

Étude d'une application de \mathbb{C} dans \mathbb{C}

On note $E = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

1. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, z \in E \Rightarrow \frac{z-i}{z+i} \in F$.
2. On définit alors l'application :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ z &\longmapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

- (a) Montrer que tout nombre complexe w de F admet un antécédent par f dans E .
 - (b) En déduire que f est bijective de E sur F . Déterminer f^{-1} .
3. On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct.
 - (a) On note $E_1 = \{z \in E; \operatorname{Re}(z) = 0\}$. Déterminer l'ensemble $f(E_1)$ et le représenter graphiquement.
 - (b) On note $E_2 = \{z \in E; |z| = 1\}$. Déterminer l'ensemble $f(E_2)$ et le représenter graphiquement.