

Calculs de sommes doubles

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=j}^n 2^k \right)$$

(a) Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$. Montrez que $\sum_{k=p}^q 2^k = 2^{q+1} - 2^p$.

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n2^{n+1} + 1$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = \sum_{k=0}^n (k+1)2^k$. (*permutez les signes Σ*)

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

3. (a) A l'aide de la question précédente, calculez :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i (k+1)2^k$$

(b) En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^n k(k+1)2^k$.

(c) Que vaut la somme : $\sum_{k=0}^n k^2 2^k$?