

T07 Ex 16

$$\underline{1.} \quad (I_n + A)(I_n - A) = I_n - A^2 = (I_n - A)(I_n + A)$$

On multiplie à gauche par $(I_n + A)^{-1}$:

$$I_n - A = (I_n + A)^{-1} (I_n - A) (I_n + A)$$

On multiplie à droite par $(I_n + A)^{-1}$:

$$(I_n - A) (I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1} (I_n - A)$$

$$\text{ie } \boxed{B = (I_n + A)^{-1} (I_n - A)}$$

$$\underline{2.} \quad \text{On a donc } (I_n + A) B = I_n - A$$

$$\begin{aligned} \text{et donc } (I_n + A)(B + I_n) &= (I_n + A)B + (I_n + A) \\ &= I_n - A + I_n + A = 2I_n \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \underline{I_n + B \text{ est inversible}} \text{ et } \boxed{(I_n + B)^{-1} = \frac{1}{2} (I_n + A)}$$

$$\text{Comme } B = (I_n - A) (I_n + A)^{-1}$$

$$\text{on a donc } B (I_n + B)^{-1} = \frac{1}{2} (I_n - A) (I_n + A)^{-1} (I_n + A) = \frac{1}{2} (I_n - A)$$

$$\text{donc } A = I_n - 2 \cdot B (I_n + B)^{-1}$$

$$= (I_n + B) (I_n + B)^{-1} - 2B (I_n + B)^{-1}$$

$$= (I_n + B - 2B) (I_n + B)^{-1}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{A = (I_n - B) (I_n + B)^{-1}}$$