ORAL HEC 2015

MATHEMATIQUES

Options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L

Les épreuves orales de mathématiques concernent les candidats admissibles dans les options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L. Elles ont mobilisé 4 à 5 jurys par demi-journée afin de pouvoir interroger l'ensemble des 657 candidats admissibles présents.

1. Procédure d'interrogation

Le mode d'interrogation reste identique à celui des concours précédents : le sujet proposé aux candidats, quelle que soit l'option dont ils sont issus, comprend deux parties:

- un *exercice principal* préparé pendant 30 minutes et portant sur l'une des trois parties suivantes du programme: *algèbre, probabilités et analyse.* De plus, une *question de cours* en rapport avec le thème de l'exercice fait partie de l'exercice principal ;
- un *exercice sans préparation* portant sur une partie différente de celle de l'exercice principal, permettant de tester en temps réel les qualités de réactivité des candidats.

Rappelons que dans tous les cas, chaque candidat est interrogé en probabilités, soit au titre de l'exercice principal (20 à 25 minutes), soit à celui de l'exercice sans préparation (5 à 10 minutes).

2. Commentaires

A l'issue des épreuves orales de mathématiques, on peut tirer un certain nombre d'enseignements.
Tout d'abord, les rapports de jury des concours précédents ainsi que les échanges dans la commission de mathématiques lors de la journée des classes préparatoires, sont manifestement répercutés auprès des admissibles : ainsi, les prestations d'une majorité de candidats sont essentiellement orales et le tableau n'est utilisé que comme support de l'exposé.
La « règle du jeu » est assez bien respectée : les candidats passent les questions non traitées ou inachevées et poursuivent l'exposé.
L'exercice sans préparation posé en fin d'interrogation joue son rôle d'amortisseur ou d'amplificateur de la note de l'exercice principal.

Malgré les mises en garde précisées dans le rapport de l'an passé, le jury continue d'observer chez nombre de candidats un certain formatage et il recommande aux futurs candidats d'éviter de réciter à l'oral des recettes qu'ils ne maîtrisent pas : même si elles peuvent parfois faire illusion dans un problème d'écrit où la part d'initiative personnelle est réduite, ces phrases ou ces formules apprises par cœur et qui tiennent lieu de « prêt-à penser », passent difficilement le filtre de l'épreuve orale.
Un certain nombre de candidats utilisent dans leurs argumentations des concepts qui dépassent le cadre du programme mais sont dans l'incapacité de manipuler des notions

simples. Il serait préférable de connaître les définitions de base plutôt que de tenter d'appliquer des recettes apprises par cœur.
On note aussi de nombreuses erreurs dans des calculs élémentaires (dérivations, primitives de fonctions simples), ou encore des résultats non simplifiés à leur plus simple expression.
Enfin, le concours 2015 inaugurait l'introduction de Scilab en remplacement de Pascal dans les options S et E. A cet égard, les jurys ont constaté qu'un nombre non négligeable de candidats était insuffisamment préparé pour répondre aux questions faisant appel à Scilab :

Aussi, le jury de mathématiques réitère aux futurs candidats les recommandations qu'il avait faites dans les rapports précédents : une très solide assimilation du cours et une préférence pour le raisonnement plutôt que pour la récitation de formules mal comprises.

3. Résultats statistiques

Par option, les notes moyennes obtenues sont les suivantes:

- *option scientifique* (414 candidats): 11,22 (11,35 en 2014)
- *option économique* (203 candidats): 9,11 (10,42 en 2014);
- *option technologique* (23 candidats): 12,09 (10,73 en 2014);
- *option littéraire B/L* (17 candidats): 10,12 (11,06 en 2014).

Option scientifique

Le niveau général est bon, équivalent à celui du concours 2014 ; les notes s'étendent entre 2 et 20 et l'écart-type de 3,72 permet de classer correctement les admissibles.
Il y a quelques candidats excellents dont les exposés s'appuient sur une argumentation pertinente qui leur permet de prouver les résultats attendus. Toutefois, on assiste d'année en année à une diminution du nombre de ces candidats exceptionnels.
Cette année encore, les sujets d'analyse (suites, fonctions réelles, calcul différentiel et intégral) posent d'importants problèmes à une majorité de candidats : les notions les plus élémentaires - étude de fonctions, représentations graphiques, convexité et concavité, théorèmes classiques – ne sont pas du tout maîtrisées.

Option économique

Le décrochage du niveau des candidats de cette option par rapport à ceux de l'option scientifique observé depuis quelques années avait connu un coup d'arrêt lors du concours 2014.
Cette année, le jury a observé beaucoup plus de mauvaises prestations de la part des candidats de l'option économique : aucun candidat n'a obtenu la note de 20, les notes s'étendent entre 1 et 18 et l'écart-type de 3,58 est suffisamment élevé pour classer les candidats de cette option.

Les concepts fondamentaux sont rarement maîtrisés. Le phénomène des recettes apprises par cœur se retrouve plus fréquemment que dans l'option scientifique. Les exposés sont souvent ternes, pauvres et très confus : la notion de « preuve » fait souvent défaut (on invoque une définition de l'exercice ou « le cours »).

L'écart entre les moyennes des options scientifique et économique qui était de moins d'un point en 2014 est en 2015, de plus de deux points. En comparant les résultats finals des concours 2014 et 2015 pour les options S et E, on constate *ex post* que l'oral 2015 a joué très significativement son rôle de « second filtre » et permis une réduction des écarts observés après les épreuves écrites en rééquilibrant le nombre de candidats admis dans ces deux options.

Option technologique

Malgré un écart-type de 3,92, certes élevé, mais en recul par rapport à 2014 où il était de 4,53, le niveau des candidats (23 admissibles présents) reste assez contrasté avec une moyenne de 12,09, supérieure à celle du concours 2014. Globalement, les notes s'étalent entre 4 et 18.

Option littéraire B/L

Sur les 17 candidats admissibles présents, la moyenne est de 10,12, en recul par rapport à celle du concours 2014 et s'accompagne d'un écart-type très élevé de 5,34 reflétant une population de candidats très hétérogène.
Il est fort probable que le choix de l'épreuve à option de l'écrit (sciences sociales ou mathématiques) constitue l'explication majeure de cette faible moyenne globale et de cette forte dispersion des notes.

Les sujets suivants posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L, constituent un premier échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2015 (annales 1).

1. SUJETS DE L'OPTION SCIENTIFIQUE

EXERCICE PRINCIPAL S 106

1. Question de cours : Donner la définition du moment d'ordre k d'une variable aléatoire réelle.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et X une variable aléatoire réelle discrète finie, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ respectivement.

Pour tout réel t, on définit la fonction de moments M de X par $M(t) = E(\mathrm{e}^{tX})$, c'est-à-dire l'espérance de la variable aléatoire e^{tX}.

2.a) Déterminer la fonction de moments d'une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

b) En déduire la fonction de moments d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

3.a) Montrer que M est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives en 0 à l'aide des moments de la variable aléatoire X.

b) Montrer que pour tout réel t, on a $M(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} M^{(k)}(0)$, où $M^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de M.

4. On considère n réels distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

a) Soit A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible.

On utilisera l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui, à tout polynôme Q associe le n-uplet $\big(Q(x_1), Q(x_2), \ldots, Q(x_n)\big)$ pour montrer que la matrice ${}^tA$ est inversible.

b) En déduire que la fonction de moments d'une variable aléatoire discrète finie détermine sa loi.

5. On pose pour tout t réel : $K(t) = \ln\big(M(t)\big)$.

a) Montrer que K est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Que représentent $K'(0)$ et $K''(0)$ pour la variable aléatoire X ?

c) Montrer que les fonctions M et K sont convexes sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 106

1. Soit P un trinôme tel : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) + P'(x) + P''(x) \geqslant 0$.

2. Plus généralement, soit P un polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}$) tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

a) Que peut-on dire de la parité de n ?

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) + P'(x) + P''(x) + \ldots + P^{(n)}(x) \geqslant 0$.

EXERCICE PRINCIPAL S 131

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que $f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}$.

2.a) Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on note Y une variable aléatoire à densité, de densité f.

b) Établir l'existence de l'espérance $E(Y)$ et de la variance $V(Y)$. Les calculer.

3.a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y.

b) Justifier l'existence de la fonction réciproque, notée F_Y^{-1} de la fonction F_Y.

c) Écrire un programme en Scilab permettant de tracer les courbes représentatives de F_Y et de F_Y^{-1} pour x élément de $[-2, 2]$.

d) Donner l'allure des courbes représentatives de F_Y et de F_Y^{-1} dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

4. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $F_Y^{-1}(X)$?

b) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xF_Y(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et vaut $\frac{3}{8}$.

c) Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^1 xF_Y^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$ (on utilisera le changement de variable $u = F_Y^{-1}(x)$ après avoir justifié sa validité).

d) On pose : $Z = X - F_Y^{-1}(X)$. Justifier l'existence de $E(Z^2)$. Calculer $E(Z^2)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 131

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit la matrice $M_x = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de x la matrice M_x est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_x est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Les sujets suivants posés aux candidats des options scientifique et économique, constituent la suite de l'échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2015 (annales 2).

1. SUJETS DE L'OPTION SCIENTIFIQUE

EXERCICE PRINCIPAL S 132

1. Question de cours : Formule du rang pour une application linéaire; application à la caractérisation des isomorphismes.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$ et $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^{n-1})$ sa base canonique.

On considère n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vérifiant $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

2. Montrer que l'application $T : E \to \mathbb{R}^n$, $P \mapsto T(P) = \big(P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n)\big)$ est bijective.

3. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on désigne par L_i le polynôme de E tel que $T(L_i) = e_i$.

a) Préciser pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, la valeur de $L_i(a_j)$.

b) Montrer que $\mathcal{B}' = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de E et que pour tout $P \in E$, on a $P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$.

Dans la suite de l'exercice, on note $A = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

4. Dans cette question uniquement, on supose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

a) Déterminer les polynômes L_1, L_2 et L_3 et expliciter la matrice A.

b) Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.

c) En déduire les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$.

5.a) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

b) Établir la relation : $\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$.

c) Montrer que $\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1$ et que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on a $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0$.

d) Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de A.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 132

On considère une expérience consistant à lancer un dé équilibré n fois de manière consécutive. L'expérience en question est décrite par le programme Scilab ci-dessous pour la valeur $n = 10$ (et répétée ici 1000 fois) :

```
Nexp=1000;
n=10;
u=floor(2*rand(n,Nexp))+1;
test=0;
for k=1:Nexp
    ok=1;
    for i=2:n
     if (u(i-1,k)==1) & (u(i,k)==1) then
        ok=0;
     end
    end
    test=test+ok;
end
Pn=test/Nexp;
disp(Pn)
```

1. Que représente la variable Pn affichée par le programme ?
2. En notant P_n le résultat de l'expérience précédent pour une valeur de n quelconque, montrer que

$$P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}P_{n-2}$$

puis trouver la limite de P_n quand n tend vers l'infini.

EXERCICE PRINCIPAL S 136

1. Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

2.a) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

b) On note $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ le reste de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ et r_n.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{n(n+1)} - 1, \dfrac{1}{n(n+1)} + 1\right]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \frac{1}{k(k+1)}\right)$.

3.a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, quelle est la loi de $X_k - \dfrac{1}{k(k+1)}$? Rappeler son espérance et sa variance.

b) Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4.a) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a :

$$P\left(Y_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}\right) \leqslant P(Y_n \leqslant \varepsilon).$$

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leqslant \varepsilon)$.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \leqslant 1\right)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 136

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $n \geqslant 2$. On considère des endomorphismes f, p et q de E, ainsi que des scalaires distincts λ et μ tels que pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, on a : $f^k = \lambda^k p + \mu^k q$.

1. Montrer que $(f - \lambda \mathrm{id}_E) \circ (f - \mu \mathrm{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. En déduire que l'ensemble des valeurs propres de f est inclus dans $\{\lambda, \mu\}$ et que f est diagonalisable.

EXERCICE PRINCIPAL S 138

1. Question de cours : Formule de Taylor à l'ordre r avec reste intégral pour une fonction de classe C^{r+1}.

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Pour tout réel λ, on note E_λ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(px+q) = \lambda f(x)\,.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = p\,u_n + q$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

b) Soit $f \in E_\lambda$. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n)$ en fonction de λ et de u_0.

3.a) Déterminer E_1.

b) On suppose que $\lambda \neq 1$ et que l'ensemble E_λ n'est pas réduit à la fonction nulle.

Montrer que $|\lambda| < 1$ et préciser alors la valeur de $f(1)$ pour toute fonction $f \in E_\lambda$.

4. Dans cette question, on prend $|\lambda| < 1$ et on suppose l'existence d'une fonction f non constante de E_λ, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On note $f^{(n)}$ la fonction dérivée n-ième de f.

a) Établir l'implication : $f \in E_\lambda \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \in E_{\frac{\lambda}{p^n}}$.

b) En déduire l'existence d'un entier naturel k tel que $f^{(k)}$ soit la fonction nulle.

c) Étudier le cas où $\lambda = 0$.

d) Soit k_0 le plus petit entier tel que $f^{(k_0+1)}$ soit la fonction nulle.

Montrer que $\lambda = p^{k_0}$ et que pour tout $i \in [\![0, k_0[\![$, on a $f^{(i)}(1) = 0$.

e) En déduire l'expression de f. Conclure.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 138

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi exponentielle de paramètre $a > 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la variable aléatoire N_x par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ N_x = \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N}^* / X_k > x\} & \text{si cet ensemble n'est pas vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de N_x et préciser son espérance $E(N_x)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} P\big(N_x > E(N_x)\big)$.

EXERCICE PRINCIPAL S 139

1. Question de cours : Rappeler la formule donnant la densité d'une somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes.

2. Soit a, b et α trois réels strictement positifs vérifiant $0 < \alpha < a^2 \leqslant b^2$.

a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} - 1\right)\left(\frac{b}{\sqrt{\alpha - t}} - 1\right) dt$. Cette intégrale est notée $I_{a,b}(\alpha)$.

b) Calculer $I_{a,b}(\alpha)$ à l'aide du changement de variable $t = \alpha \cos^2 u$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on place deux points M et N tels que leurs abscisses respectives X_M et X_N suivent la loi uniforme sur $]0, a[$ et leurs ordonnées Y_M et Y_N suivent la loi uniforme sur $]0, b[$.
On suppose que les quatre variables aléatoires X_M, X_N, Y_M et Y_N sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et sont indépendantes.
On note D la variable aléatoire égale à la longueur du segment $[M, N]$: $D^2 = (X_N - X_M)^2 + (Y_N - Y_M)^2$.

3.a) Quelle est la loi suivie par $-X_M$?

b) On pose : $Z_a = (X_N - X_M)$ et $Z_b = (Y_N - Y_M)$. Déterminer les lois de probabilité de Z_a et Z_b respectivement.

c) Montrer qu'une densité $f_{Z_a^2}$ de Z_a^2 est donnée par : $f_{Z_a^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}} - 1\right) & \text{si } 0 < x < a^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

4. Soit $\theta < a$. Calculer $P([D \leqslant \theta])$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 139

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0$.

2. Soit Q un polynôme tel que $Q(f) = 0$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que $P(f) = 0$. Montrer que toute racine de Q est valeur propre de f.

EXERCICE PRINCIPAL S 140

1. Question de cours : Définition et propriétés d'un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien.

On considère un espace vectoriel euclidien E non réduit à $\{0_E\}$.

2. Soit h un endomorphisme symétrique de E.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} h$ et $\operatorname{Im} h$ sont supplémentaires orthogonaux.

b) Montrer qu'un projecteur orthogonal de E est symétrique.

3. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Établir l'égalité : $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

4. On considère deux projecteurs orthogonaux p et q de E. On pose : $f = p \circ q$.

a) On pose : $F = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q$ et $G = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux.

b) Montrer que la restriction de f à $\operatorname{Ker} q + (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)$ est identiquement nulle.

c) Montrer que $\operatorname{Im} p$ est stable par f.

d) On note $\overline{f}$ l'endomorphisme de $\operatorname{Im} p$ induit par f. Montrer que $\overline{f}$ est un endomorphisme symétrique de $\operatorname{Im} p$.

5. Déduire de l'étude précédente que f est diagonalisable.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 140

Un signal binaire (de valeur -1 ou 1) doit transiter par n relais au passage desquels il est susceptible de changer de valeur avec une probabilité τ. L'expérience est simulée 1000 fois par le programme Scilab ci-dessous :

```
Nexp=1000;n=100;test=0;proba=0.3;
for i=1:Nexp
ok=0;
p0=-2*floor(2*rand())+1;
p=p0;
for i=1:n
     u=rand()
     if(u<proba)then
       p=-p;
     end
end
if (p==p0) then
  ok=1;
end
test=test+ok;
end
disp(test/Nexp)
```

Préciser le cas choisi et donner la valeur limite que retournera (approximativement) le programme pour n grand.

EXERCICE PRINCIPAL S 143

On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$.

1. Question de cours : Soit f un endomorphisme de E, x un vecteur propre de f associé à la valeur propre θ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réels.

   Exprimer $P(f)(x)$ en fonction de P, θ et x. Montrer que toute valeur propre de f est racine de n'importe quel polynôme annulateur de f.

Dans toute la suite de l'exercice, on note f un endomorphisme de E, on se donne deux réels λ et μ non nuls et distincts ainsi que deux endomorphismes u et v de E non identiquement nuls.

On suppose que $f = \lambda u + \mu v$, $f^2 = f \circ f = \lambda^2 u + \mu^2 v$ et $f^3 = f \circ f \circ f = \lambda^3 u + \mu^3 v$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.

2.a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(0) = 0$, on a : $P(f) = P(\lambda)u + P(\mu)v$.

b) En déduire un polynôme annulateur P_0 de f. Que peut-on dire du spectre de f ?

3.a) Trouver un polynôme $Q_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $u = Q_1(f)$ et un polynôme $Q_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $v = Q_2(f)$.

b) Montrer que $u \circ v = v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que u et v sont des projecteurs de E.
Pour la dernière propriété, on pourra effectuer la division euclidienne de Q_1^2 par P_0.

4. *On admet* que pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E, on a : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

a) Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Im} v) \geqslant \dim E$.

b) En déduire que f est diagonalisable et préciser ses sous-espaces propres.

5.a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $f^k = \lambda^k u + \mu^k v$.

b) Montrer que f est bijective si et seulement si $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0_E\}$.

c) Montrer que f est bijective si et seulement si $u + v = \mathrm{Id}_E$.

d) Montrer que si f est bijective, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a : $f^k = \lambda^k u + \mu^k v$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 143

Dans une classe de 30 élèves, on considère une expérience consistant d'abord à demander à chaque élève sa date d'anniversaire. La suite de l'expérience (simulée 1000 fois sur ordinateur) est décrite par le programme Scilab ci-dessous :

```
Nexp=1000;Neleve=30;test=0;
for n=1:Nexp
anniv=zeros(Neleve,1)
 for i=1:Neleve
  anniv(i)=floor(365*rand())+1;
 end
 anniv=gsort(anniv);ok=0;
 for j=1:Neleve-1
   if anniv(j)==anniv(j+1) then
    ok=1;
   end
 end
 test=test+ok;
end
disp(test/Nexp);
```

gsort = tri par ordre croissant

1. Le code retourne une valeur (à chaque fois différente) autour de 0.71. Que représente cette valeur ?
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité simulée par ce programme.
3. Ecrire un programme Scilab permettant de déterminer le nombre d'élève à partir duquel cette valeur dépasse 0.5.

EXERCICE PRINCIPAL S 142

1. Question de cours : Définition et propriétés de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On considère deux variables aléatoires X et N définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- X admet pour densité la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$;
- $N(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $P(N = -1) = P(N = 1) = \dfrac{1}{2}$;
- Les variables aléatoires X et N sont indépendantes, c'est-à-dire : quels que soient les intervalles I et J de $\mathbb{R}$, $P\big((N \in I) \cap (X \in J)\big) = P(N \in I) \times P(X \in J)$.

On pose : $Y = NX$.

2.a) On note G la fonction de répartition de Y. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x)$.

b) En déduire que Y admet pour densité de probabilité la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda|x|}$.

c) Donner l'allure de la courbe (C) représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

d) Montrer que Y admet des moments de tous ordres. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, calculer l'espérance de Y^r.

3. Dans cette question, on prend $\lambda = \sqrt{2}$.

a) Vérifier que Y est centrée réduite.

b) Soit $\alpha \in]0, 1/2[$. Montrer que la longueur du plus court segment $[a, b]$ tel que $P(Y \in [a, b]) = 1 - \alpha$ est égale à $\sqrt{2}\ln(1/\alpha)$ et est obtenue pour un segment centré en 0 (de la forme $[-c, c]$).

On pourra visualiser le problème à l'aide de la courbe (C).

c) Comparer, lorsque α est proche de 0, la longueur du segment précédent à celle du segment correspondant pour la loi normale centrée réduite.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 142

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension $n \geqslant 1$. On note $A = \{(u, v) \in \big(\mathcal{L}(E)\big)^2 / u \circ v = 0\}$

Déterminer $\sup\limits_{(u,v)\in A} \big(\mathrm{rang}(u) + \mathrm{rang}(v)\big)$.

EXERCICE PRINCIPAL S 147

1. Question de cours : Rappeler la définition d'une application surjective et d'une application injective.

2.a) Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est surjectif (c'est-à-dire que l'application $x \longmapsto P(x)$ est une application surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) si et seulement si le degré du polynôme P est impair.

b) Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est injectif (c'est-à-dire que l'application $x \longmapsto P(x)$ est une application injective sur $\mathbb{R}$) si et seulement si le polynôme P' (dérivée de P) ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$ sans être identiquement nul.

3. Dans cette question, P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que si λ est une racine réelle multiple de P, alors P est annulateur de la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

b) Soit $Q = X^2 + aX + b$ un polynôme unitaire de degré 2, à coefficients réels et de discriminant strictement négatif.

Montrer que si Q est un diviseur de P, il existe deux matrices distinctes de $\text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ qui annulent le polynôme P.

c) Montrer que l'application $M \longmapsto P(M)$ n'est pas injective sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Dans cette question, soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que l'application $x \longmapsto P(x)$ soit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si M est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice $P(M)$ est diagonalisable et possède le même nombre de valeurs propres que M.

b) Montrer que l'application $M \longmapsto P(M)$ est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 147

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, centrée et admettant une variance σ^2.

1. Montrer que pour toute variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant un moment d'ordre 2, on a :

$$E(Y) \leqslant \sqrt{E(Y^2)\,P(Y > 0)}\,.$$

2. En déduire que : $\forall \varepsilon > 0,\ P(X > \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$.

EXERCICE PRINCIPAL S 149

1. Question de cours : Théorème de transfert pour une variable aléatoire à densité.

Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Dans tout l'exercice, U désigne une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
Soit g une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$. On pose : $I = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire T_n par : $T_n = \dfrac{1}{n}\lfloor 1 + nU \rfloor$, où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t.

a) Déterminer la loi de T_n.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} E\big(g(T_n)\big)$ en fonction de I.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V\big(g(T_n)\big)$ en fonction de I et J.

3. On pose : $X = g(U)$ et $Y = \dfrac{1}{2}\big(g(U) + g(1-U)\big)$.

a) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ en fonction de I.

b) Soit f et h deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose pour tout λ réel : $Q(\lambda) = \int_0^1 \big(\lambda f(t) - h(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$.

Établir l'inégalité : $\left(\int_0^1 f(t)h(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_0^1 h^2(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

c) En déduire que $V(Y) \leqslant V(X)$.

4. On suppose dans cette question que la fonction g est croissante sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère deux variables aléatoires U_n et W_n indépendantes et de même loi que la variable aléatoire T_n de la question 2.

a) Justifier l'inégalité : $E\big([g(U_n) - g(W_n)][g(1-U_n) - g(1-W_n)]\big) \leqslant 0$.

b) En déduire que $E\big(g(T_n)g(1-T_n)\big) \leqslant E\big(g(T_n)\big)E\big(g(1-T_n)\big)$.

5. Montrer que $V(Y) \leqslant \dfrac{1}{2}V(X)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 149

On note E_n l'espace vectoriel des matrices à $2n$ lignes et $2n$ colonnes de la forme :

$$\begin{pmatrix}
a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\
0 & a_2 & & 0 & 0 & & b_2 & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\
0 & 0 & & a_n & b_n & & 0 & 0 \\
0 & 0 & & b_n & a_n & & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\
0 & b_2 & & 0 & 0 & & a_2 & 0 \\
b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1
\end{pmatrix}.$$

1. Trouver la dimension et une base de E_n.
2. Justifier la diagonalisabilité des matrices de E_n et trouver leurs vecteurs-colonnes propres.
3. Quelles sont les matrices inversibles de E_n ?

EXERCICE PRINCIPAL S 151

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ un produit scalaire sur E et $x \mapsto \|x\|$ la norme euclidienne sur E qui lui est associée.
On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(v_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ de vecteurs unitaires (c'est-à-dire de norme 1) de E.

1. Question de cours : Énoncer le théorème de Pythagore.

2. On suppose que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont deux à deux orthogonaux.
Montrer que pour tout n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, on a : $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}$.

3. On ne suppose plus que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont deux à deux orthogonaux.
On lance une pièce de monnaie bien équilibrée n fois de suite et, pour $j \in [\![1,n]\!]$, on note :

$$X_j = \begin{cases} -1 & \text{si au } j\text{-ème lancer, la pièce retombe sur Face,} \\ 1 & \text{si au } j\text{-ème lancer, la pièce retombe sur Pile.} \end{cases}$$

a) Préciser un modèle $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de cette expérience tel que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ soient des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$ mutuellement indépendantes pour P. On se place dorénavant dans ce modèle.
b) Montrer que l'application $U : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par la relation : $U(\omega) = \|X_1(\omega)\, v_1 + X_2(\omega)\, v_2 + \cdots + X_n(\omega)\, v_n\|^2$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Cette variable aléatoire U pourra être notée $\|X_1\, v_1 + X_2\, v_2 + \cdots + X_n\, v_n\|^2$.
c) Déterminer $E(U)$.
En déduire qu'il existe un n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \leqslant \sqrt{n}$.
d) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
  (i) pour tout n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \ldots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}$;
  (ii) la famille $(v_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est orthonormale.
On commencera par prouver que, pour tout couple de vecteurs $(a,b) \in E^2$, $\|a+b\|^2 = \|a-b\|^2$ si et seulement si a et b sont orthogonaux. Autrement dit, les diagonales d'un parallélogramme $\mathcal{P}$ sont d'égales longueurs si et seulement si $\mathcal{P}$ est un rectangle.
e) En déduire que si les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ne sont pas deux à deux orthogonaux, il existe un n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| > \sqrt{n}$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 151

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente à termes strictement positifs et de limite nulle.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{S_n}$.

1. Étudier la nature de la série $\sum_{k \geqslant 0} v_k$ en fonction de la nature de la série $\sum_{k \geqslant 0} u_k$.

2. Quel résultat obtient-on dans le cas où $u_n = \dfrac{1}{n}$?

EXERCICE PRINCIPAL S 154

1. Question de cours : Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'un endomorphisme.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose l'existence d'un réel k tel que ${}^tA\,A + A\,{}^tA = k\,I$.

2. On pose : $S = {}^tA\,A + A\,{}^tA$, et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $q(X) = {}^tXSX$.

Étudier le signe de $q(X)$ et en déduire que $k \geqslant 0$.

3. On suppose que $k = 0$. Montrer que $A = 0$.

On suppose dorénavant que $k > 0$.

4. Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ ayant pour matrices respectives, A et ${}^tA$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Établir la relation : $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$.

5. On pose : $B = {}^tA\,A$. Soit λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé.

a) Montrer que $\lambda \geqslant 0$.

b) Montrer que X est un vecteur propre de la matrice $A\,{}^tA$ pour une valeur propre μ que l'on précisera.
En déduire que $\lambda \in [0, k]$.

c) On suppose dans cette question que $\lambda \in]0, k[$. Montrer que les vecteurs AX et ${}^tAX$ sont des vecteurs propres de B pour la valeur propre μ.

d) On se place dans la situation de la question c). On note E_λ et E_μ les sous-espaces propres de la matrice B pour les valeurs propres λ et μ respectivement. On note φ l'application de E_λ dans E_μ définie par $\varphi(X) = AX$.
Montrer que l'application φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Que peut-on dire si $\lambda = 0$ ou $\lambda = k$?

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 154

Soit $p \in]0, 1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} E\big(e^{\frac{S_n}{n}}\big)$.

2. Étudier la convergence en probabilité de la suite de variables aléatoires $\big(e^{\frac{S_n}{n}}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. SUJETS DE L'OPTION ÉCONOMIQUE

EXERCICE PRINCIPAL E 67

1. Question de cours : Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dans la base $\mathcal{B}$ telles que $\sum_{i=1}^{n} v_i = 2$.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^n$ qui, à tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe $f(x) = x - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)v$.

2.a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
b) Déterminer $f \circ f$. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
c) Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?

3.a) Déterminer les valeurs propres de f.
b) Quels sont les sous-espaces propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4.a) Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que les matrices $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & \cdots & v_1 \\ v_2 & v_2 & \cdots & v_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n & v_n & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 67

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f strictement positive sur $\mathbb{R}$ et possédant une espérance.
Pour tout $\alpha \in]0,1[$, on note h_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h_\alpha(t) = |t| + (2\alpha - 1)\,t$.
Pour tout $q \in \mathbb{R}$, on pose : $L(q) = E\big(h_\alpha(X - q)\big)$.

1. Établir l'existence d'un unique réel q_α en lequel la fonction L est minimale.
2. On suppose que $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et que X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer $q_{\frac{1}{2}}$.

EXERCICE PRINCIPAL E 68

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

2. Soit X une variable aléatoire strictement positive suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
On pose : $Z = -\ln X$ et on note F_Z la fonction de répartition de Z.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_Z(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

b) Montrer que Z admet une densité de probabilité continue f_Z qui atteint sa valeur maximale en un unique point x_0.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de F_Z dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

d) Que représente le point d'abscisse x_0 et d'ordonnée $F_Z(x_0)$ pour cette courbe ?

3. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ indépendantes et de même loi que X.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = Y_n - \ln n$.

a) Déterminer les fonctions de répartition F_{Y_n} et F_{Z_n} de Y_n et Z_n, respectivement.

b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z.

c) Établir pour tout réel $c > 0$, l'inégalité : $E(Y_n) \geqslant cP(Y_n \geqslant c)$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 68

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? inversible ?

2. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'existence d'une matrice N telle que $A = I + N$.
Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k.

3. On rappelle l'identité remarquable : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Déterminer A^{-1}.

2. SUJETS DE L'OPTION ÉCONOMIQUE

EXERCICE PRINCIPAL E 69

1. Question de cours : Définition de la dimension d'un espace vectoriel.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et F_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $X, X^2, \dots, X^{n-1}, X^n$.

2. Montrer que les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$, sont les polynômes constants.

3. Préciser les dimensions respectives de E_n et F_n.

4. Pour tout $P \in F_n$, on note Q le polynôme tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(x+1) - P(x)$.

a) Vérifier que $Q \in E_n$. Quelle relation existe-t-il entre les degrés de P et de Q ?

b) Soit Δ l'application de F_n sur E_n qui à tout $P \in F_n$ associe $Q = \Delta(P)$, où $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(x+1) - P(x)$.
Montrer que l'application Δ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

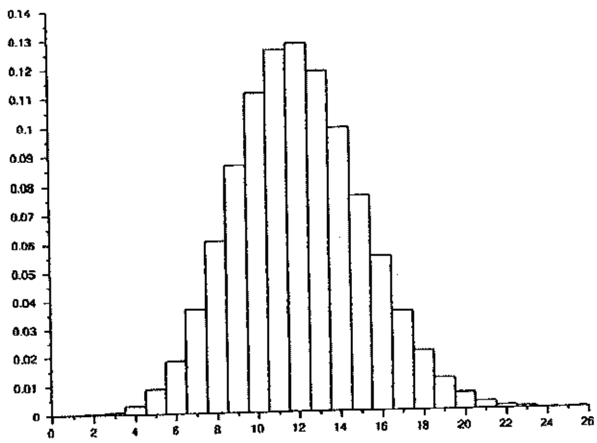
c) Déterminer un polynôme P vérifiant $\Delta(P) = X^3$. En déduire la valeur des sommes $\sum_{k=1}^{n} k^3$ et $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 69

Après une alerte incendie, les 60 élèves d'une école se répartissent au hasard dans 5 salles de classe.
Afin de savoir comment se répartissent les élèves, on exécute le programme Scilab suivant :

```
Y=grand(100000,1,"bin",60,1/5)
histplot(0.5:25,Y)
```

qui donne la représentation ci-dessous :



Que représente la valeur maximale prise par cet histogramme ? Prouver un résultat concernant cette valeur.

EXERCICE PRINCIPAL E 70

1. Question de cours : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.

Propriétés de l'application $x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Pour toute fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Déterminer $T(f_a)$.

3.a) Montrer que pour toute fonction $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $T(f)$.

b) On suppose que f est une fonction bornée de E. Montrer que $T(f)$ est bornée et établir l'existence d'un réel K tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant K|x - y|$.

4. Soit T l'application de E dans E qui à $f \in E$, associe $T(f)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il surjectif ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $T(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit T_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme T et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme T_n est-il diagonalisable ? T_n est-il bijectif ?

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 70

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $W_n = \sum_{k=1}^{n} kX_k$.

1. Calculer $E(W_n)$ et $V(W_n)$.

2. Les variables aléatoires W_n et W_{n+1} sont-elles indépendantes ?

EXERCICE PRINCIPAL E 71

1. Question de cours : Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1. Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$, alors $P(A)$ désigne la matrice $a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p$.

2. Soit A et Q deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice Q est inversible, d'inverse notée Q^{-1}. Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P(Q^{-1}AQ)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1}.

3.a) Soit $x_1, x_2 \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le n-uplet $\big(P(x_1), P(x_2) \dots, P(x_n)\big)$.
Autrement dit : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\varphi(P) = \big(P(x_1), P(x_2) \dots, P(x_n)\big)$. Montrer que l'application φ est bijective.
b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n réels distincts non nuls et $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$.
Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\lambda_i \times P(\lambda_i) = 1$.
Que vaut $T \times P(T)$? Conclure.

4. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall\,(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égale à $P(A)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 71

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires telles que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre p_k avec $0 < p_k < 1$.
On pose : $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $V(Y) \leqslant \dfrac{n^2}{4}\cdot$

EXERCICE PRINCIPAL E 73

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère n urnes numérotées de 1 à n et N un entier naturel multiple de 2^n.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la k-ième urne contient N boules dont $\frac{N}{2^k}$ boules blanches, les autres étant noires.
On tire dans l'urne 1 une boule que l'on place dans l'urne 2, puis on tire dans l'urne 2 une boule que l'on place dans l'urne 3 et ainsi de suite jusqu'à tirer dans l'urne $n-1$ une boule que l'on place dans l'urne n, puis on tire une boule dans l'urne n.
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, soit p_k la probabilité que la boule tirée dans l'urne k soit blanche.
Trouver une relation de récurrence entre p_{k+1} et p_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$.

3.a) Calculer p_n en fonction de n et N.
b) Pour n fixé, calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} p_n$. Interpréter cette limite.

4. Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$. Calculer la probabilité conditionnelle que la n-ième boule tirée soit blanche sachant que la boule tirée dans l'urne i est blanche.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 73

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

2. Quelle est la nature de la suite $(n!)^{\frac{1}{n}}$?

EXERCICE PRINCIPAL E 76

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Dans cet exercice, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$ *et admettent une densité.*

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance $E(X)$. On note respectivement F et f, la fonction de répartition et une densité de X.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

2. Pour $x \geqslant 0$:

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt$.

b) Établir les inégalités : $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt \geqslant x\big(1-F(x)\big) \geqslant 0$.

c) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\displaystyle E(X) = \int_0^{+\infty} \big(1-F(t)\big)\,dt$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, G_n la fonction de répartition de Z_n et g_n une densité de Z_n.

a) Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_n(t)$ en fonction de $F(t)$.

b) Établir l'existence de $E(Z_n)$.

c) Pour $n \geqslant 2$, montrer que : $\displaystyle E(Z_n) - E(Z_{n-1}) = \int_0^{+\infty} \big(F(t)\big)^{n-1}\big(1-F(t)\big)\,dt$.

d) Soit $m > 0$. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre m (d'espérance $1/m$). Calculer $E(Z_n)$. Donner un équivalent de $E(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 76

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et X une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose : $A = X{}^tX$.

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

EXERCICE PRINCIPAL E 77

1. Question de cours : Donner des critères de convergence des séries à termes positifs.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln\left(\frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

2. Dresser le tableau de variation de f.

3.a) Montrer que la courbe (Γ) d'équation $y = \ln\left(\frac{e}{2}x\right)$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) Tracer $(\mathcal{C})$ et (Γ) dans le même repère.

4. Établir pour tout réel $x \geqslant 1$, l'encadrement : $0 \leqslant f'(x) < 1$.

En déduire le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \geqslant 1$ ainsi que la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$.

5. Soit le programme *Scilab* suivant :

```
function y=f(x)
    y=log(%e*(x+x^(-1))/2)
endfunction

x=[0.01:0.1:5];
plot2d(x,f(x),rect=[0,0,5,5])

x=[0,5]
plot2d(x,x)

u=input('u0=')
x=[u];y=[0]
for k=1:10
     z=f(u)
     x=[x,u]
     x=[x,z]
     y=[y,z,z]
     u=z
end
plot2d(x,y)
```

Expliquer ce que fait ce programme et ce qu'il illustre.

Dans **plot2d, rect[0,0,5,5]** signifie que seule la partie de la courbe contenue dans le rectangle $\{(x,y)/\, 0 \leqslant x \leqslant 5 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 5\}$ sera tracée.

6. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in [1, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

7.a) Justifier l'existence d'un réel $a > 1$ tel que $x \in [1, a] \Longrightarrow f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 77

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \geqslant 1$, X_n admet une densité f_n continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\left[\frac{2}{n}, +\infty\right[$, affine sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$.

1. Déterminer une densité f_n de X_n.
2. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

EXERCICE PRINCIPAL E 79

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit a un paramètre réel et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que :

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) & \text{si } x \geqslant a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

2.a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = \dfrac{1}{e-1}$.

b) Étudier les variations de F et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

3.a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.

b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

4. Soit Y la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). On pose : $Z = X - Y$.

a) Calculer $P(Y = 0)$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $P(Y = n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right)$.

b) Déterminer la fonction de répartition et une densité de Z.

c) Établir l'existence de l'espérance $E(Z)$ de Z. Calculer $E(Z)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 79

Soit a, b et c des réels non nuls vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose : $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1.a) Calculer la matrice $M = U\,{}^tU$ (où ${}^tU$ est la matrice transposée de la matrice-colonne U).

b) M est-elle diagonalisable ? inversible ?

2.a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer M^n.

b) Quelles sont les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.

EXERCICE PRINCIPAL T 16

1. Question de cours : Propriétés d'une variable aléatoire à densité.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(t) = \begin{cases} k\,t^{k-1} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2.a) Vérifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, la fonction f_k est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on note Y une variable aléatoire de densité f_k.

b) Calculer l'espérance et la variance de Y.

3.a) Déterminer la fonction de répartition F de Y.

b) Calculer le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite de F au point 1.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

4. Pour n entier supérieur ou égal à 1, soit $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi que la variable aléatoire Y.

On pose pour tout $n \geqslant 1$, $Z_n = \max(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ et on admet que Z_n est une variable aléatoire.

a) Montrer que pour tout réel z du segment $[0, 1]$, on a : $[Z_n \leqslant z] = [Y_1 \leqslant z] \cap [Y_2 \leqslant z] \cap \ldots \cap [Y_n \leqslant z]$.

b) En déduire la fonction de répartition G de Z_n ainsi qu'une densité de Z_n.

c) Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.

EXERCICE SANS PRÉPARATION T 16

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note A la matrice carrée d'ordre n définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$

et I la matrice unité d'ordre n.

1. Calculer la matrice $A^2 - (n+2)A + (n+1)I$.

2. En déduire que la matrice A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction de A et I.

EXERCICE PRINCIPAL T 18

1. Question de cours : Définition d'une fonction convexe.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, telle que $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^2}$.

2.a) Étudier les variations de la fonction f_1 sur $[0, +\infty[$.

b) Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

c) Établir l'existence d'un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$. Quelles sont ses coordonnées ?

d) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

b) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

4.a) Calculer pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+2} + u_n$.

b) Calculer u_3 et u_5.

c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$u_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2}\Big(\ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\Big).$$

EXERCICE SANS PRÉPARATION T 18

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Donner la loi de Y_n ainsi que l'espérance $E(Y_n)$ et la variance $V(Y_n)$ de Y_n.

2. Montrer que pour tout p vérifiant $0 < p < 1$, on a : $V(Y_n) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

EXERCICE PRINCIPAL B/L 15

On lance indéfiniment une pièce de monnaie qui donne "pile" avec la probabilité p $(0 < p < 1)$.
Pour tout entier $r \geqslant 1$, on note X_r la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois r "pile" consécutifs.
Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note P_k (respectivement F_k) l'événement : on obtient "pile" (respectivement "face") au k-ième lancer.
On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition d'un système complet d'événements.

2. Quelle est la loi de X_1 ? Donner son espérance.

3. On se propose de déterminer la loi de X_2 dans le cas particulier où $p = \dfrac{2}{3}$.

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose : $u_k = P(X_2 = k)$ et $U_k = \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\{F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2\}$ est un système complet d'événements.

b) Établir, pour tout entier $k \geqslant 2$, une relation entre u_k, u_{k+1} et u_{k+2}.

c) Déterminer une matrice A carrée d'ordre 2, indépendante de k, vérifiant : $AU_k = U_{k+1}$.

d) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible Q (d'inverse Q^{-1}) telles que $A = QDQ^{-1}$.

e) En déduire que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a : $P(X_2 = k) = \dfrac{4}{9}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}\right)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION B/L 15

Pour n entier supérieur ou égal à 1, on note $a(n)$ le nombre de chiffres de n dans son écriture décimale.
Par exemple, $a(25) = 2$, $a(7818) = 4$, etc.

Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{a(n)}{n(n+1)}$.

EXERCICE PRINCIPAL B/L 16

1. Question de cours : Base d'un espace vectoriel ; dimension.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \geqslant 1$ et soit f un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
On pose $F = E \times E = \{(x,y)/x \in E, y \in E\}$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $u_i = (e_i, 0)$ et $v_i = (0, e_i)$.

2. On pose : $\mathcal{V} = (u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n)$.

a) Montrer que $\mathcal{V}$ est une base de F.

b) En déduire la dimension de F.

3. On note Φ l'application de F dans F définie par : $\Phi\big((x,y)\big) = \big(f(x), f(x+y)\big)$.

a) Montrer que Φ est linéaire.

b) Dans cette question, on prend $n = 2$. Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
Donner la matrice de Φ dans la base $\mathcal{V}$.

4a) Établir une relation entre Ker Φ et Ker$f$.

b) En déduire la dimension de Ker Φ en fonction de celle de Ker$f$, puis le rang de Φ en fonction de celui de f.

5. Soit λ une valeur propre non nulle de Φ.

a) Montrer que λ est aussi une valeur propre de f.

b) Montrer que Φ et f ont les mêmes valeurs propres.

6. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Donner les valeurs propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

EXERCICE SANS PRÉPARATION B/L 16

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, donnée par : $F(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

1.a) Montrer que F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

b) Calculer pour tout x réel, $F(x) + F(-x)$.

2. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F. Montrer que $E(X)$ existe. Calculer alors $E(X)$.