vu que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge aussi (mais on ne sait pas vers quoi).

Exemple 3 * On suppose que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge on sait par comparaison de séries à termes positifs que la série $\sum u_n$ diverge.

* On suppose que $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

On a $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc par définition la série $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$$