

Mode de paiement lors du passage en caisse

Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé les observations suivantes.

1. L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(S = 0, U = 0) = 0.4$$

$$\mathbb{P}(S = 0, U = 1) = 0.3$$

$$\mathbb{P}(S = 1, U = 0) = 0.2$$

$$\mathbb{P}(S = 1, U = 1) = 0.1$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

- (a) Déterminer les lois de S et U et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p = \frac{3}{5}$.
 - (b) Calculer la covariance du couple (S, U) . Les variables S et U sont-elles indépendantes ?
 - (c) Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros, sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?
2. On suppose que les modes de paiement sont indépendants entre les individus. Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n \geq 2$). On définit trois variables aléatoires C_n , L_1 et L_2 par :
 - C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
 - L_1 (resp. L_2) est égale au rang du premier (resp. du deuxième) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp. au moins deux) et à zéro sinon.

- (a) Déterminer la loi de C_n , et donner la valeur de son espérance et de sa variance.
- (b) Déterminer la loi de L_1 et vérifier que :

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(L_1 = k) = 1$$

- (c) Déterminer la loi de L_2 .