

Méthode de Cardan sur un exemple

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - 6z + 4 = 0. \quad (1)$$

1.
 - (a) On pose $w = -2 + 2i$. Mettre w sous forme trigonométrique.
 - (b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^3 = w$. Donner les solutions sous forme trigonométrique.
 - (c) On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que les solutions sont : $1 + i$, $(1 + i)j$ et $(1 + i)j^2$.
 - (d) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.
2. On se donne $z \in \mathbb{C}$ solution de (1).
Soient $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $u + v = z$ et $uv = 2$.
 - (a) Calculer $u^3 + v^3$ et u^3v^3 .
 - (b) En déduire que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré : $Z^2 + 4Z + 8 = 0$.
 - (c) Déterminer les valeurs possibles de u et v puis de z .
 - (d) En déduire les solutions de l'équation (1).