

Réduction d'un endomorphisme puis calcul de puissances

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$.
2.
 - (a) Déterminer les valeurs propres de f .
 - (b) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de f .
 - (c) On note \mathcal{B} l'union de ces bases. Vérifier que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .
 - (d) Déterminer $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3.
 - (a) On pose $P = \underset{\mathcal{B}_{\text{cano}}}{\text{Mat}}(\mathcal{B})$. Montrer que P est inversible.
 - (b) Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
 - (c) En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.