

Deux jeux de dés successifs

Tous les dés considérés sont cubiques, et les apparitions des différentes faces sont toutes équiprobables. On considère le dé A dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et les sept dés D_i , $1 \leq i \leq 7$ tels que, pour chaque i le dé D_i possède $i - 1$ faces blanches et $7 - i$ faces noires (par exemple, le dé D_3 contient deux faces blanches et quatre faces noires).

On choisit tout d'abord un numéro i compris entre 1 et 7 en lançant le dé A et en procédant de la façon suivante :

- si le résultat du lancer est 2, 3, 4, 5 ou 6, on choisit le numéro sorti,
- si le résultat du lancer est 1, on lance à nouveau le dé A, et si le nouveau résultat est 1, 2 ou 3, on choisit le numéro 1, sinon on choisit le numéro 7.

Après avoir choisi de cette façon le numéro i , $1 \leq i \leq 7$, on joue exclusivement avec le dé D_i . On lance D_i successivement plusieurs fois de suite de façon indépendante. Les résultats obtenus à chaque lancer sont donc indépendants, sachant que l'on a utilisé le dé D_i . Un observateur, qui ignore quel dé D_i est utilisé, compte alors le nombre de faces noires obtenues à chaque lancer.

1. on note A_k l'évènement "à l'issue de la procédure de choix de dé, on choisit le dé numéro k ".
 - (a) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(A_2)$, $\mathbb{P}(A_3)$, $\mathbb{P}(A_4)$, $\mathbb{P}(A_5)$ et $\mathbb{P}(A_6)$.
 - (b) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(A_1)$ et $\mathbb{P}(A_7)$.
2. Calculer la probabilité d'obtenir :
 - (a) une face noire au premier lancer.
 - (b) une face noire aux deux premiers lancers. Les évènements "obtenir une face noire au premier lancer" et "obtenir une face noire au second lancer" sont-ils indépendants ?
 - (c) une face noire aux trois premiers lancers.
3. Si on a obtenu une face noire aux deux premiers lancers, calculer la probabilité d'obtenir une face noire au troisième lancer.