

Étude d'une fonction intégrale

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $t + \arctan t = 0$.
2. On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t + \arctan t}$.
 - (a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R}^* .
 - (b) Étudier la parité de f .
 - (c) Justifier que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_*^+ et exprimer $f'(x)$ pour $x > 0$.
 - (d) Dresser le tableau de variations de f .
3. On étudie le comportement de f en $+\infty$.
 - (a) Établir que pour tout $x > 0$:

$$\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leq \frac{\pi}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}.$$

- (b) En déduire l'existence et le calcul de la limite de f en $+\infty$.