Cours de mathématiques ECS 1ère année
Nouveau programme 2013

BÉGYN Arnaud

18/01/2014

Introduction

Ce manuscrit regroupe des notes de cours de mathématiques pour une classe d'ECS première année. J'ai écris ces notes lors de mes enseignements au lycée Fermat pendant les années 2010- ?.

Ce document n'est absolument pas figé et va beaucoup évoluer. N'hésitez pas à m'envoyer toutes vos remarques et critiques ou à me signaler d'éventuelles erreurs à l'adresse "arnaud.begyn@prepas.org".

Vous pouvez utiliser ce cours à toutes fins utiles, à condition de signaler son auteur et son origine. Les mises à jour sont disponibles sur le site http ://mathcpge.org/.

Table des matières

Chapitre 1

Notions élémentaires de logique et de théorie des ensembles

1 Notation

Traditionnellement, les objets mathématiques (nombres, fonctions...) sont notés avec une lettre de l'alphabet pouvant être minuscule, majuscule, capitale etc... Lorsqu'on se donne une liste de n objets on utilise un indice : x_1, x_2, ..., x_n. On peut aussi utiliser un indice supérieur, placé entre parenthèses pour ne pas le confondre avec la puissance : $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(n)}$. Lorsque l'on considère un tableau de nombres, on a recourt au double-indiçage : x_{ij} désigne l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

Pour varier les notations, on utilise aussi l'aplhabet grec, dont nous rappelons ci-dessous les minuscules et majuscules. Il est vivement recommander de bien le connaitre (sous peine de faire sourire son examinateur à l'oral).

Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	Alpha
β	B	Bêta
γ	Γ	Gamma
δ	Δ	Delta
ϵ	E	Epsilon
ζ	Z	Dzéta
η	H	Êta
θ	Θ	Thêta
ι	I	Iota
κ	K	Kappa
λ	Λ	Lambda
μ	M	Mu

Minuscule	Majuscule	Nom
ν	N	Nu
ξ	Ξ	Xi
o	O	Omicron
π	Π	Pi
ρ	P	Rhô
σ	Σ	Sigma
τ	T	Tau
υ	Υ	Upsilon
φ	Φ	Phi
χ	X	Chi
ψ	Ψ	Psi
ω	Ω	Omega

On utilisera aussi les abréviations suivantes :
- cqfd = ce qu'il fallait démontrer :
- ie = id est = c'est-à-dire ;
- p/r = par rapport à ;

- resp. = respectivement.

Ce cours de mathématiques est organisé selon une série de **définitions**, signalées par un cadre vert, par une série de **théorèmes** signalés par un cadre rouge, le tout illustré par des exemples et des exercices, ces derniers étant signalés par un cadre gris. Certains chapitres comportent des explications sur la manière de rédiger. Celles-ci sont signalés par un cadre jaune.

Le mot **théorème** est réservé à des résultats mathématiques jugés importants. Dans le cas d'un théorème "facile", on utilise le mot **proposition**. Parfois, on reformule certains théorèmes dans des cas simples, directement utilisables en pratiques : on parle alors de **corollaires**. Enfin certaines démonstrations plus ardues que les autres nécessiteront de démontrer des petites propositions intermédiaires appelées **lemmes**.

2 Logique

Un **prédicat** est un énoncé mathématique qui est soit **juste**, soit **faux**. On dit qu'un prédicat ne peut prendre que **deux valeurs logiques** : V ou F (i.e. Vrai ou Faux).

Par convention, lorsqu'on énonce une prédicat, on sous-entend toujours qu'il est vrai.

Exemple **:** « La fonction f est croissante sur l'intervalle I. »

Soient A et B deux prédicats. On définit les opérations suivantes.

• **Négation :** La négation de A est notée $non(A)$ ou $\overline{A}$. Elle est définie par la **table de vérité** suivante :

A	$non(A)$
V	F
F	V

On a bien évidemment $non(non(A)) = \overline{\overline{A}} = A$ (l'égalité signifie que les deux prédicats ont même table de vérité).

• **« Et » :** Le prédicat $A\ et\ B$ est défini par :

A	B	$A\,et\,B$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

On a bien évidemment $A\ et\ B = B\ et\ A$.

• **« Ou » :** Le prédicat $A\,ou\,B$ est défini par :

A	B	$A\,ou\,B$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

On a bien évidemment $A\ ou\ B = B\ ou\ A$.

Remarquons qu'il s'agit d'un « ou » **inclusif**, c'est-à-dire que les deux prédicats peuvent être vrais en même temps (contrairement au « ou » exclusif).

Proposition 1 Lois de Morgan
Les prédicats suivants ont même table de vérité.
– « $non(A\,et\,B)$ » et « $non(A)\ ou\ non(B)$ »
– « $non(A\,ou\,B)$ » et « $non(A)\ et\ non(B)$ »

• **Implication :** Le prédicat $A \Longrightarrow B$ est défini par :

A	B	$A \Longrightarrow B$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

En pratique, on ne considère que les première et troisième lignes de cette table de vérité, c'est-à-dire que l'on traduit le prédicat $A \Longrightarrow B$ par : **si** A est vrai **alors** B est vrai, ou encore pour que A soit vrai **il faut que** B soit vrai, pour que B soit vrai **il suffit** que A soit vrai. On dit que A est une **condition suffisante** pour B et que B est une **condition nécessaire** pour A.

Exemple : On pose A = « Le chien court sous la pluie » et B = « Le chien est mouillé ». Il est clair que $A \Longrightarrow B$. Par contre on a pas $B \Longrightarrow A$ (le chien est peut-être tombé dans la piscine !). Dans ce cas, on dit que la réciproque de l'implication $A \Longrightarrow B$ est fausse. On peut donc dire que « pour que le chien court sous la pluie, il faut qu'il soit mouillé », « pour que le chien soit mouillé, il suffit qu'il court sous la pluie ».

Rédaction : Pour montrer que $A \Longrightarrow B$, on procède de la façon suivante. On suppose que la prédicat A est vrai ; on doit alors montrer que B est vrai.

Pour montrer qu'une implication est vraie on utilise parfois le **raisonnement par contraposée**. Pour prouver que $A \Longrightarrow B$ est vrai, on montre que $non(B) \Longrightarrow non(A)$ est vrai, c'est-à-dire : **si** B est fausse **alors** A est fausse. En effet, on peut vérifier que ces deux prédicats ont la même table de vérité.

Exemple : Montrer que les prédicats $A \Longrightarrow B$ et $non(A)\,ou\,B$ ont même table de vérité. En déduire que les prédicats $A \Longrightarrow B$ et $non(B) \Longrightarrow non(A)$ ont même table de vérité (raisonnement par contraposée).

• **Équivalence :** Le prédicat $A \Longleftrightarrow B$ est défini par :

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

En pratique, on ne considère que la première ligne de cette table de vérité, c'est-à-dire que l'on traduit la proposition $A \Longleftrightarrow B$ par : A est vrai **si et seulement si = (ssi)** B est vrai, ou encore pour que A soit vrai **il faut et il suffit que** B soit vrai. On dit que A (resp. B) est une **condition nécessaire et suffisante** pour B (resp. pour A).

Pour montrer qu'une équivalence est vraie on raisonne très souvent par **double-implication** : on montre que $A \Longrightarrow B$ est vrai puis que $B \Longrightarrow A$ l'est aussi. En effet, on peut vérifier que les prédicats $A \Longleftrightarrow B$ et « $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$ » ont la même table de vérité.

Exemple **:** Montrer que le prédicat $A \Longleftrightarrow B$, et le prédicat $\big(A \Longrightarrow B\big)$ et $\big(B \Longrightarrow A\big)$ ont même table de vérité.

Rédaction : Pour montrer que $A \Longleftrightarrow B$, on procède donc par double-implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que la prédicat A est vrai ; on doit alors montrer que B est vrai. On en déduit que $A \Longrightarrow B$ est vrai.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que la prédicat B est vrai ; on doit alors montrer que A est vrai. On en déduit que $B \Longrightarrow A$ est vrai.

On peut alors conclure que $A \Longleftrightarrow B$ est vrai.

• **Raisonnement par l'absurde** : Pour montrer qu'un prédicat A est vraie, on peut choisir de raisonner par l'absurde : on suppose que A est faux, et on essaye d'aboutir à une contradiction évidente du type $2 < 1$ ou $0 < x < 0$ etc...

Exemple **:** Soit $x > 0$. Démontrer par l'absurde que $2x > x$.

• **Raisonnement par récurrence :** Soit $P(n)$ un prédicat qui dépend d'un entier $n \in \mathbb{N}$. On veut démontrer qu'il existe un entier n_0 fixé tel que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On dispose pour cela de différents résultats.

Théorème 2 Récurrence simple

On suppose que :

(i) Initialisation : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vrai ;

(ii) Hérédité : pour $n \geq n_0$ fixé quelconque, $P(n)$ vrai $\Longrightarrow P(n+1)$ vrai.

Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

Exemple **:** Pour $n \geq 1$, $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Théorème 3 Récurrence à deux pas

On suppose que :

(i) Initialisation à deux pas : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vrais ;

(ii) Hérédité à deux pas : pour $n \geq n_0$ fixé quelconque, $P(n)$ et $P(n+1)$ vrais $\Longrightarrow P(n+2)$ vrai.

Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

Exemple **:** On pose $F_0 = F_1 = 1$ et pour $n \geq 0$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Montrer que pour $n \geq 0$, $F_n \geq 0$.

Théorème 4 Récurrence forte
On suppose que :
(i) Initialisation : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vrai ;
(ii) Hérédité forte : pour $n \geq n_0$ fixé quelconque, $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, $P(n_0+2)$, ..., $P(n)$ vrais $\Longrightarrow P(n+1)$ vrai.
Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

Exemple **:** On pose $u_1 = 3$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{n}\left(u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right)$. Montrer que pour $n \geq 1$, $u_n = 3n$.

3 Ensembles

3.1 Définitions

Définition 5 Ensembles
Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments. On note $x \in E$ lorsque x est élément de E, et $x \notin E$ dans le cas contraire.

Exemple **:** Un ensemble peut donc être défini en énumérant la liste de ses éléments (entre accolades) :
- $\{a\}$ = ensemble formé d'un unique élément a = **singleton**
- E = ensemble des couleurs d'un jeu de 32 cartes = {coeur, carreau, trèfle, pique} (4 éléments)
- $\mathbb{N}$ = ensemble des entiers naturels = $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (infinité d'éléments)

Soit $P(x)$ une prédicat dépendant de x élément de E.

Définition 6 Quantificateurs

1. Lorsque $P(x)$ est vrai **pour tous** les éléments x de E, on le note :
$$\forall x \in E, \quad P(x)$$
Le symbole $\forall$ est appelé quantificateur « quel que soit ».
2. Lorsque $P(x)$ est vrai pour **au moins un** élément x de E, on le note :
$$\exists x \in E / P(x) \qquad \text{ou} \qquad \exists x \in E;\ P(x)$$
Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur « il existe ».
3. Lorsque $P(x)$ est vrai pour **un unique** élément x de E, on le note :
$$\exists! x \in E / P(x) \qquad \text{ou} \qquad \exists! x \in E;\ P(x)$$
Le symbole $\exists!$ est appelé quantificateur « il existe un unique ».

Rédaction :

1. Pour montrer que « $\forall x \in E,\ P(x)$ », on procède de la manière suivante : on se donne $x \in E$ fixé quelconque et le but est laors de montrer que $P(x)$ est vrai pour ce x.
2. Pour montrer que « $\exists x \in E / P(x)$ », on procède de la manière suivante : on doit trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai, par exemple en résolvant une équation d'inconnue x et en prouvant que cette équation a au moins une solution.
3. Pour montrer que « $\exists! x \in E / P(x)$ », on procède de la manière suivante : on doit trouver un unique $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai, par exemple en résolvant une équation d'inconnue x et en prouvant que cette équation a une unique solution.

Il faut connaître la négation de ces quantificateurs.

Proposition 7 L'égalité signifiant que les prédicats ont même table de vérité :

1. $non\big(\forall x \in E, P(x)\big) = \exists x \in E; non\big(P(x)\big)$.
2. $non\big(\exists x \in E; P(x)\big) = \forall x \in E, non\big(P(x)\big)$.

Nous allons maintenant voir comment comparer deux ensembles.

Définition 8 Inclusion
Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F et on le note $E \subset F$ ou $E \subseteq F$, lorsque tout élément de E est aussi élément de F, i.e. lorsque :

$$\forall x \in E, \quad x \in F$$

ou encore :

$$x \in E \Longrightarrow x \in F$$

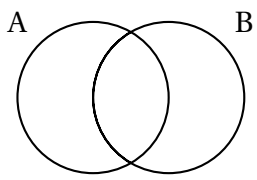
On dit aussi que E est un sous-ensemble de F, ou que E est une partie de F.

Dans le cas contraire, on note $E \not\subset F$ et on a : $\exists x \in E / \ x \notin F$.

⚠ ATTENTION : dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on peut toujours comparer deux nombres x et y : on a $x \leq y$ et $x \geq y$. On dit que la relation d'ordre $\leq$ est **totale**. Mais ce n'est pas le cas pour les ensembles : si A et B sont deux ensemble quelconques, on peut avoir $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.

Exemple **:** Dans $\mathbb{R}$, si $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, alors $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.

Exemple **:** Sur l'exemple suivant, on a : $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.



Rédaction : Pour montrer que $E \subseteq F$ on se donne $x \in E$ fixé quelconque, et on démontre que $x \in F$.

Proposition 9 Si E, F, G sont trois ensembles :
(i) on a $E \subseteq E$;
(ii) si $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$ alors $E \subseteq G$.

Définition 10 Egalité
Soient E et F deux ensembles.
On dit que $E = F$ lorsque $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$, i.e. lorsque : $x \in E \iff x \in F$.

Si $E \subseteq F$ mais $F \nsubseteq E$ alors on dit que E est strictement inclus dans F, et on le note $E \subsetneq F$.

Rédaction : Pour montrer que $E = F$ on procède donc par double-inclusion.
$\boxed{\subseteq}$ On se donne $x \in E$ fixé quelconque ; on doit alors montrer que $x \in F$. On en déduit que $E \subseteq F$.
$\boxed{\supseteq}$ On se donne $x \in F$ fixé quelconque ; on doit alors montrer que $x \in E$. On en déduit que $F \subseteq E$.
On peut alors conclure que $E = F$.

On définit un ensemble particulier qui ne possède pas d'élément.

Définition 11 Ensemble vide
On appelle ensemble vide, noté $\emptyset$, l'ensemble qui ne posséde pas d'élément. Il est inclus dans tout autre ensemble ; il ne possède qu'un sous-ensemble : lui-même.

Très souvent on définit un sous-ensemble en imposant que ses éléments vérifient une certaine propriété.

Définition 12 Sous-ensemble défini par une propriété
Soient E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant de x élément de E. L'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété $P(x)$ est noté :

$$\{x \in E \,/\, P(x)\} \text{ ou encore } \{x \in E ;\, P(x)\}$$

C'est un sous-ensemble de E.

Exemple : $A = \{x \in \mathbb{R} / \, x^2 - 3x + 2 \geq 1\}$ est une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 13 Ensemble des parties
Si E est un ensemble, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble par les parties de E.
On a donc pour F un ensemble quelconque :

$$F \subseteq E \iff F \in \mathscr{P}(E)$$

On a toujours $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.

Exemple **:** Si E est un singleton : $E = \{a\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, E\}$.

Terminons ce paragraphe par un paradoxe simple et célèbre, appelé paradoxe de Russel : il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles. Ce paradoxe est plus facile à comprendre sous la forme du paradoxe du barbier : il n'existe pas de barbier qui raserait tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes (et seulement ceux-là). En effet, qui raserait ce barbier ?

3.2 Opérations sur les ensembles

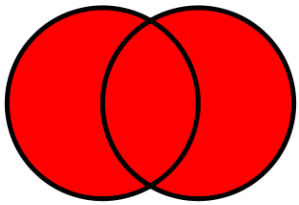
Définition 14 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On définit :
(i) l'intersection de A et B, notée $A \cap B$, par :

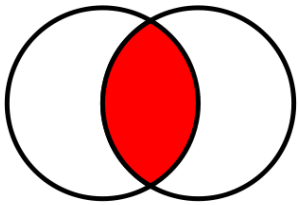
$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$

(ii) l'union de A et B, notée $A \cup B$, par :

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

Les figures suivantes représentent l'union et l'intersection de deux ensembles A et B.



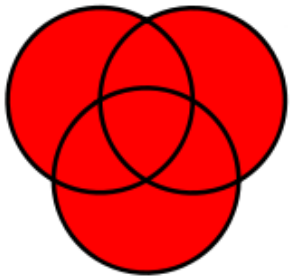


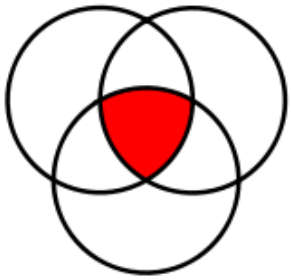
Proposition 15 Règles de calcul.
Si A, B et C sont trois parties d'un ensemble E :
1) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;
2) Associativité : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
3) $A \cap A = A \cup A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$;
4) Commutativité : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$;
5) Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$.

La propriété d'associativité de l'union permet de se dispenser des parenthèses et d'utiliser la notation $A \cup B \cup C$ pour l'union de trois ensembles : en effet, cette notation désigne indifféremment $(A \cup B) \cup C$ ou $A \cup (B \cup C)$, et ces deux quantités sont égales donc cela ne pose pas de problème de confusion.
La même remarque est valable pour l'intersection : on peut utiliser la notation $A \cap B \cap C$.

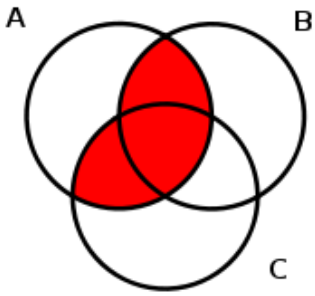
⚠ Par contre, dans une expression mélangeant union et intersection, on ne peut pas se dispenser des parenthèses.
Par exemple la notation $A \cup B \cap C$ n'a aucun sens ! En effet, elle peut désigner $(A \cup B) \cap C$ ou $A \cup (B \cap C)$, et comme ces deux quantités sont différentes, on ne sait plus de quo on parle !

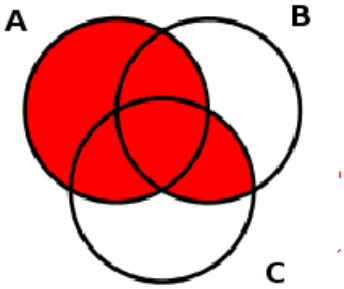
Les figures suivantes représentent l'union et l'intersection de trois ensembles A, B et C.





Les propriétés de distributivité sont aussi très importantes : elle sont à rapprocher de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition des nombres. Les figures suivantes permettent de visualiser les formules $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$.

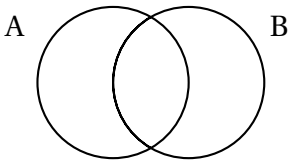


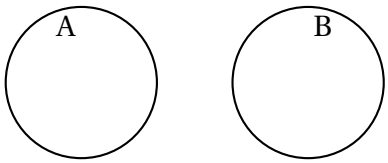


Définition 16 On dit que deux parties A et B d'un ensemble E sont disjointes ou incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$.

⚠ ATTENTION ! Ne pas confondre A et B **disjoints** : $A \cap B = \emptyset$, et A et B **distincts** : $A \neq B$. Deux ensembles disjoints sont distincts (ou vides), mais deux ensembles distincts ne sont en général pas disjoints.

Les figures suivantes représentent deux ensembles distincts mais non disjoints, et deux ensembles disjoints (donc distincts).



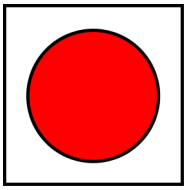


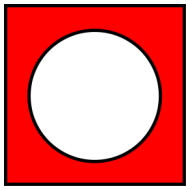
Définition 17 Complémentaire.
Soit A une partie d'un ensemble E. Le complémentaire de A dans E, noté $\complement_E A$, est défini par :

$$\complement_E A = \{x \in E / \ x \notin A\}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, $\complement_E A$ est noté plus simplement $\overline{A}$.

Les figures suivantes représentent une partie A et son complémentaire (l'ensemble E est représenté par un carré).



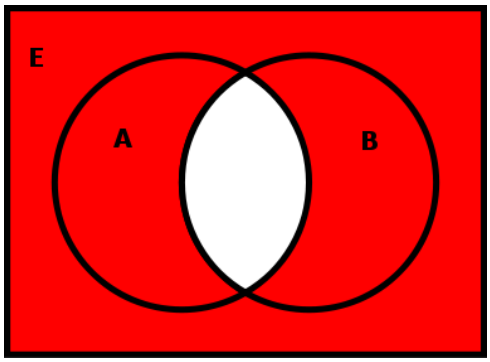


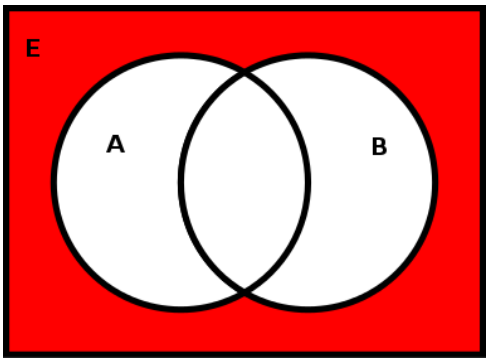
Proposition 18 Règles de calcul.
Si A est une partie de E :
1) $\overline{\overline{A}} = A$;
2) $\overline{\emptyset} = E$ et $\overline{E} = \emptyset$;
3) $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Exemple **:** Si A et B parties de E : $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq \overline{B}$.

Théorème 19 Lois de Morgan
Si A, B parties de E :
1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

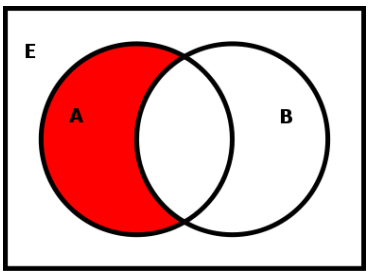
Les deux figures suivantes permettent de visualiser les lois de Morgan.





Définition 20 Différence
Si A, B parties de E : $A - B = A \cap \overline{B} = \{x \in A / \ x \notin B\}$. On le note aussi $A \backslash B$.

La figure suivante représente $A \backslash B$.



3.3 Produits cartésiens et familles d'éléments

Définition 21 Produit cartésien
Soient E et F deux ensembles. On note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) tel que $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \{(x, y) / \ x \in E \text{ et } y \in F\}$$

$E \times F$ est appelé produit cartésien de E et de F.
Plus généralement, si E_1, E_2, ..., E_n sont n ensembles, on note $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ..., $x_n \in E_n$.
Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est noté E^n.

Exemple **:** $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) / \ x \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}\}$.

Définition 22 Famille d'éléments de E
Soient I un ensemble (appelé ensemble d'indices), et E un autre ensemble. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de E indexée par I lorsque, pour chaque $i \in I$, x_i est un élément de E.
Par exemple pour $I = [\![1, n]\!]$, $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \ldots, x_n)$ est un n-uplet, et pour $I = \mathbb{N}$, $(x_i)_{i \in I} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite.

Exemple **:** $(\sqrt{x})_{x \geq 0}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}$, indexée par $\mathbb{R}^+$.

Définition 23 Famille de parties de E
On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E, lorsque pour $i \in I$, A_i est une partie de E.

Dans ce cas $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{P}(E)$, au sens de la définition donnée précédemment.

Exemple : $\left(\left[1, 1+\dfrac{1}{n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de parties de $\mathbb{R}$, indexée par $\mathbb{N}^*$.

Définition 24 Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, on définit l'union des A_i pour $i \in I$, notée $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, par :

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I \,/\, x \in A_i$$

De même on définit leur intersection $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$:

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i$$

Exemple : $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left[1, 1+\dfrac{1}{n}\right[= [1,2[$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left[1, 1+\dfrac{1}{n}\right[= \{1\}$.

Proposition 25 Règles de calcul.
Si B est une partie de E et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, alors :

1) Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$: $\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup\limits_{i\in I} (A_i \cap B)$,

et de $\cup$ par rapport à $\cap$: $\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap\limits_{i\in I} (A_i \cup B)$.

2) Lois de Morgan : $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcap\limits_{i\in I} \overline{A_i}$ et $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$.

Définition 26 Si $(A_i)_{i\in I}$ famille de parties de E, on dit que les A_i sont deux à deux disjoints lorsque :

$$\forall i, j \in I, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

⚠ ATTENTION : les accolades définissent des ensembles et les parenthèses des familles.
Pour les ensembles, les répétitions ne sont pas prises en compte, contrairement aux familles : $\{a, a, b\} = \{a, b\}$ mais $(a, a, b) \neq (a, b)$.
Pour les ensembles l'ordre n'est pas pris en compte, contrairement aux familles : $\{a, b\} = \{b, a\}$ mais $(a, b) \neq (b, a)$.

4 Applications

4.1 Définitions

Définition 27 Application.
Soient E et F deux ensembles. Une application définie sur E à valeur dans F :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est une "relation" qui à chaque $x \in E$ associe un unique élément $y \in F$, noté $f(x)$.
On le note $f : E \longrightarrow F$.
$f(x)$ est appelé image de x, et si $y = f(x)$ alors x est appelé antécédent de y.

Vocabulaire :
• $f : E \longrightarrow F$ se lit "f est une application de E vers F" ou encore "f est une application définie sur E à valeurs dans F".
• $x \longmapsto f(x)$ se lit "à x est associé son image $f(x)$".

Lorsque f n'est pas définie sur E tout entier, on dit que f est une **fonction**, mais les confusions de vocabulaire entre applications et fonctions sont tolérées cette année.

⚠ On suppose donc dans tout ce chapitre que les applications sont définies sur E tout entier. On ne donnera donc pas l'ensemble de définition de f, puisque ce sera à chaque fois E tout entier.

Si à chaque $x \in E$ la "relation" associe plusieurs éléments de F, on ne parle pas d'**application** mais de **correspondance** de E vers F (mais ce n'est pas du tout au programme).

***Exemple* :** On associe à $x \in \mathbb{R}$ sa valeur absolue : c'est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

***Exemple* :** On associe à $n \in \mathbb{N}$ ses diviseurs positifs : c'est une correspondance de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

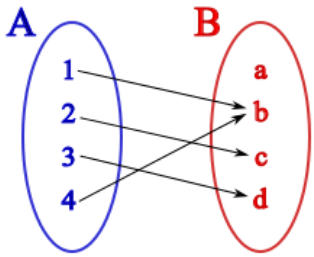
***Exemple* :** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + xy$ est une application.

Définition 28 Graphe d'une application
Le graphe de f est le sous-ensemble de $E \times F$ donné par :

$$G = \{(x, f(x)) \in E \times F / x \in E\}$$

Notation : On note $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble de toutes les applications définies sur E à valeurs dans F.

Une application peut être représentée par un diagramme :



Sur le diagramme précédent on voit qu'un élément de l'ensemble d'arrivée peut n'avoir aucun antécédent, ou en avoir plusieurs.

⚠ Important : lorsque $f : E \longrightarrow F$, ie f va de E vers F, on suppose en particulier que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in F$$

Définition 29 Égalité de deux applications.
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E' \longrightarrow F'$ sont deux applications. On dit que f et g sont égales, et on le note $f \equiv g$, lorsque $E = E'$, $F = F'$ et :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

En particulier, si $E = E'$ et $F = F'$ alors $f \not\equiv g$ si et seulement si : $\exists x \in E\,;\, f(x) \neq g(x)$.

⚠ Par exemple, on considère que les applications $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$ sont différentes.

Définition 30 Applications constantes.
Soient E et F deux ensembles. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite constante lorsqu'il existe $a \in F$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = a$$

On dit alors que f est constante égale à a.

Définition 31 Application identité.
Si E est un ensemble on définit l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \mathrm{id}_E(x) = x \end{array}$$

Nous verrons plus loin qu'elle joue le rôle d'élément neutre pour la loi de composition.

Définition 32 Restriction
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
1) Si $E_1 \subseteq E$ alors on appelle restriction de f à E_1, notée $f_{|E_1}$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} f_{|E_1} : & E_1 & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f_{|E_1}(x) = f(x) \end{array}$$

On a donc : $\forall x \in E_1,\ f_{|E_1}(x) = f(x)$.
2) Soient $E_1 \subseteq E$ et $F_1 \subseteq F$ tel que : $\forall x \in E_1,\ f(x) \in F_1$.
On appelle restriction de f à E_1 au départ et à F_1 à l'arrivée, notée $f_{|E_1}^{|F_1}$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} f_{|E_1}^{|F_1} : & E_1 & \longrightarrow & F_1 \\ & x & \longmapsto & f_{|E_1}^{|F_1}(x) = f(x) \end{array}$$

On a : $\forall x \in E_1,\ f_{|E_1}(x) = f(x)$.

Exemple **:** $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ peut être restreinte à $[0, \pi[$ au départ et à $[0, 1]$ à l'arrivée. La restriction est alors notée $\sin_{|[0,\pi[}^{|[0,1]}$.

Définition 33 Prolongement
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
1) Si $E \subseteq E_2$ alors on appelle prolongement de f à E_2 toute application $g : E_2 \longrightarrow F$ telle que $g_{|E} = f$ ie telle que : $\forall x \in E,\ g(x) = f(x)$.
2) Si $E \subseteq E_2$ et $F \subseteq F_2$, alors on appelle prolongement de f à E_2 au départ et F_2 à l'arrivée, toute application $g : E_2 \longrightarrow F_2$ telle que $g_{|E}^{|F} \equiv f$ ie telle que : $\forall x \in E,\ g(x) = f(x)$.

4.2 Loi de composition

Définition 34 Composée d'applications.
Soient deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F' \longrightarrow G$ telle que $F \subseteq F'$. On définit l'application composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ par :

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "g"] & G \\ E \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g\circ f"'] & \end{tikzcd}$$

⚠ ATTENTION : ne pas écrire $g(x) \circ f(x)$ à la place de $g \circ f(x)$!
En effet la notation $g(x) \circ f(x)$ n'a pas de sens, et tout calcul qui l'emploi est donc irrémédiablement faux/

Proposition 35 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On a $f \circ \mathrm{id}_E \equiv f$ et $\mathrm{id}_F \circ f \equiv f$.

Proposition 36 On se donne trois applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$.
On a la propriété d'associativité : $h \circ (g \circ f) \equiv (h \circ g) \circ f$.

On peut donc sans ambiguité utiliser la notation $h \circ g \circ f$ (les parenthèses sont omises).
On a alors pour $x \in E$: $h \circ g \circ f(x) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$.

4.3 Injection, surjection, bijection

Définition 37 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est injective sur E (ou que f est une injection) lorsque :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

ou encore par contraposée :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Deux points distincts ont donc toujours des images distinctes.
De manière équivalente ont peut dire que les points de F ont au plus un antécédent par f.

Rédaction : Pour montrer que f est injective sur E on fixe x_1 et x_2 éléments de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On doit alors montrer que $x_1 = x_2$.
Pour montrer que f n'est pas injective sur E on cherche deux éléments distincts x_1 et x_2 dans E tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Exemple **:** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ est injective sur $\mathbb{R}^+$.

Définition 38 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est surjective de E sur F (ou que f est une surjection) lorsque :

$$\forall y \in F, \exists x \in E / \ y = f(x)$$

De manière équivalente on peut dire que les points de F ont tous au moins un antécédent dans E.

Rédaction : Pour montrer que f est surjective de E sur F on fixe y élément de F. On doit alors trouver au moins un x élément de E tel que $f(x) = y$.
Pour montrer que f n'est pas surjective de E sur F on cherche y élément de F qui n'a pas antécédent par f dans E, ie tel que $f(x) \neq y$ pour tout $x \in E$.

Exemple **:** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = x^2$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$.

⚠ Attention à la subtilité suivante : si $x \in E$ on peut toujours poser $y = f(x)$ et on définit $y \in F$.
Par contre si $y \in F$, on ne peut pas en général définir $x \in E$ en posant $y = f(x)$. En effet ceci suppose que y a un antécédent par f. Si f est surjective, il est possible de définir x en posant $y = f(x)$, mais il est plus clair de dire « on note x un antécédent de y par l'application surjective f ».

Définition 39 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est bijective de E sur F (ou que f est une bijection) lorsque f est à la fois injective et surjective :

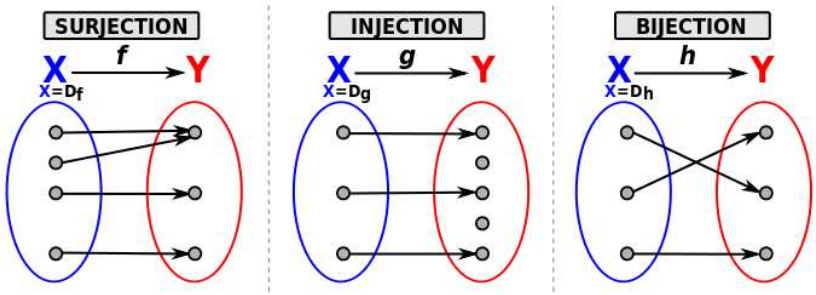
$$\forall y \in F, \exists! x \in E / \ y = f(x)$$

Un point de F a donc toujours un unique antécédent dans E.

Rédaction :

1. Pour monter que f est bijective de E sur F on fixe y élément de F. On doit alors trouver un unique x élément de E tel que $f(x) = y$.
2. On peut aussi procéder en deux temps en montrant que f est injective, puis surjective.

Le diagramme suivant illustre ces notions d'injection/surjection/bijection.

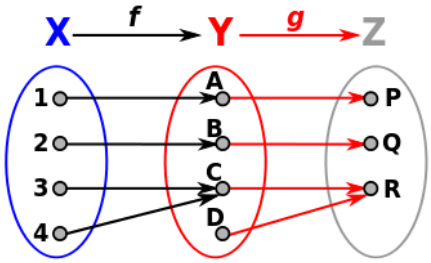


⚠ Attention, en général une application n'est ni injective, ni surjective. Considérer par exemple $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Exemple **:** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$, $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ n'est pas non plus bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}$, mais $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $h(x) = x^2$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

Proposition 40 Soient deux applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$.
(i) Si f est injective sur E et g injective sur F, alors $g \circ f$ est injective sur E.
(ii) Si f est surjective de E sur F et g surjective de F sur G, alors $g \circ f$ est surjective de E sur G.
(iii) Si f est bijective de E sur F et g bijective de F sur G, alors $g \circ f$ est bijective de E sur G.

Le diagramme suivant donne un exemple montrant qu'on peut avoir $g \circ f$ et g surjectives, mais f non surjective.



Définition 41 Inversibilité pour la loi de composition.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit qu'elle est inversible pour la loi de composition lorsqu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f \equiv \mathrm{id}_E$ et $f \circ g \equiv \mathrm{id}_F$.
Une telle fonction g est appelée application réciproque de f.

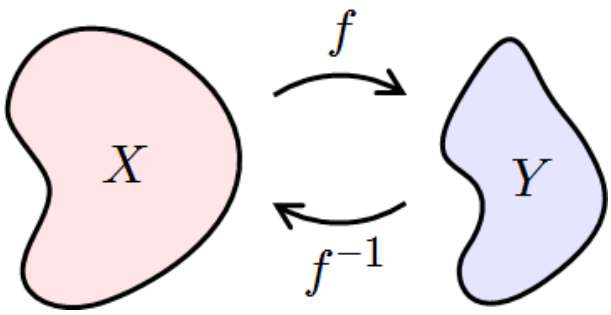
Proposition 42 Unicité de l'inverse pour la loi de composition.
Soit $f : E \longrightarrow F$ inversible pour la loi de composition.
Alors elle admet une unique application réciproque : on la note f^{-1}.

Si elle existe, l'application réciproque de $f : E \longrightarrow F$ a donc les propriétés suivantes :
- $f^{-1} : F \longrightarrow E$
- $f^{-1} \circ f \equiv \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} \equiv \mathrm{id}_F$
- Pour $x \in E$ et $y \in F$: $f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$

⚠ Lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ (ou dans $\mathbb{C}^*$), ne pas confondre f^{-1} avec l'inverse de f pour la multiplication !
Pour cette raison, l'inverse de f pour la multiplication est souvent notée $\dfrac{1}{f}$.

Théorème 43 Théorème de la bijection réciproque.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On a équivalence de :
(i) f est bijective de E sur F ;
(ii) f est inversible pour la loi de composition.
L'application f^{-1} est donc bijective de F sur E, on l'appelle aussi la bijection réciproque de f.
De plus, $\left(f^{-1}\right)^{-1} \equiv f$.

Sur un diagramme, l'inverse f correspond à inverser le sens des flèches.



On dispose donc de trois méthodes pour montrer qu'une application f est bijective :

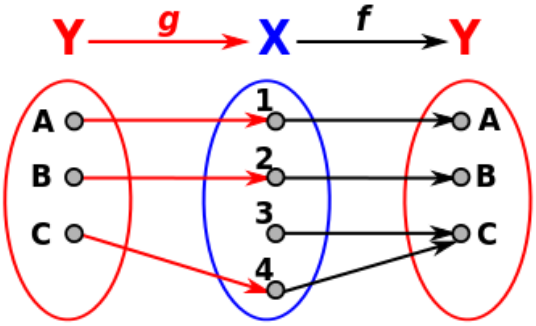
1. Montrer que f est injective et surjective.
2. Pour $y \in F$, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$.
   Si on obtient une unique solution, on montre que f est bijective. De plus, l'expression obtenue donne la fonction $f^{-1} : x = f^{-1}(y)$.
3. On cherche une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f \circ g \equiv \mathrm{id}_F$ et $g \circ f \equiv \mathrm{id}_E$.
   Si on trouve une telle fonction, on montre que f est bijective. De plus $f^{-1} = g$.

Remarquez que les deux dernières méthodes donne aussi la fonction réciproque de f, en plus de la bijectivité.

Exemple **:** $f : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathrm{e}^{x^2} \in [1, +\infty[$ est bijective de réciproque $f^{-1} : y \in [1, +\infty[\longmapsto \sqrt{\ln(y)} \in \mathbb{R}^+$ (utiliser 2.).

Exemple **:** id_E est bijective et $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$ (utiliser 3.).

⚠ On peut avoir $f \circ g \equiv \mathrm{id}_F$ et $g \circ f \not\equiv \mathrm{id}_E$. Dans ce cas f n'est pas une bijection. Considérer $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définies par $g(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = x^2$. On peut aussi visualiser cette propriété sur le diagramme suivant :



Dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a aussi une quatrième méthode pour démontrer la bijectivité qui repose sur le théorème suivant.

Théorème 44 Théorème de la bijection monotone
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :
(i) I est un intervalle de $\mathbb{R}$;
(ii) f est continue sur I ;
(iii) f est strictement monotone sur I.
Alors f induit une bijection de I sur un intervalle J, à déterminer avec le tableau de variations.

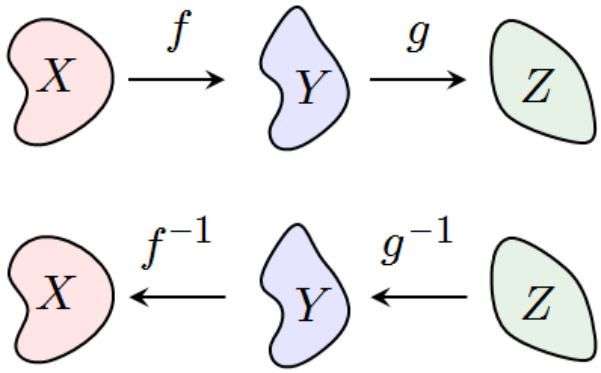
Exemple **:** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^n \in \mathbb{R}$ induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 45 Fonction racine n-ième
La bijection réciproque de la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^n \in \mathbb{R}_+^*$ est appelée fonction racine n-ième notée $\sqrt[n]{\cdot}$.
Pour x et y dans $\mathbb{R}_+^*$, on a : $x^n = y \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$.

⚠ $\sqrt[n]{}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$. Par exemple $\sqrt[3]{-1}$ n'est pas défini, bien que $(-1)^3 = -1$ ...

Proposition 46 Bijection réciproque d'une composée.
Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et $\left(g \circ f\right)^{-1} \equiv f^{-1} \circ g^{-1}$.

L'ordre a été inversé, mais cela paraît logique intuitivement : pour inverser f composée par g, il faut inverser g puis ensuite f.



4.4 Fonctions caractéristiques

Définition 47 Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique de A l'application :

$$\begin{array}{rccl} 1_A : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & 1_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Exemple **:** La fonction $1_\emptyset$ est constante égale à 0, et la fonction 1_E est constante égale à 1.

Proposition 48 Règles de calcul.
Soient A, B parties de E.

1. On a : $A \subseteq B \iff \forall x \in E,\ 1_A(x) \leq 1_B(x)$,
   et : $A = B \iff \forall x \in E,\ 1_A(x) = 1_B(x)$;
2. $\forall x \in E,\ 1_{\overline{A}}(x) = 1 - 1_A(x)$;
3. $\forall x \in E,\ 1_{A \cap B}(x) = 1_A(x) \times 1_B(x)$;
4. $\forall x \in E,\ 1_{A \cup B}(x) = 1_A(x) + 1_B(x) - 1_A(x) \times 1_B(x)$.

Exemple **:** Redémontrer les lois de Morgan à l'aide des fonctions caractéristiques.

4.5 Images directe et réciproque

Définition 49 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Si $A \subseteq E$, on appelle image directe de A par f l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\} = \text{ ensemble des } y \in F \text{ qui ont un antécédent par } f \text{ dans } A$$

   On a $f(A) \subseteq F$.
   De plus, si $y \in F$: $y \in f(A) \iff \exists x \in A / \ y = f(x)$

2. Si $B \subseteq F$, on appelle image réciproque de B par f l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / \ f(x) \in B\} = \text{ ensemble des } x \in E \text{ qui ont leur image dans } B$$

   On a $f^{-1}(B) \subseteq E$.
   De plus, si $x \in E$: $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

On a $f(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Exemple **:** Vérifier que $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$ et que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$.

Proposition 50 Si $f : E \longrightarrow F$ est une application, alors f induit une surjection de E sur $f(E)$.
De plus, f est surjective de E sur F si et seulement si $f(E) = F$.

f induit une surjection signifie que c'est une restriction de f qui est surjective : ici $f_{|E}^{|f(E)}$.

Définition 51 **Partie stable**
Soient $f : E \longrightarrow E$ une application et $A \subseteq E$. On dit que A est stable par f lorsque $f(A) \subseteq A$, ie $\forall x \in A$, $f(x) \in A$.

Exemple **:** Pour l'application $x \longmapsto x^2$, les parties suivantes sont-elles stables : $A = \mathbb{R}^+$, $B = [0,2]$, $C = [2,+\infty[$?

5 Exercices

Exercice 1 Écrire avec les quantificateurs et les connecteurs appropriés les propositions mathématiques suivantes :

1. Il existe un rationnel compris entre $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.
2. Il n'existe pas d'entier naturel supérieur ou égal à tous les autres.
3. Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers naturels sont nuls.

Exercice 2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 3 Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Sinon donner leur négation :

1. $\exists A \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n} \leqslant A$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N}^* / \frac{1}{n} \leqslant x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^* / \frac{1}{n} \leqslant x$

Exercice 4 Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E, on pose :

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

1. Montrer que : $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
2. Soient A, B et C trois parties de E vérifiant : $A \Delta B = A \Delta C$. Montrer que : $B = C$.
   Si $A \cup B = A \cup C$ peut-on dire que $B = C$?

Exercice 5

1. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ pour $E = \{a, b, c, d\}$; a, b, c, d étant distincts deux à deux.
2. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ pour un ensemble à deux éléments.

Exercice 6 Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

1. Montrer que : $\overline{A} \subset B \iff A \cup B = E$.
2. Démontrer que : $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C.$
3. Démontrer que : $\begin{cases} A \cup B = A \cap C \\ A \cap B = A \cup C \end{cases} \iff A = B = C.$

Exercice 7

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$.
2. On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Établir que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$$

Exercice 8 On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) + 2x \end{array}$$

1. Est-ce que l'application f est injective ? surjective ? bijective ?
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution réelle, et que cette solution est strictement positive.

Exercice 9 On considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

1. Est-elle injective sur $\mathbb{R}$? surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$?
2. Montrer que $f_{|\mathbb{R}^+}$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer son application réciproque $f^{-1}_{|\mathbb{R}^+}$.
3. De même montrer que $f_{|\mathbb{R}^-}$ est bijective de $\mathbb{R}^-$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer son application réciproque $f^{-1}_{|\mathbb{R}^-}$.
4. f est-elle injective sur $\mathbb{N}$? bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$? de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$?

Exercice 10 Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f \equiv Id_E$, alors g est surjective et f est injective.
2. On suppose que $g \circ f \equiv Id_E$, et que l'une des deux applications f ou g est bijective. Montrer que l'autre est aussi bijective.
3. Monter que si $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bijectives, alors f et g sont bijectives.

Exercice 11 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. On considère l'application suivante :

$$h: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \times G \\ x & \longmapsto & \big(f(x), g(x)\big) \end{array}$$

1. Montrer que si f ou g est injective alors h l'est aussi. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si h est surjective, alors f et g le sont aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Dans la recherche de contre-exemples, on pourra considérer les fonctions $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2 \in \mathbb{R}^+$ *et* $g : x \in \mathbb{R} \longrightarrow (x-1)^2 \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 12 Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On considère A_1 et A_2 deux parties de E et B_1 et B_2 deux parties de F.

1. Montrer que :

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \text{ et } f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

2. Montrer que :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(B_1 \cup B_2) & = & f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \text{ et} \\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) & = & f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{array}$$

Exercice 13 Soient E un ensemble non vide et $f : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad A \cap B = \emptyset \implies f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

Démontrer les propriétés suivantes :

1. $f(\emptyset) = 0$
2. $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$
3. $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad A \subset B \implies f(A) \leqslant f(B)$

Exercice 14 Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On considère A une partie de E et B une partie de F.
a) Montrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ et que $f^{-1}\left(f(A)\right) \supset A$.
b) On suppose f surjective. Montrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.
c) On suppose f injective. Montrer que $f^{-1}\left(f(A)\right) = A$.
d) On suppose f bijective. Vérifier que l'image réciproque de B par f est égale à l'image de B par l'application réciproque f^{-1}. [*C'est heureux car les deux ensembles sont notés de la même manière !*]

Exercice 15 Soit E un ensemble non vide. Soit $\mathscr{F}$ une partie non vide de $\mathscr{P}(E)$.On dit que $\mathscr{F}$ est un filtre sur E si : $\begin{cases} (a) & \forall (X,Y) \in \mathscr{F}^2,\ X \cap Y \in \mathscr{F} \\ (b) & \forall X \in \mathscr{F}, \forall Y \in \mathscr{P}(E) :\ X \subset Y \Longrightarrow Y \in \mathscr{F} \\ (c) & \emptyset \notin \mathscr{F} \end{cases}$
1. Que peut-on dire d'une famille non vide $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(E)$ ne vérifiant que les axiomes (a) et (b) ?
2. $\mathscr{P}(E)$ est-il un filtre sur E ? A quelle condition $\mathscr{P}(E) - \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ?
3. Montrer que si $\mathscr{F}$ est un filtre sur E, alors $E \in \mathscr{F}$.
4. Soit A une partie non vide de E. Montrer que $\mathscr{F}_A = \{X \in \mathscr{P}(E);\ A \subset X\}$ est un filtre sur E.

Chapitre 2

Dénombrement et calculs de sommes

1 Ensemble de nombres usuels

• Ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. On définit des intervalles d'entiers : si $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq p$, on note $[\![n, p]\!] = \{k \in \mathbb{N} / \ n \leq k \leq p\}$.

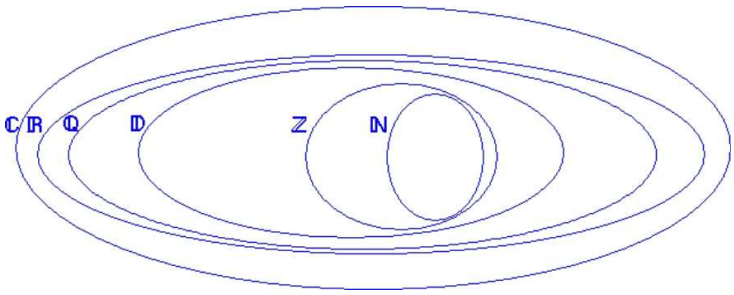
• Ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

• Ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \Big/ \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

• Ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}$ (contient strictement l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux). Les intervalles sont noté avec des crochets simples $[a, b[$ etc...

• Ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C} = \{a + ib / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Ils vérifient la chaîne d'inclusions : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.



La propriété d'intégrité de la multiplication est fondamentale dans la résolution d'équation : si a et b sont deux nombres alors $ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.
On en déduit que si $ac = bc$ alors $a = 0$ ou $b = c$.

2 Ensembles finis - Dénombrement

2.1 Ensembles finis

Définition 1 Soit E un ensemble non vide. On dit qu'il est fini lorsqu'il existe un entier naturel n et une bijection $\varphi : E \longrightarrow [\![1, n]\!]$. Le choix de n est alors unique : on l'appelle le cardinal de E, noté $\mathrm{Card}(E)$, $\#E$ ou encore $|E|$.

On adopte aussi la convention suivante : $\emptyset$ est un ensemble fini de cardinal égal à 0.

Si E est fini de cardinal $n \neq 0$ alors on peut numéroter ses éléments de 1 à n : $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Proposition 2 Un exemple important
Si $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq p$, alors $[\![n, p]\!]$ est un ensemble fini et $\#[\![n, p]\!] = p - n + 1$.
En particulier $\backslash lc0, n]\!] = n + 1$ et $\#[\![1, n]\!] = n$.

Théorème 3 Ensembles finis en bijection
Soient E et F deux ensembles. On suppose que :
(i) E est fini ;
(ii) il existe une bijection $\psi : E \longrightarrow F$.
Alors F est fini et $\#E = \#F$.

Théorème 4 Parties d'un ensemble fini
Soit E un ensemble fini.

1. Toute partie A de E est finie et vérifie $\#A \leq \#E$.
2. Si $A \subseteq E$: $A = E \iff \#A = \#E$.

⚠ ATTENTION : en général si $\#A \leq \#E$, on ne peut pas dire que $A \subseteq E$. Et bien sur si $\#A = \#E$, on ne peut pas dire que $A = E$.

Théorème 5 Propriétés des applications entre ensembles finis / Principe des tiroirs
Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Si f est injective alors $\#E \leq \#F$.
2. Si f est surjective alors $\#E \geq \#F$.
3. Si $\#E = \#F$ alors :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

Schubfachprinzip de Dirichlet : « Si n chaussettes occupent m tiroirs, et si $n > m$, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette. Une autre formulation serait que m tiroirs ne peuvent contenir strictement plus de m chaussettes avec une seule chaussette par tiroir ; ajouter une autre chaussette obligera à réutiliser l'un des tiroirs ».

Définition 6 Ensembles infinis
Si E n'est pas fini, on dit qu'il est infini. Son cardinal est dit transfini.

⚠ Les cardinaux transfinis ne sont pas tous égaux !
Par exemple on peut montrer que $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$.

Définition 7 Ensembles dénombrables
On dit que E est dénombrable lorsqu'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ (dans ce cas E est infini).
On dit que E est au plus dénombrable lorsque E est fini ou dénombrable.

Intuitivement le fait pour un ensemble d'être dénombrable signifie qu'on peut compter/énumérer ses éléments.

Exemple **:** $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne le sont pas.

2.2 Dénombrement des ensembles finis

Théorème 8 Dénombrement des parties d'un ensemble fini
Si E est fini alors $\mathscr{P}(E)$ l'est aussi et $\#\mathscr{P}(E) = 2^{\#E}$.

Démonstration : On note $n = E$. On donne trois pistes de démonstrations.
• Pour toute partie A de E, chaque $x \in E$ vérifie $x \in A$ ou $x \notin A$. Donc au total 2^n choix.
• On peut raisonner par récurrence sur n.
• On peut mettre $\mathscr{P}(E)$ en bijection avec $\{0,1\}^E$ via les fonctions indicatrices.

CQFD □

Théorème 9 Principe des bergers

1. Si A et B sont deux ensembles finis et disjoints alors $A \cup B$ est fini et $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.
2. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles finis et deux à deux disjoints : $\#(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \#A_1 + \#A_2 + \cdots + \#A_n$.

« Quand les bergers veulent compter leurs moutons, ils comptent leurs pattes et divisent par quatre ».

Démonstration : Supposons $\varphi : A \longrightarrow [\![1, n]\!]$ et $\psi : B \longrightarrow [\![1, p]\!]$ sont bijectives.
Alors $f : A \cup B \longrightarrow [\![1, n+p]\!]$ définie par $f(x) = \varphi(x)$ si $x \in A$ et $f(x) = n + \psi(x)$ si $x \in B$ est une bijection.

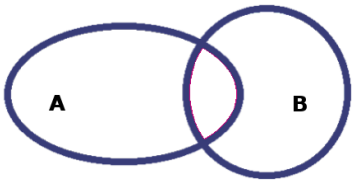
CQFD □

Corollaire 10 Cardinal d'une différence
Si A et B sont deux ensembles finis : $\#(B \setminus A) = \#B - \#(A \cap B)$.

Corollaire 11 Cardinal d'une union
Si A et B sont deux ensembles finis et disjoints alors $A \cap B$ et $A \cup B$ sont finis et :

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Ces formules se retrouvent facilement à l'aide d'un diagramme :



Corollaire 12 Cardinal du complémentaire
Si E est fini et A est une partie de E alors : $\#\overline{A} = \#E - \#A$.

Théorème 13 Cardinal d'un produit cartésien
Si E et F sont finis alors $E \times F$ est fini et $\#(E \times F) = (\#E).(\#F)$ (le point désigne la multiplication des nombres).

Démonstration : Il suffit de trouver une bijection de $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ sur $[\![1, np]\!]$.
Par exemple l'application $(x, y) \longmapsto x + n(y - 1)$.

CQFD □

2.3 Dénombrement des applications entre ensembles finis

Théorème 14 Si E et F sont deux ensembles finis alors F^E est fini et $\#F^E = (\#F)^{\#E}$.

Exemple **:** Si $n = \#E$ alors $\#\left(\{0,1\}^E\right) = 2^n$.

Définition 15 On appelle p-liste d'éléments d'un ensemble F tout p-uplet d'éléments de F.

Théorème 16 Dénombrement des p-listes
Le nombre de p-listes d'éléments de F est égal à $(\#F)^p$.

On va maintenant dénombrer les applications injectives. Pour cela, commençons par définir la notion de factorielle d'un entier naturel.

Définition 17 Factorielle
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.
On adopte aussi la convention $0! = 1$. Ainsi $n!$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par exemple $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$ ....

Définition 18 Arrangements
Si F est un ensemble fini tel $\#F = n$ et p un entier naturel non nul tel que $p \leq n$, on appelle arrangement de p éléments de F tout p-uplet d'éléments de F dont les composantes sont deux à deux distinctes.

Théorème 19 Dénombrement des arrangements
Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est égal à :

$$A_n^p = \begin{cases} n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } n \geq p \\ 0 & \text{si } n < p \end{cases}$$

avec $n = \#F$ et $p = \#E$.

Exemple **:** $A_3^7 = 0$ et $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5$.

Théorème 20 Dénombrement des applications injectives
Soient E et F deux ensembles finis.

1. Si $\#E \leq \#F$, il y a au total $\dfrac{(\#F)!}{(\#F - \#E)!} = A_{\#F}^{\#E}$ applications injectives sur E à valeurs dans F.
2. Si $\#E > \#F$, il y n'a aucune application injective sur E à valeurs dans F.

Corollaire 21 Dénombrement des bijections
Si $\#E = \#F$ alors le nombre de bijections de E sur F est égal à $(\#E)!$.
Si $\#E \neq \#F$ alors il n'existe pas de bijection de $\#E$ sur $\#F$.

Définition 22 Permutations
On appelle permutation de E toute bijection de E sur E.

Théorème 23 Dénombrement des permutations
Si E est fini de cardinal n, le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Le dénombrement des surjections est plus compliqué et n'est pas au programme. Nous le ferons en TD.

2.4 Coefficients binômiaux

Définition 24 Coefficients binômiaux
Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \in [\![0,n]\!]$. On pose $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$.
$\binom{n}{p}$ se lit « p parmi n ». La notation C_n^p n'est plus utilisée aujourd'hui.
Si $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$ et que l'une des deux conditions $n \geq 0$ ou $p \in [\![0,n]\!]$ n'est pas vérifiée on adopte la convention $\binom{n}{p} = 0$.

Nous allons voir que ces nombres interviennent dans de très nombreuses formules.

Théorème 25 Nombre de parties à p éléments
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, le nombre de parties de E à p éléments est égal à $\binom{n}{p}$.

Définition 26 Combinaisons
Si E est un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$, on appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E dont le cardinal est égal à p.

Théorème 27 Dénombrement des combinaisons
Si E est fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$, le nombre de combinaisons à p éléments de E est égal à $\binom{n}{p}$ (la formule est vraie même si $n < p$).

Proposition 28 Règles de calcul
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$.

1. Factorisation : si $p \neq 0$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.
2. Addition ou formule de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.
3. Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
4. $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{n-2}$.

En pratique on peut calculer les $\binom{n}{p}$ à l'aide de leur définition avec des factorielles :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

Exemple **:** $\binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 20 \times 19 \times 3 = 1140.$

Pour de petites valeurs de n la formule de factorisation permet de construite le **triangle de Pascal**. Dans un tableau dont les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0, on place la valeur de $\binom{n}{p}$ à l'intersection de la ligne n et la colonne p. La formule de Pascal donne que la somme de deux coefficients consécutifs sur la même ligne (colonnes p et $p+1$), donne le coefficient situé sur la ligne suivante,colonne $p+1$. Au départ on part d'un tableau avec des 1 sur la colonne 0 et sur la diagonale.

Exemple **:**

1							
1	1						
1		1					
1			1				
1				1			
1					1		
1						1	
1							1

donne

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

et on en déduit $\binom{6}{3} = 20.$

Proposition 29 Les coefficients binômiaux sont des nombres entiers naturels

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

2.5 Techniques de dénombrement

Pour bien dénombrer les éléments d'un ensemble fini E il faut :
- ne compter que les éléments de E ;
- ne pas en oublier ;
- ne pas compter plusieurs fois le même élément, ou penser à rectifier le résultat final.

Si on dénombre des objets en les décrivant **par étapes successives** (pour une carte : on choisit sa couleur puis sa hauteur), il faut à la fin **multiplier** les résultats.

Si on dénombre par **disjonction des cas**, il faut à la fin **additionner** les résultats (c'est le lemme des bergers).

• **p-listes :** si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **avec répétition autorisée, l'ordre des tirages étant pris en compte**, alors on a n^p possibilités au total.

Exemple **:** Nombre de coloriages possibles d'une carte des 27 pays de l'UE, avec 4 couleurs = 4^{27}.

Exemple **:** Nombre de tirages successifs **avec remise** de p boules dans une urne de n boules $= n^p$.

• **Arrangements :** si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **sans répétition, l'ordre des tirages étant pris en compte**, alors on a A_n^p possibilités au total.

Exemple **:** Nombre de coloriages possibles d'une carte des 27 pays de l'UE, avec 40 couleurs, de telle sorte que chaque pays ait une couleur différente de celle des autres $= A_{40}^{27}$.

Exemple **:** Nombre de tirages successifs **sans remise** de p boules dans une urne de n boules $= A_n^p$.

• **Combinaisons :** si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **sans répétition, l'ordre des tirages n'étant pas pris en compte**, alors on a $\binom{n}{p}$ possibilités au total.

Exemple **:** Nombre d'équipes de football possibles dans une classe de 45 élèves $= \binom{45}{11}$.

Exemple **:** Nombre de tirages **simultanées** de p boules dans une urne de n boules $= \binom{n}{p}$.

⚠ Le cas du choix de p éléments dans un ensemble à n éléments, **avec répétition, l'ordre des tirages n'étant pas pris en compte**, n'est pas au programme.

• **Permutations :** si on permute n éléments, alors on a $n!$ possibilités au total.

Exemple **:** Nombre de façons de ranger 10 manteaux dans une penderie $= 10!$.

⚠ Lorsqu'on permute les éléments, certains peuvent revenir à leur position intiale ! (on parle de points fixes).

• **Situations plus complexes :**

⋆ On dispose d'une urne de n boules dont n_1 sont noires et n_2 sont blanches. On tire p boules dans cette urne. Le nombre de tirages différents donnant p_1 blanches et p_2 noires ($p_1 + p_2 = p$) qu'on peut obtenir est :

⟶ $\underbrace{\binom{n_1}{p_1}\binom{n_2}{p_2}}_{\textit{Choix des boules}}$ si les boules sont tirées simultanément ;

⟶ $\underbrace{A_{n_1}^{p_1} A_{n_2}^{p_2}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et sans remise ;

⟶ $\underbrace{n_1^{p_1} n_2^{p_2}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et avec remise.

⋆ On dispose d'une urne de n boules dont n_1 sont noires, n_2 sont blanches et n_3 sont rouges. On tire p boules dans cette urne. Le nombre de tirages différents donnant p_1 noire, p_2 blanches et p_3 rouges ($p_1+p_2+p_3=p$) qu'on peut obtenir est :

$\longrightarrow$ $\underbrace{\binom{n_1}{p_1}\binom{n_2}{p_2}\binom{n_3}{p_3}}_{\textit{Choix des boules}}$ si les boules sont tirées simultanément ;

$\longrightarrow$ $\underbrace{A_{n_1}^{p_1}A_{n_2}^{p_2}A_{n_3}^{p_3}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}\binom{p-p_1}{p_2}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et sans remise ;

$\longrightarrow$ $\underbrace{n_1^{p_1}n_2^{p_2}n_3^{p_3}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}\binom{p-p_1}{p_2}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et avec remise.

⋆ Etc... Ces formules se généralisent facilement.

3 Calculs de sommes et de produits

3.1 Sommes

Définition 30 Symbole Σ

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes. On pose : $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

Si $p \in [\![0, n]\!]$, on pose aussi : $\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$.

Plus généralement si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille finie de nombres complexes (ie I est fini), on pose : $\sum_{i\in I} a_i$ = somme de tous les nombres de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Dans le cas où $I=\emptyset$, on adopte la convention : $\sum_{i\in I} a_i = 0$.

Proposition 31 Règles de calcul

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de nombres complexes.

1. Factorisation. Si $\lambda \in \mathbb{C}$: $\sum_{i\in I}(\lambda \times a_i) = \lambda \times \sum_{i\in I} a_i$.
2. Linéarité. $\sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$.
3. Sommation par paquet. Si $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ alors $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i$.
4. Relation de Chasles. Si $I = [\![p, n]\!]$ et $q \in I$: $\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q-1} a_k + \sum_{k=q}^{n} a_k$.

5. Changements d'indice. L'indice de la somme est une variable muette :
$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in I} a_i = \sum_{k\in I} a_k$ ou encore $\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{j=p}^{n} a_j = \sum_{i=p}^{n} a_i$.
De plus on peut **décaler les indices**. Si on fixe $q \in Z$, et si on pose $k' = k+q$:

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k'=p+q}^{n+q} a_{k'-q}$$

D'autre part on peut aussi **inverser** l'ordre des termes de la somme, en posant $k' = n-k$:

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k'=0}^{n-p} a_{n-k}$$

3.2 Sommes usuelles à connaître

• **Sommes télescopiques.** Pour toute famille $(a_k)_{p\le k\le n+1}$ de nombres complexes :
$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$.

• **Sommes à terme général constant.** Pour tout $a \in \mathbb{C}$: $\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a =$ (nb de termes) $\times$ a.

• **Sommes arithmétiques.** On a : $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

• **Somme d'Euler.** On a : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

• **Sommes géométriques.** On a : $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\neq 1 \end{cases}$.

3.3 Formule du binôme de Newton

C'est la formule la plus importante ! Commençons par rappeler la convention suivante : si $z \in \mathbb{C}$ on pose $z^0 = 1$. En particulier $0^0 = 1$.

Théorème 32 Formule du binôme
Si a et b sont deux nombres complexes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^0$$

Exemple **:** Grâce au triangle de Pascal on calcule les $\binom{n}{k}$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

donne :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
et $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Corollaire 33 Cas particuliers à connaître
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

Exemple **:** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3 \right]$ et en déduire que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3.4 Sommes doubles

Si $(x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est un « tableau » de nombres à n lignes et p colonnes on note :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} x_{ij} = \text{ somme de tous les nombres du tableau}$$

Visualisons le tableau :

$$\begin{array}{ccc|c|cc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{ip} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{np} \end{array}$$

Nous avons encadré la ligne i et la colonne j. Notons S_i la somme partielle des nombres de la ligne i : $S_i = \sum_{j=1}^{p} x_{ij}$; et notons T_j la somme des nombres de la colonne T_j : $T_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$.
Il est clair que la somme des sommes partielles obtenues pour chaque ligne (resp. chaque colonne) donne la somme de tous les nombres du tableau. On en déduit le théorème suivant sur les sommes doubles.

Théorème 34 Théorème de Fubini
On a :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} x_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{p} T_j = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)\end{aligned}$$

et plus généralement :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i\in I\\j\in J}} x_{ij} &= \sum_{i\in I} S_i = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_{ij}\right)\\ &= \sum_{j\in J} T_j = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} x_{ij}\right)\end{aligned}$$

Dans un calcul, on peut donc permuter deux signes Σ consécutifs.

Examinons maintenant le cas plus complexe d'un tableau triangulaire $(x_{ij})_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\leq i\leq n}}$ à n lignes et n colonnes. On note :

$$\sum_{1\leq \boxed{j\leq i} \leq n} x_{ij} = \text{ somme de tous les nombres de ce tableau}$$

Visualisons le :

$$\begin{array}{ccc|c|cccc}
x_{11} & & & & & & & \\
x_{21} & x_{22} & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\
x_{j1} & x_{j2} & \dots & x_{jj} & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & & \\
\hline
x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{ii} & & \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{ni} & \dots & x_{nn}
\end{array}$$

Encore une fois, nous avons encadré la ligne i et la colonne j. Si S_i est la somme partielle des nombres de la ligne i : $S_i = \sum_{j=1}^{\boxed{i}} x_{ij}$; si T_j est la somme des nombres de la colonne j : $T_j = \sum_{i=\boxed{j}}^{n} x_{ij}$. Avec même raisonnement que ci-dessus on obtient le théorème suivant.

Théorème 35 Théorème de Fubini
On a :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq \boxed{j\leq i} \leq n} x_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\boxed{i}} x_{ij}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{p} T_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=\boxed{j}}^{n} x_{ij}\right)\end{aligned}$$

Nous allons maintenant voir une formule pour calculer le produit de deux sommes.
⚠ Malheureusement $\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\times\left(\sum_{i\in I} b_i\right) \neq \sum_{i\in I} a_i \times b_i$!
Le théorème suivant donne la bonne formule. Remarquons que le résultat est une somme double.

Théorème 36 Produit de deux sommes
Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles finies de nombres complexes, on a :

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\times\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i\times b_j\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_i\times b_j\right)$$

3.5 Généralisation des formules de dénombrement

Certaines formules de dénombrement se généralisent grâce aux symboles Σ.

Théorème 37 Principe des bergers
Si E est un ensemble fini et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie de parties de E, deux à deux disjointes, alors :

$$\#\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \# A_i$$

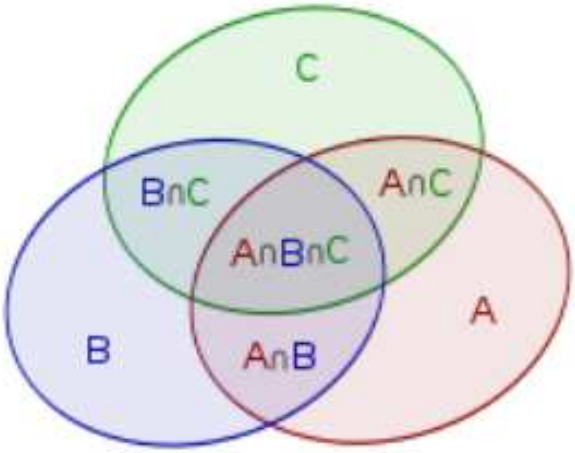
Dans le cas de parties qui ne sont pas deux à deux disjointes on a le résultat suivant.

Théorème 38 Formule du crible de Poincaré / Principe d'inclusion-exclusion
Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties d'un ensemble fini E :

$$\#\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} \#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\right)$$

Exemple **:** Pour $n = 2$ on retrouve la formule : $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.
Pour $n = 3$ on a : $\#(A \cup B \cup B) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$.
Pour $n = 4$: $\#(A \cup B \cup C \cup D) = \#A + \#B + \#C + \#D - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(A \cap D) - \#(B \cap C) - \#(B \cap D) - \#(C \cap D) + \#(A \cap B \cap C) + \#(A \cap B \cap D) + \#(A \cap C \cap D) + \#(B \cap C \cap D) - \#(A \cap B \cap C \cap D)$.
Etc... Remarquez l'alternance de signe entre les groupements de termes.

Dans ces cas particuliers, on peut retrouver les formules avec un diagramme. Par exemple dans le cas $n = 3$:



Il y a un cas particulier « simple » où l'on sait calculer la somme de droite dans la formule du crible : si $\#\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$ est une constante α_k qui ne dépend que de k (et pas du choix des valeurs de $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$. En remarquant que la somme $\sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n}$ comporte $\binom{n}{k}$ termes on obtient :

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \#\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = \text{ nombre de termes } \times \alpha_k = \binom{n}{k} \alpha_k$$

et donc :

$$\#\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \alpha_k$$

Exemple **:** On appelle **dérangement** de $[\![1, n]\!]$ toute permutation qui ne laisse fixe aucun élément, ie telle que aucun élément ne reprend sa position initiale. On note d_n le nombre de ces dérangements. Il est clair que $d_n \leq n!$. La formule du crible donne la formule exacte :

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

3.6 Produits

Définition 39 Symbole Π

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes. On pose : $\prod\limits_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$.

Plus généralement si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille finie de nombres complexes (ie I est fini), on pose : $\prod\limits_{i \in I} a_i =$ produit de tous les nombres de la famille $(a_i)_{i \in I}$.

Dans le cas où $I = \emptyset$, on adopte la convention : $\prod\limits_{i \in I} a_i = 1$.

Proposition 40 Règles de calcul
Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de nombres complexes.

1. Factorisation. Si $\lambda \in \mathbb{C}$: $\prod_{i\in I}(\lambda \times a_i) = \lambda^{\#I} \times \prod_{i\in I} a_i$.
2. $\prod_{i\in I}(a_i \times b_i) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right) \times \left(\prod_{i\in I} b_i\right)$.
3. Etc...

La seule formule à connaître est la suivante.

Proposition 41 Π et factorielle
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\prod_{k=1}^{n} k = n!$.

Les symboles Σ et Π sont liés l'un à l'autre par les fonctions ln et exp. On a en effet les formule suivantes.

Théorème 42 Liens entre Σ et Π

1. Si $a, b > 0$, on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$, et si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$.
2. Plus généralement, si $(a_i)_{i\in I}$ famille finie de nombre réels : $\exp\left(\sum_{i\in I} a_i\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{e}^{a_i}$,

   et si les $(a_i)_{i\in I}$ sont strictement positifs : $\ln\left(\prod_{i\in I} a_i\right) = \sum_{i\in I} \ln(a_i)$.

4 Exercices

Exercice 1 Combien de numéros de téléphone peut-on attribuer en France, sachant que :
• L'indicatif de région est 01, 02, 03, 04 ou 05.
• Les deux chiffres suivant doivent être distincts.
• De nouveaux numéros "internet" sont disponibles, commençant tous par 08.

Exercice 2 Un étudiant en ECS veut colorier ses notes de cours en attribuant la même couleur pour chaque matière : histoire, géographie, culture générale, mathématiques, informatique, LV1 et LV2. Il dispose de 10 couleurs différentes.

1. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
2. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte que chaque matière ait une couleur différente des autres ?
3. On choisit autant de couleurs différentes qu'il y a de matières. Combien y a t-il de coloriages possibles en utilisant seulement ces couleurs ? De sorte que chaque matière ait une couleur différente des autres ?
4. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte qu'au moins deux matières aient la même couleur ?
5. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte qu'exactement deux matières aient la même couleur ?

Exercice 3 Dans une urne, on place n boules blanches et une noire. On tire simultanément k boules.

1. Combien y-a-t-il de tirages sans boule noire.
2. Combien y-a-t-il de tirages avec au moins une boule noire ?
3. Combien y-a-t-il de tirages possibles en tout ? Quelle propriété du cours venez-vous de démontrer ?

Exercice 4 On dispose d'une urne avec 8 boules blanches, 7 boules noires et 5 boules vertes.

1. Quel est le nombre de tirages simultanés de 5 boules donnant 2 blanches, 1 noire et 2 vertes ?
2. Quel nombre de tirages successifs et sans remise de 5 boules donnant 2 blanches, 1 noire et 2 vertes ? 2 blanches, 1 noire et 2 vertes *dans cet ordre* ?
3. Mêmes questions avec des tirages successifs et avec remise de 5 boules dans l'urne.

Exercice 5 Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de parties de E formées de k éléments ?
2. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ?
3. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E ?
4. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E, tel que le premier élément est le plus petit et le dernier élément est le plus grand ?
5. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ordonnés dans l'ordre strictement croissant ?

Exercice 6

1. Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot ECS ? du mot FINANCE ? du mot ANAGRAMME ?
2. Combien y a-t-il de mots composés de 5 lettres ? de 5 lettres distinctes ? de 5 lettres distinctes dans l'ordre alphabétique ? de 5 lettres et de sorte qu'il soit un palindrome ?

Exercice 7 Soit $(n,p) \in \mathbb{N}$. On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments.

1. Calculer S_1^4, S_4^1 et S_4^4.
2. Plus généralement calculer S_1^p, S_n^1 et S_n^n.

Exercice 8 Dans une classe il y a autant de filles que de garçons. Tous les éléves étudient au moins une langue. Parmi eux : 10 étudient l'espagnol, 15 étudient l'allemand, 20 étudient l'anglais, 7 étudient l'espagnol et l'allemand, 8 étudient l'allemand et l'anglais, 9 étudient l'anglais et l'espagnol. Quel est l'effectif de la classe ?

Exercice 9 Un joueur de poker reçoit une "main" de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (sans joker). Donner le nombre total de mains différentes que le joueur peut obtenir. Quel est le nombre de mains contenant :

1. une seule paire ?	2. deux paires ?	3. un brelan ?
4. un carré ?	5. un full ?	6. une couleur ?
7. une paire de roi ?	8. au moins un coeur ?	

Exercice 10 Calculer les sommes suivantes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (éventuellement non nul) :

$$\sum_{k=1}^{n} 1, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)+\left(\sum_{j=1}^{n} j\right), \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j), \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1, \quad \prod_{k=1}^{n} k, \quad \prod_{k=0}^{n}(2k+1), \quad \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}.$$

Exercice 11 Calculer les sommes et produits suivant, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (éventuellement non nul) :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right), \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 12 Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$. Calculer la somme :

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}$$

Exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

$$1. \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i} \qquad 2. \quad \sum_{1\leq j<i\leq n} ij$$

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les sommes

$$A_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}, \quad S_n = \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}, \quad T_n = \sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}.$$

1. Calculer A_n et B_n en fonction de n.

2. En déduire S_n et T_n en fonction de n.
3. Déterminer $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$.

Exercice 15 Soit $(n,p) \in \mathbb{N}$. On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments.

1. On pose $E = [\![1,p]\!]$ et $F = [\![1,n]\!]$. On note $S(E,F)$ l'ensemble des surjections de E dans F. Donner une relation simple entre $S(E,F)$ et les ensembles
$A_k = \{f : E \longrightarrow F \ / \ k$ n'a pas d'antécédent par $f\}$, où $k \in F$.
2. En déduire, en utilisant la formule du crible de Poincaré que :

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

Exercice 16

1. On considère deux suites de nombres réels $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k$.
Montrer la relation réciproque suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k$$

2. On appelle dérangement de n éléments une permutation où les n éléments changent de place, et on note $d(n)$ le nombre de dérangements de n éléments.

   Vérifier que : $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d(n-k)$. En déduire la valeur de d_n en fonction de n.

Exercice 17 Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de couples (A,B) de parties de E tels que $A \cap B = \emptyset$? tels que $A \cup B = E$?
2. Combien y-a-t-il de triplets (A,B,C) de parties de E tels que $A \cup B \cup C = E$?

Chapitre 3

Nombres complexes

1 Propriétés des nombres complexes

1.1 Construction rapide de $\mathbb{C}$

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution. On va donc construire un ensemble $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$, et dans lequel cette équation a des solutions.

On se place dans $\mathbb{R}^2$ munit des opérations :

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_1 + b_2) \text{ et } (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

De plus on identifie $a \in \mathbb{R}$ avec $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$: $a = (a, 0)$. Alors si $i = (0, 1)$, on a $i^2 = (-1, 0) = -1$. On a donc donné une solution à l'équation $x^2 = -1$ et on peut poser :

$$\mathbb{C} = \left\{z = (a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

De plus on remarque que si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a + ib = (a, 0) + (0, 1) \times (b, 0) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$, donc :

$$\mathbb{C} = \left\{z = a + ib / (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On a $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ et on peut démontrer que les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés nombres complexes, ceux de $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ sont appelés nombres complexes purs, et ceux de $i\mathbb{R} = \left\{ib / b \in \mathbb{R}\right\}$ nombres complexes imaginaires purs.

On a les identités remarquables, pour z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$:
$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2$ et $(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2$;
$z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2) \times (z_1 - z_2)$ et $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + iz_2) \times (z_1 - iz_2)$;
$(z_1 + z_2)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$;
$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)\left(z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_2 + z_1^{n-3} z_2^2 + \cdots + z_1 z_2^{n-2} + z_2^{n-1}\right) = (z_1 - z_2) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-1-k}$.

1.2 Notions de base

Définition 1 Parties réelles et imaginaires
Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors le choix des réels a et b est unique. a est appelé partie réelle de z, notée $\mathscr{R}e(z)$, et b est appelée partie imaginaire de z, notée $\mathscr{I}m(z)$.
On a donc $\mathscr{R}e(z) \in \mathbb{R}$, $\mathscr{I}m(z) \in \mathbb{R}$ et $z = \mathscr{R}e(z) + i\,\mathscr{I}m(z)$

Proposition 2 Règles de calcul
Soient $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

1. $\mathcal{R}e(z_1+z_2) = \mathcal{R}e(z_1) + \mathcal{R}e(z_2)$ et $\mathcal{I}m(z_1+z_2) = \mathcal{I}m(z_1) + \mathcal{I}m(z_2)$
   Plus généralement : $\mathcal{R}e\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{R}e(z_k)$ et $\mathcal{I}m\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{I}m(z_k)$.
2. $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \mathcal{R}e(z_1) = \mathcal{R}e(z_2) \\ \mathcal{I}m(z_1) = \mathcal{I}m(z_2) \end{cases}$
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$: $\mathcal{R}e(\lambda \times z_1) = \lambda \times \mathcal{R}e(z_1)$ et $\mathcal{I}m(\lambda \times z_1) = \lambda \times \mathcal{I}m(z_1)$.
4. $\mathcal{R}e(z_1 z_2) = \mathcal{R}e(z_1)\mathcal{R}e(z_2) - \mathcal{I}m(z_1)\mathcal{I}m(z_2)$
   et $\mathcal{I}m(z_1 z_2) = \mathcal{R}e(z_1)\mathcal{I}m(z_2) + \mathcal{R}e(z_2)\mathcal{I}m(z_1)$.
5. $z \in \mathbb{R} \iff \mathcal{I}m(z) = 0$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \mathcal{R}e(z) = 0$.
6. Si $z \neq 0$: $\mathcal{R}e\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\mathcal{R}e(z)}{\mathcal{R}e(z)^2 + \mathcal{I}m(z)^2}$ et $\mathcal{I}m\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\mathcal{I}m(z)}{\mathcal{R}e(z)^2 + \mathcal{I}m(z)^2}$.

⚠ Par contre $\mathcal{R}e(z_1 \times z_2) \neq \mathcal{R}e(z_1) \times \mathcal{R}e(z_2)$, $\mathcal{I}m(z_1 \times z_2) \neq \mathcal{I}m(z_1) \times \mathcal{I}m(z_2)$
et si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $\mathcal{R}e(\lambda \times z) \neq \lambda \times \mathcal{R}e(z)$, $\mathcal{I}m(\lambda \times z) \neq \lambda \times \mathcal{I}m(z)$.

Définition 3 Conjugué
Si $z \in \mathbb{C}$, on définit le conjugué de z : $\overline{z} = \mathcal{R}e(z) - i\,\mathcal{I}m(z)$.
On a donc : $\mathcal{R}e(\overline{z}) = \mathcal{R}e(z)$ et $\mathcal{I}m(\overline{z}) = -\mathcal{I}m(z)$.

Proposition 4 Règles de calcul
Soient $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

1. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$.
2. $\mathcal{R}e(z_1) = \frac{1}{2}(z_1 + \overline{z_1})$ et $\mathcal{I}m(z_1) = \frac{1}{2i}(z_1 - \overline{z_1})$.
3. $z_1 \in \mathbb{R} \iff z_1 = \overline{z_1}$ et $z_1 \in i\mathbb{R} \iff z_1 = -\overline{z_1}$.
4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ et $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
   Plus généralement $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ et $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$.
   De plus : si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{\lambda z_1} = \lambda \overline{z_1}$ et si $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z_1^n} = \overline{z_1}^n$.
5. $z \times \overline{z_1} = \mathcal{R}e(z_1)^2 + \mathcal{I}m(z_1)^2 \in \mathbb{R}^+$.

Définition 5 Module
Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $|z| = \sqrt{\mathcal{R}e(z)^2 + \mathcal{I}m(z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.

Proposition 6 Règles de calcul
Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

1. Dans $\mathbb{R}$, valeur absolue et module coïncident.
2. $\left|\mathscr{I}m(z_1)\right| \leq |z_1|$ et $\left|\mathscr{R}e(z_1)\right| \leq |z_1|$.
3. $\left|\overline{z_1}\right| = |z_1| = |-z_1|$.
4. $|z_1| \geq 0$ et $|z_1| = 0 \iff z_1 = 0$.
   De plus : $z_1 = |z_1| \iff z_1 \in \mathbb{R}^+$.
5. $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ donc si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $|\lambda z_1| = \lambda |z_1|$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|z^n\right| = |z|^n$.
6. Si $z_2 \neq 0$: $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

⚠ Attention : en général $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$. Par contre il faut connaître le calcul suivant :

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \times \overline{(z_1 + z_2)} = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathscr{R}e\left(z_1\overline{z_2}\right)$$

On aussi l'encadrement suivant.

Théorème 7 Inégalité triangulaire
Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Plus généralement si $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$: $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

1.3 Rappels de trigonométrie

Proposition 8 Propriétés de symétrie

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
   $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$

Proposition 9 Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Pour retrouver ces valeurs ont peut se rappeler que :
$0=\sqrt{\frac{0}{4}}$, $\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\frac{2}{4}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\frac{3}{4}}$ et $1=\sqrt{\frac{4}{4}}$.

Proposition 10 Formules de bases

1. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$
2. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$ et $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x)$
3. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$ et $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$
   $\sin(\pi-x)=\sin(x)$ et $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$
4. $\sin(x)=0 \iff x=0\ [\pi] \iff \exists k\in\mathbb{Z}/\ x=k\pi$
   $\cos(x)=0 \iff x=\frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

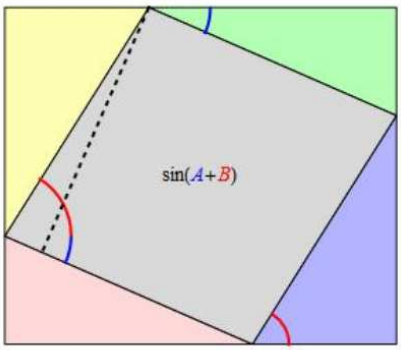
Toutes ces formules se retrouvent aisément à l'aide du cercle trigonométrique !

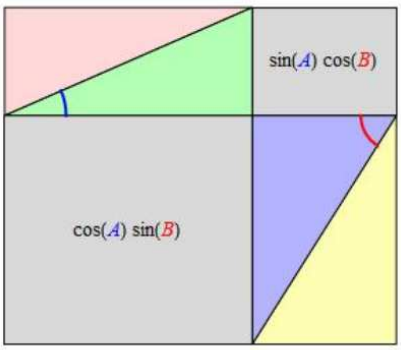
Proposition 11 Formules fondamentales

1. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos(a+b)=\cos(a)\times\cos(b)-\sin(a)\times\sin(b)$
   $\cos(a-b)=\cos(a)\times\cos(b)+\sin(a)\times\sin(b)$
   $\sin(a+b)=\sin(a)\times\cos(b)+\sin(b)\times\cos(a)$
   $\sin(a-b)=\sin(a)\times\cos(b)-\sin(b)\times\cos(a)$
2. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1=1-2\sin^2(x)$
   $\sin(2x)=2\sin(x)\times\cos(x)$
   donc $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$ et $\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$

Ces formules se retrouvent à l'aide de l'exponentielle complexe.

Elles se démontrent géométriquement. Par exemple la formule d'addition pour le sinus se démontre à l'aide des figures suivantes, où les triangles sont tous d'hypothénuse de longueur égale à 1.





Proposition 12 Formules de transformation

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,
$$\cos(a)\times\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\Big)$$
$$\sin(a)\times\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big)$$
$$\sin(a)\times\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big)$$
2. $\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$,
$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p)-\sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

On passe de 1. à 2. à l'aide des formules $\left\{\begin{array}{l} p = a+b \\ q = a-b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{array}\right.$.

Proposition 13 Fonctions tangentes et cotangentes

1. $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \Big/ k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{x\in\mathbb{R} \Big/ x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\}$

   $\mathscr{D}_{\text{cotan}} = \mathbb{R}\backslash\left\{k\pi \Big/ k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{x\in\mathbb{R} \Big/ x\neq 0\ [\pi]\right\}$
2. $\forall x\in\mathscr{D}_{\tan}$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $\forall x\in\mathscr{D}_{\text{cotan}}$, $\text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

   si $x\neq 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$, $\text{cotan}(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} = -\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
3.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

4. $\forall x\in\mathbb{R}, \forall k\in\mathbb{Z}$, $\tan(x+k\pi) = \tan(x)$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$
5. Si $a,b,a+b\in\mathscr{D}_{\tan}$: $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\times\tan(b)}$;

   si $a,b,a-b\in\mathscr{D}_{\tan}$: $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\times\tan(b)}$;

   si $a,2a\in\mathscr{D}_{\tan}$: $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$
6. Si $\theta\neq\pi\ [2\pi]$ et si $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a les formules de l'angle moitié :
$$\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad\text{et}\quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}$$

1.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition 14 Argument
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{i}, \vec{j})$. On appelle argument de z tout mesure (définie modulo 2π) de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ où M est le point d'affixe z (ie de coordonnées $(\mathscr{R}e(z), \mathscr{I}m(z))$). On le note $\text{Arg}(z)$.

Définition 15 Exponentielle complexe
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
On définit ainsi la fonction exponentielle sur $i\mathbb{R}$.

On a donc par définition $\mathscr{R}e\left(e^{i\theta}\right) = \cos(\theta)$ et $\text{Im}\left(e^{i\theta}\right) = \sin(\theta)$.

Définition 16 Forme trigonométrique
Si $z \in \mathbb{C}^*$, on a $z = |z| \times \Big(\cos(\text{Arg}(z)) + i\sin(\text{Arg}(z))\Big) = |z|e^{i\text{Arg}(z)}$.
On dit qu'on a mis le nombre complexe z sous forme trigonométrique.

On a donc : $\mathscr{R}e(z) = |z|\cos(\text{Arg}(z))$ et $\text{Im}(z) = |z|\sin(\text{Arg}(z))$.

Proposition 17 Règles de calcul pour l'argument
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

1. Forme trigonométrique $\longrightarrow$ Forme algébrique.
   $z_1 = \underbrace{|z_1| \times \cos(\text{Arg}(z_1))}_{=\mathscr{R}e(z_1)} + i \times \underbrace{|z_1| \times \sin(\text{Arg}(z_1))}_{=\mathscr{I}m(z_1)}$
2. Forme trigonométrique $\longrightarrow$ Forme algébrique.
   $\cos(\text{Arg}(z_1)) = \dfrac{\mathscr{R}e(z_1)}{|z_1|}$ et $\sin(\text{Arg}(z_1)) = \frac{\mathscr{I}m(z_1)}{|z_1|}$
3. $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2)\ [2\pi] \end{cases}$
4. $\text{Arg}\left(\overline{z_1}\right) = -\text{Arg}(z_1)\ [2\pi]$
5. $\text{Arg}(z_1 \times z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)\ [2\pi]$
6. $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)\ [2\pi]$
7. $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \text{Arg}(z^n) = n \times \text{Arg}(z)\ [2\pi]$

Proposition 18 Règles de calcul pour l'exponentielle complexe
Si $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

1. $e^{i\theta_1} \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^{i\theta_1}} = e^{-i\theta_1} = \overline{e^{i\theta_1}} = \cos(\theta_1) - i \times \sin(\theta_1)$
2. $\left|e^{i\theta_1}\right| = 1$ et $\operatorname{Arg}\left(e^{i\theta_1}\right) = \theta_1\ [2\pi]$
3. $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$ et $e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad e^{in\theta_1} = \left(e^{i\theta_1}\right)^n$
5. $x \longmapsto e^{ix}$ est 2π-périodique
   donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, e^{i(x+2k\pi)} = e^{ix}$
6. $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Longleftrightarrow \theta_1 = \theta_2\ [2\pi]$
   et en particulier : $e^{i\theta_1} = 1 \Longleftrightarrow \theta_1 = 0\ [2\pi]$
7. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$. Alors l'application :
   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$
   est non injective, mais est surjective.
8. Formules d'Euler.
   $\cos(\theta_1) = \dfrac{e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}}{2}$ et $\sin(\theta_1) = \dfrac{e^{i\theta_1} - e^{-i\theta_1}}{2i}$
9. Formule de De Moivre.
   $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left(\cos(\theta) + i \times \sin(\theta)\right)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \times \sin(n\theta)$
10. Factorisation de l'angle moyen.
    $e^{ix} + e^{iy} = 2e^{i\frac{x+y}{2}} \times \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ et $e^{ix} - e^{iy} = 2ie^{i\frac{x+y}{2}} \times \sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

Exemple **:** Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, simplifier $\cos(x + n\pi)$ et $\sin(x + n\pi)$.

1.5 Applications des formules de De Moivre et d'Euler

Les formules de De Moivre et du binôme de Newton donnent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)\, i^k \sin^k(\theta)$$

d'où en séparant parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \sum_{0 \leq 2p \leq n} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) \sin^{2p}(\theta) \\ &= \cos^n(\theta) - \binom{n}{2} \cos^{n-2}(\theta) \sin^2(\theta) + \binom{n}{4} \cos^{n-4}(\theta) \sin^4(\theta) - \dots \\ \sin(n\theta) &= \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} (-1)^p \binom{n}{2p+1} \cos^{n-2p-1}(\theta) \sin^{2p+1}(\theta) \\ &= \binom{n}{1} \cos^{n-1}(\theta) \sin(\theta) - \binom{n}{3} \cos^{n-3}(\theta) \sin^3(\theta) + \dots \end{aligned}$$

Exemple **:** $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1, \quad \cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - \cos(\theta) \quad$ Etc...

Inversement on peut « linéariser » des expressions polynômiales en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. En effet partant de $\cos(\theta_1) = \dfrac{e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}}{2}$ et $\sin(\theta_1) = \dfrac{e^{i\theta_1} - e^{-i\theta_1}}{2i}$, on peut développer $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$ grâce à la formule du binôme de Newton, et obtenir des expressions en $\cos(p\theta)$ et $\sin(p\theta)$.

Ces calculs sont à la base de la définition des polynômes de Tchebychev.

Exemple **:** Linéarisation de $\sin^3(x) \times \cos^2(x)$:

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) \times \cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \times \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2^5 i}\left(e^{i5x} - e^{i3x} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} + e^{-i3x} - e^{-i5x}\right) \\
&= -\frac{1}{2^4}\left(\sin(5x) - \sin(3x) - 2\sin(x)\right)
\end{aligned}$$

Ce genre de calcul prendra toute son importance en calcul intégral.

2 Équations polynômiales complexes

2.1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Rappel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Elle admet donc une bijection réciproque de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ notée $x \longmapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.
Ainsi si $x \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$: $x^n = a \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$.

Exemple **:** $\sqrt[3]{8} = 2$.

2.1.1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va résoudre l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont $z = 1$ si n impair, et $z = \pm 1$ si n pair.

Dans $\mathbb{C}$, on a le résultat suivant.

Théorème 19 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité
L'équation $z^n = 1$ a exactement n solutions : $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ces nombres complexes sont appelés racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. On note U_n l'ensemble de ces nombres.
On pose $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Ce complexe est appelé racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont alors : $U_n = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\}$.

Démonstration : Comme 0 n'est pas solution, on peut supposer $z \neq 0$ et utiliser la forme trigonométrique de z : $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ (détermination principale de $\text{Arg}(z)$).

Alors :

$$\begin{aligned}
z^n = 1 &\iff \left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = 1 \\
&\iff r^n \mathrm{e}^{in\theta} = 1 = \mathrm{e}^{i0} \\
&\overset{r>0}{\iff} \begin{cases} r^n = 1 & \text{même module} \\ n\theta = 0\ [2\pi] & \text{même argument} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0\ \left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}
\end{aligned}$$

Mais on cherche $\theta \in [0, 2\pi[$. Il faut donc prendre $k \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq \dfrac{2k\pi}{n} < 2\pi$, ie $k \in [\![0, n-1]\!]$.

On a donc : $z^n = 1 \iff \exists k \in [\![0, n-1 / , z = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} / k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

À priori on a donc au plus n solutions. Mais si $(k, k') \in [\![0, n-1]\!]^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{i\frac{2k'\pi}{n}} &\iff \frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n}\ [2\pi] \\
&\iff \exists p \in \mathbb{Z} / k = k' + pn
\end{aligned}$$

or $-(n-1) \leq k - k' \leq n-1$ donne $p = 0$. Ainsi $k = k'$.

On vient de prouver que l'équation a exactement n solutions.

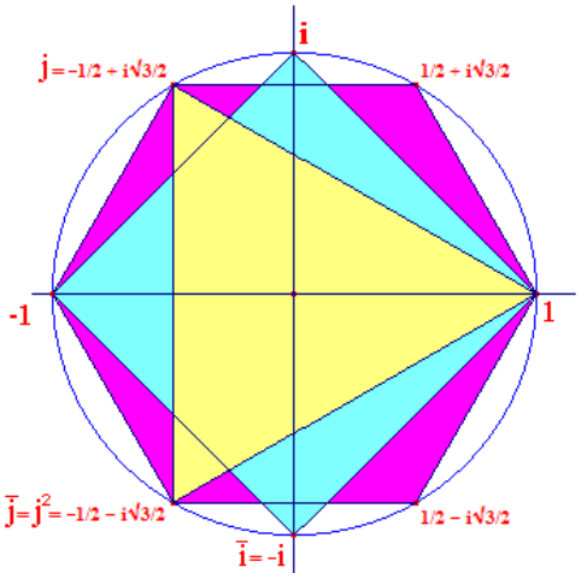
CQFD □

Exemple **:** Pour $n = 1$, $U_1 = \{1\}$ et $\omega_1 = 1$; pour $n = 2$, $U_2 = \{-1, 1\}$ et $\omega_2 = -1$.
Pour $n = 3$, $U_3 = \{1, j, \overline{j}\}$ avec $j = \omega_3 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Pour $n = 4$, $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$ et $\omega_4 = i$.

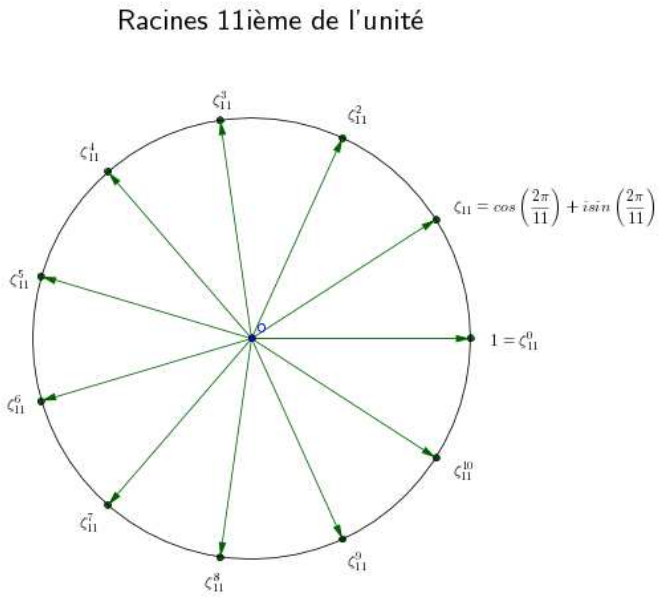
Exemple **:** Si $n \geq 2$, la somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est égale à 0.

Proposition 20 Interprétation géométrique
Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité forment les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

La figure suivante représente les racines cubiques, 4-ièmes et 6-ièmes de l'unité :



Et celle-ci les racines 11-ièmes de l'unité :



2.1.2 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. On va résoudre l'équation $z^n = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Si $a = 0$, on a une unique solution : $z = 0$.

Si $a \neq 0$, on a le résultat suivant.

Théorème 21 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe
Pour tout nombre complexe $a = \rho e^{i\alpha}$ non nul, l'équation $z^n = a$ admet exactement n solutions appelées racines $n^{\text{ièmes}}$ de a. Elles sont de la forme $\sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i}{n}(\alpha+2k\pi)} = z_0 \omega_n^k$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, où $z_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\alpha}{n}}$ est la racine « évidente » de $z^n = a$.

Démonstration : On met a sous forme trigonométrique : $a = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$.

On remarque que l'équation $z^n = a$ a une racine « évidente » : $z_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\alpha}{n}}$. Alors :

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff z^n = z_0^n \\ &\iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \\ &\iff \frac{z}{z_0} \text{ est une racine } n^{\text{ième}} \text{ de l'unité} \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \,/\, \frac{z}{z_0} = \omega_n^k \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \,/\, z = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i}{n}(\alpha + 2k\pi)} \end{aligned}$$

On obtient donc au plus n solutions. Comme précédemment, on peut facilement vérifier qu'il y en a exactement n. On a donc exactement n solutions.

CQFD □

Exemple **:** Les racines $4^{\text{ièmes}}$ de $1 - i$ sont : $2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{\pi}{16}}$, $-2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{\pi}{16}}$, $2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{7\pi}{16}}$ et $2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{9\pi}{16}}$.

2.2 Équations du second degré à coefficients réels

On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z : $az^2 + bz + c = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$.

⚠ Le cas a, b, c complexes n'est pas au programme.

Pour cela on introduit le **discriminant** de l'équation : $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$.

Théorème 22 Résolution des équations du second degré à coefficients réels

1. Si $\Delta = 0$, (E) a une unique solution réelle $z = -\dfrac{b}{2a}$.
2. Si $\Delta > 0$, (E) a deux solutions réelles distinctes : $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, (E) a deux solutions complexes pures conjuguées : $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Théorème 23 Théorème de Viet

On note z_1 et z_2 les solutions de (E) ($z_1 = z_2$ si $\Delta = 0$).

1. On a :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a \times (z - z_1) \times (z - z_2)$$
et donc : $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$
2. Réciproquement si x et y sont solutions du système $\begin{cases} x + y = s \\ x \times y = p \end{cases}$ alors x et y sont les racines de l'équation : $z^2 - sz + p = 0$.

Exemple **:** Résoudre $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=2 \end{cases}$

Corollaire 24 Signe d'un trinôme du second degré à coefficients réels
Si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.

1. Si $\Delta > 0$ alors ax^2+bx+c est « du signe de a en dehors des racines ».
   Plus précisément, si x_1 et x_2 sont les deux racines réelles de l'équation $ax^2+bx+c=0$, avec $x_1 < x_2$, alors pour $a > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de ax^2+bx+c		$+$	0	$-$	0	$+$	

   et pour $a < 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de ax^2+bx+c		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. Si $\Delta \leq 0$ alors ax^2+bx+c est du signe de a sur $\mathbb{R}$ (donc de signe constant).
   Si $\Delta < 0$ alors ax^2+bx+c est du signe de a sur $\mathbb{R}$, **au sens strict**.
   Si $\Delta = 0$ alors ax^2+bx+c s'annule en un unique réel x_0, et est du signe de a sur $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ **au sens strict**.

3 Exercices

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations trigonométriques suivantes :
$2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$; $\sin x \leq -\frac{1}{2}$; $\cos(2x)\geq 0$; $\tan x \leq 1$; $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>-1$;
$2\cos^2 x+3\cos x+1=0$; $\sin^2 x+3\cos x-1<0$; $\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)=1$;
$\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 2 Déterminer les nombres complexes z tels que

$$|z|=|z-6+5i|,\quad |\overline{z}+i|=2,\quad z(2\overline{z}+1)=1,\quad |z^2|=|z|,$$
$$\tfrac{z+4i}{5z-3}\in\mathbb{R},\quad \mathscr{R}e\left(\tfrac{z-1}{z+1}\right)=0\quad\text{et}\quad \operatorname{Arg}\left(\tfrac{z+i}{z-i}\right)=-\tfrac{\pi}{4}\ [\pi].$$

Exercice 3 Soit $\theta\in[0,2\pi]$. Déterminer module et argument de $1+e^{i\theta}$, $1-e^{i\theta}$ et $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$. Faire de même avec : $(1+i)^3$. Donner la forme algébrique de $\frac{1-4i}{1+5i}$.

Exercice 4 (Identité du parallélogramme) Montrer que :

$$\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2,\quad |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right).$$

Interpréter géométriquement.

Exercice 5 Soient $(n,p)\in\mathbb{N}$ tel que $p\leq n$. Calculer $\sum\limits_{k=p}^{n} k$ puis $\sum\limits_{k=p}^{n} z^k$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos\theta_1=\cos\theta_2$, $\sin\theta_1=\sin\theta_2$, $\tan\theta_1=\tan\theta_2$.

Exercice 7 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre dans $]0,\pi[$ l'équation : $\cos(n\theta)=0$. Donner le nombre exact de solutions.

Exercice 8 Linéariser les expressions :
$\cos^6 x$; $\cos^2 x\sin^4 x$; $\sin^5 x$; $\cos^3(2x)\sin^3 x$; $\cos(2x)\cos^3 x$.

Exercice 9 Calculer les sommes : $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n}\sin(kx)$ pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 10 Calculer la somme pour tout entier $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}sin(kb+a),$$

où a et b sont deux réels donnés.

Exercice 11 Calculer $\cos(5\alpha)$ et $\sin(5\alpha)$ en fonction respectivement de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{10}$.

Exercice 12 Simplifier les expressions $(1+j)^5$, $\frac{1}{(1+j)^4}$, $(1+j)^n$ et $\left(1+j^2\right)^n$ $(n\in\mathbb{N})$.

Exercice 13 Résoudre les équations suivantes : $z^4-i=0$ et $z^3=-(2+i)^3$.

Exercice 14

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(S)\begin{cases} x+y &= 2\\ xy &= -1\end{cases}$.

2. On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $u = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $v = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$. Calculer $u+v$, uv et en déduire la valeur de u et v.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z+1)^n = i(1-z)^n$.

Exercice 16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Calculer : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$.

Exercice 17 On note $E = \{z \in \mathbb{C} / \mathscr{I}m(z) > 0\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

1. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \in E \Rightarrow \frac{z-i}{z+i} \in F$.
2. On définit alors l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$$

   Établir que f est bijective de E sur F. Déterminer l'application f^{-1}.
3. On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct.
   (a) On note $E_1 = \{z \in E; \mathscr{R}e(z) = 0\}$. Déterminer l'ensemble $f(E_1)$ et le représenter graphiquement.
   (b) On note $E_2 = \{z \in E; |z| = 1\}$. Déterminer l'ensemble $f(E_2)$ et le représenter graphiquement .

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. On identifie $z \in \mathbb{C}$ et le point M_z d'affixe z.
1. Quels sont les points z invariants par f ?
2. Quelle est l'image par f du cercle trigonométrique T ?
3. Quelle est l'image réciproque par f de la droite réelle ?

Exercice 19 Il s'agit de montrer que, pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\forall (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \quad \left(\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff \text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \right)$$

1. Montrer que :

$$\text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \implies \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

2. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\forall (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

3. Vérifier que, pour z_1 et z_2 non nuls :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_1| \implies z_1 \text{ et } z_2 \text{ ont le même argument}$$

4. En déduire par récurrence que, pour $n \geqslant 2$:

$$\forall (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \quad \left(\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \implies \text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \right)$$

Chapitre 4

Suites réelles

1 Propriétés générales de suites réelles

1.1 Rappels sur les propriétés de $\mathbb{R}$

1.1.1 Relation d'ordre

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $x < y$ lorsque $x \leq y$ et $x \neq y$. On a donc : $x < y \Longrightarrow x \leq y$.

Exemple **:** $2 < 3$ donc $2 \leq 3$.

Proposition 1 Règles de calcul
Soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

1. Pour l'addition.
   - $x_1 \leq y_1 \Longrightarrow \forall z \in \mathbb{R},\ x_1 + z \leq y_1 + z$
   - $\left.\begin{array}{l} x_1 \leq y_1 \\ x_2 \leq y_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$
   - $x_1 \leq y_1 \Longleftrightarrow -y_1 \leq -x_1$
2. Pour la multiplication.
   - $x_1 \leq y_1 \Longrightarrow \forall z \geq 0,\ x \times z \leq y \times z$
   - $\left.\begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq y_1 \\ 0 \leq x_2 \leq y_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \leq x_1 \times x_2 \leq y_1 \times y_2$
   - $0 < x_1 \leq y_1 \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{1}{y_1} \leq \dfrac{1}{x_1}$

⚠ Attention : on ne peut pas **soustraire** ou **diviser** deux inégalités !

1.1.2 Valeur absolue

Définition 2 Valeur absolue
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $|x| = \max(x, -x) = \left\{\begin{array}{l} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$.

Proposition 3 Règles de calcul
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $-|x| \leq x \leq |x|$.
2. Si $\alpha \geq 0$: $|x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$.
3. $|-x| = |x|$.
4. $|x \times y| = |x| \times |y|$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \left|x^n\right| = |x|^n$.
5. Inégalité triangulaire.

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

avec égalité à droite si et seulement si x et y de même signe.

Plus généralement si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, on a : $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

1.1.3 Intervalles

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / \ a \leq x \leq b\}$ intervalle fermé borné = segment ;

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} / \ a \leq x < b\}$ intervalle borné ;

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / \ a < x \leq b\}$ intervalle borné ;

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / \ a < x < b\}$ intervalle ouvert borné ;

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / \ a \leq x\}$ intervalle fermé ;

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / \ a < x\}$ intervalle ouvert ;

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / \ x \leq b\}$ intervalle fermé ;

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} / \ x < b\}$ intervalle ouvert ;

$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ intervalle ouvert <u>et</u> fermé ;

Théorème 4 Caractérisation des intervalles
Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Alors :

$$I \text{ est un intervalle} \iff \forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \implies [x, y] \subseteq I$$

Définition 5 Intérieur et extérieur d'un intervalle
Soit I un intervalle. On pose :
– $\mathring{I} = I$ privé de ses bornes = intérieur de I. C'est un intervalle ouvert.
– $\overline{I} = I$ union ses bornes = adhérence de I. C'est un intervalle fermé.

On a bien évidemment $\overset{\circ}{I} \subseteq I \subseteq \overline{I}$. ⚠ Attention : ne pas confondre la notation de l'adhérence avec celle du complémentaire ...

1.1.4 Partie entière

Définition 6 Partie entière
Si $x \in \mathbb{R}$, on admet qu'il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On le note $n = \lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$, et on l'appelle la partie entière de x.
Elle est donc caractérisée par : $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
On a aussi : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

Exercice 1 Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

1.2 Les suites réelles

Définition 7 Suite réelle
Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.
L'ensemble des suites réelles est donc $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ou encore $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

<u>Notations</u> : pour $n \in \mathbb{N}$, le réel $u(n)$ est noté u_n.
La suite u est alors notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou (u_n), ou encore $(u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ (comme une famille de réels indexée par $\mathbb{N}$).
⚠ Attention : il ne faut pas confondre le réel u_n et la suite (u_n).

On peut aussi définir les suites complexes $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ mais leur étude n'est pas au programme.

Définition 8 Opérations sur les suites
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Addition. $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$.
2. Multiplication par un réel. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \times (u_n) = (\lambda \times u_n)$.
3. Multiplication. $(u_n) \times (v_n) = (u_n \times v_n)$.

Proposition 9 Règles de calcul
Les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Définition 10 Suite définie à partir d'un certain rang
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$. On appelle suite réelle définie à partir du rang n_0 toute application $u : [\![n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. Cette suite est notée $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Exemple : $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Définition 11 Propriété vraie à partir d'un certain rang
Soit $P(n)$ un prédicat qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. On dit que $P(n)$ est vraie à partir d'un certain rang (a.p.c.r.) lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

1.3 Propriétés des suites réelles

Définition 12 Suites majorée, minorées, bornées

1. On dit que (u_n) est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
2. On dit que (u_n) est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
3. On dit que (u_n) est bornée lorsqu'il existe deux réels m et M tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$.

Ces notions peuvent être définies à partir d'un certain rang.

Théorème 13 On a :

$$(u_n) \text{ bornée} \iff \left(|u_n|\right) \text{ majorée}$$

Définition 14 Suites monotones

1. On dit que la suite (u_n) est croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
2. On dit que la suite (u_n) est décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.
3. On dit que la suite (u_n) est stationnaire lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$.
   Ceci équivaut à ce qu'elle soit à la fois croissante et décroissante.
4. On dit que la suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Ces notions peuvent être définies à partir d'un certain rang.
⚠ Attention : en général une suite n'est pas monotone, c'est-à-dire ni croissante et ni décroissante (on verra un exemple plus loin).

Définition 15 Suites strictement monotones

1. On dit que la suite (u_n) est strictement croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.
2. On dit que la suite (u_n) est strictement décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$.
3. On dit que la suite (u_n) est strictement monotone lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Ces notions peuvent être définies à partir d'un certain rang. Pour les suites on ne s'intéresse généralement pas à la monotonie stricte, mais seulement à la monotonie au sens large.

Rédaction :

1. On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$. S'il ne dépend pas de n à partir d'un rang n_0 alors (u_n) est monotone a.p.c.r..
   Plus précisément si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ; si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour $n \geq n_0$, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.
2. Si $u_n > 0$ a.p.c.r. alors on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :
   – si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ;
   – si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.
3. Si $u_n < 0$ a.p.c.r. alors on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :
   – si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 ;
   – si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0.

Exemple **:** Étudier la monotonie de $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 Limite d'une suite

2.1 Suites convergentes - Suites divergentes

Définition 16 Suite convergente
On dit que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} /\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Dans cette définition on peut remplacer $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ par $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
De plus $|u_n - \ell| \leq \varepsilon \iff u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$: donc a.p.c.r. u_n est « aussi proche que l'on veut » de ℓ.
Remarquez que le n_0 qui apparaît dans la définition dépend de ε. Parfois on le note $n_0(\varepsilon)$ pour ne pas perdre de vue cette dépendance.

Exemple **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

⚠ Attention : la limite ne doit pas dépendre de n. Par exemple on ne peut pas dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{n}$, cela n'a aucun sens !

Théorème 17 Unicité de la limite
Si une suite converge, alors sa limite est unique.

Définition 18 Suite divergente
Lorsqu'une suite n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Définition 19 Limite infinie

1. On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} /\ \forall n \geq n_0,\ u_n \geq A$$

   On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} /\ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq A$$

   On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Dans cette définition on peut remplacer $u_n \geq A$ (resp. $u_n \leq A$) par $u_n > A$ (resp. $u_n < A$). Remarquez que le n_0 qui apparaît dans la définition dépend de A. Parfois on le note $n_0(A)$ pour ne pas perdre de vue cette dépendance.

Exemple **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Proposition 20 Lien entre convergence et divergence
Une suite qui diverge vers $\pm\infty$ ne converge pas.

Définition 21 Divergence de première ou seconde espèce
Une suite qui diverge vers $\pm\infty$ est dite divergente de première espèce.
Une suite qui n'a pas de limite est dite divergente de seconde espèce.

⚠ Attention : la plupart des suites sont divergentes de seconde espèce.

Exemple **:** La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente de seconde espèce (nous en verrons la preuve plus tard).

Théorème 22 Premiers termes et nature d'une suite
En modifiant un nombre fini de termes d'une suite (u_n), on ne change pas sa nature (ie le fait qu'elle soit convergente ou divergente de première ou seconde espèce). Dans le cas où la suite est convergente, on ne modifie pas non plus la valeur de sa limite.

2.2 Propriétés des suites convergentes

Lemme 23 Une suite bornée a.p.c.r. est bornée à partir du rang 0.

Théorème 24 Convergence et bornitude
Une suite convergente est bornée.

⚠ ATTENTION ! La réciproque est fausse : une suite bornée n'est en général pas convergente, comme le montre l'exemple de la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Par contre, on verra qu'une suite **monotone et bornée** converge.

Théorème 25 Limite et signe
Si une suite (u_n) converge vers un réel $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$), alors $u_n > 0$ a.p.c.r. (resp. $u_n < 0$ a.p.c.r.).

Proposition 26 Quelques résultats techniques

1. (u_n) converge vers $\ell \iff (u_n - \ell)$ converge vers 0 ;
2. (u_n) converge vers $0 \iff \left(|u_n|\right)$ converge vers 0
   donc (u_n) converge vers $\ell \iff \left(|u_n - \ell|\right)$ converge vers 0

Théorème 27 Passage à la limite dans une inégalité
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ a.p.c.r.. On suppose que (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers L.
Alors $\ell \leq L$.

⚠ Attention : $\forall n \geq n_0$, $u_n < v_n$ ne donne pas $\lim u_n < \lim v_n$.
Contre-exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{2}{n}$.

Corollaire 28 Localisation de la limite
Si (u_n) est à valeurs dans un intervalle I d'extrémités a et b a.p.c.r., et si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell \in \overline{I} = [a, b]$.

2.3 L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$

On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$.

On dit que $\lim u_n$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque (u_n) a une limite (finie ou infinie), ie lorsque (u_n) est convergente ou divergente de première espèce.

Définition 29 Règles de calcul

1. $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$
   ⚠ $(-\infty) + (+\infty)$ n'est pas défini ;
   $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$ et donc $\dfrac{0}{\pm\infty} = 0$
   ⚠ $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ n'est pas défini.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\pm\infty}{x} = \pm\infty$
   ⚠ $\dfrac{\pm\infty}{0}$ n'est pas défini ;
   $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^*$, $\dfrac{x}{0^+} = \begin{cases} +\infty \text{ si } x > 0 \\ -\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^*$, $\dfrac{x}{0^-} = \begin{cases} -\infty \text{ si } x > 0 \\ +\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   ⚠ $\dfrac{0}{0^\pm}$ et $\dfrac{0}{0}$ ne sont pas définis.
4. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^*$, $x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty \text{ si } x > 0 \\ -\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^*$, $x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty \text{ si } x > 0 \\ +\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   ⚠ $0 \times \pm\infty$ n'est pas défini.

2.4 Théorèmes généraux sur les limites

Dans le théorème suivant, on utilise les propriétés de $\overline{R}$ définie précédemment.

Théorème 30 Limites et opérations algébriques

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim u_n \overset{\text{existe}}{=} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lim v_n \overset{\text{existe}}{=} L \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Valeur absolue. $\lim |u_n| \overset{\text{existe}}{=} |\ell|$
2. Addition. $\lim(u_n + v_n) \overset{\text{existe}}{=} \ell + L$, ⚠ sauf la forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$.
3. Multiplication par un réel. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim \alpha \times u_n = \alpha \times \lim u_n$,
   ⚠ sauf la forme indéterminée $0 \times \pm\infty$.
4. Multiplication. $\lim(u_n \times v_n) = \ell \times L$, ⚠ sauf la forme indéterminée $0 \times \pm\infty$.
5. Quotient. Si $L \neq 0$, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie a.p.c.r. et $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell}{L}$
   ⚠ sauf les formes indéterminées $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{0}{0^{\pm}}$ et $\dfrac{\infty}{0}$.

⚠ ATTENTION : en général $\lim(u_n - v_n) = 0$ ne donne pas $\lim u_n = \lim v_n$ … Il faut en effet que $\lim u_n$ et $\lim v_n$ existent !

⚠ ATTENTION : ce théorème ne dit pas que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$. Par exemple, on verra que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \mathrm{e} \neq 1$.

Théorème 31 Théorème d'existence de la limite par encadrement

1. Version limite finie.
   Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ a.p.c.r., et (u_n) et (w_n) convergent vers la limite ℓ.
   Alors (v_n) converge vers ℓ.
2. Version limite infinie.
   Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ a.p.c.r., et (u_n) et (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. (v_n) diverge vers $-\infty$).
   Alors (v_n) diverge vers $+\infty$ (resp. (u_n) diverge vers $-\infty$).

⚠ Attention : ne pas confondre avec le théorème de passage à la limite dans une inégalité. Dans le théorème d'existence de la limite par encadrement on montre l'existence de la limite de (v_n), alors que dans l'autre théorème c'est une des hypothèses de départ.

Exemple **:** On peut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ ou que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}} = 0$.

Corollaire 32 Preuve d'une convergence par encadrement

Si on a deux suites réelles (u_n) et (α_n) telles que $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$ a.p.c.r., et $\lim \alpha_n = 0$ alors $\lim u_n \overset{\text{existe}}{=} \ell$.

Théorème 33 Composition d'une suite par une fonction
Soit (u_n) une suite réelle de limite $\boxed{\ell} \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to \boxed{\ell}} f(x) \overset{\text{existe}}{=} \boxed{a} \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) \overset{\text{existe}}{=} \boxed{a}$.

Exemple **:** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x)$ n'existe pas.

2.5 Suites d'indices pairs et impairs

Définition 34 Suite extraite
Soit (u_n) une suite réelle. On appelle suite extraite de (u_n) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ application strictement croissante.

Exemple **:** (u_{n-1}), (u_{n+1}), (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n). Mais $(u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ et $(u_{\lfloor 1-\cos(n) \rfloor})$ n'en sont pas.

Théorème 35 Limite des suites extraites
Si $\lim u_n \overset{\text{existe}}{=} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $\lim u_{\varphi(n)} \overset{\text{existe}}{=} \ell$.

On a une réciproque dans le cas de suites extraites recouvrantes, ie que l'union des suites extraites redonnent toute la suite de départ. Le seul cas au programme est celui des suites extraites d'indices pairs et impairs.

Théorème 36 Théorème des suites extraites recouvrantes
Si (u_n) est une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \ell \ \boxed{et} \ \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \ell$$

On peut aussi montrer aisément (par simple décalage d'indice) que : $\lim u_n = \ell \Longleftrightarrow \lim u_{n-1} = \ell \Longleftrightarrow \lim u_{n+1} = \ell$.

Exemple **:** Montrer que la suite $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente de seconde espèce (ie n'a pas de limite).

2.6 Bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$

Définition 37 Partie majorée, minorée, bornée
On se donne une partie A de $\mathbb{R}$, non vide.

1. Un réel M est un majorant de A lorsque : $\forall x \in A,\ x \leq M$.
   Si A admet au moins un majorant, on dit que A est une partie majorée.
2. Un réel m est un minorant de A lorsque : $\forall x \in A,\ m \leq x$.
   Si A admet au moins un minorant, on dit que A est une partie minorée.
3. On dit que A est bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in A,\ m \leq x \leq M$.

Il est clair qu'un partie majorée (resp. minorée) admet une infinité de majorants (resp. de minorants).

Proposition 38 Partie bornée et valeur absolue
Si A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide : A est bornée $\Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} /\ \forall x \in A,\ |x| \leq M$.

On peut reformuler ce résultat ainsi : A est bornée si et seulement si $|A|$ est majorée.

Définition 39 Maximum et minimum
Soit A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide.

1. Un réel b est un maximum de A lorsque $b \in A$ $\boxed{\text{et}}$ b est un majorant de A : $\forall x \in A$, $x \leq b$. S'il existe, le maximum est unique et est noté : $b = \max A$. On l'appelle aussi le plus grand élément de A.
2. Un réel a est un minimum de A lorsque $a \in A$ $\boxed{\text{et}}$ b est un minorant de A : $\forall x \in A$, $a \leq x$. S'il existe, le minimum est unique et est noté : $a = \min A$.On l'appelle aussi le plus petit élément de A.

Définition 40 Bornes supérieure et inférieure
Soit A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide.

1. Si l'ensemble des majorants de A, noté $\mathscr{E}_A = \{M \in \mathbb{R} /\ \forall x \in A,\ x \leq M\}$, est non vide et admet un plus petit élément b, alors b est appelé borne supérieure de A, notée $\sup A$. $\sup A$ est donc le plus petit majorant de A, et en particulier A est majorée par $\sup A$: $\forall x \in A,\ x \leq \sup A$.
2. Si l'ensemble des minorants de A, noté $\mathscr{F}_A = \{m \in \mathbb{R} /\ \forall x \in A,\ m \leq x\}$, est non vide et admet un plus grand élément a, alors a est appelé borne inférieure de A, notée $\inf A$. $\inf A$ est donc le plus grand minorant de A, et en particulier A est minorée par $\inf A$: $\forall x \in A,\ \inf A \leq x$.

Proposition 41 Lien entre maximum et borne supérieure

1. Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$.
2. Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et si A admet un minimum, alors A admet une borne inférieure et $\inf A = \min A$.

⚠ Attention : par contre une partie A peut avoir une borne supérieure sans avoir de maximum !

Théorème 42 Caractérisation de la borne supérieure
Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Soit $b \in \mathbb{R}$. Alors :
$$b = \sup A \iff \begin{cases} b \text{ est un majorant de } A; \\ \text{il existe une suite } (x_n) \text{ à valeurs dans } A \text{ et convergente vers } b. \end{cases}$$
2. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Alors $a = \inf A \iff \begin{cases} b \text{ est un minorant de } A; \\ \text{il existe une suite } (x_n) \text{ à valeurs dans } A \text{ et convergente vers } a. \end{cases}$

Exemple **:** Étudier $\max A$ et $\sup A$ pour $A = [0,1]$ et $A = [0,1[$.

Théorème 43 Théorème fondamental de la borne supérieure

1. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, alors A admet une borne supérieure.
2. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, alors A admet une borne inférieure.

Proposition 44

1. Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subseteq B$ et B est majorée, alors A est majorée et $\sup A \leq \sup B$.
2. Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subseteq B$ et B est minorée, alors A est minorée et $\inf B \leq \inf A$.

2.7 Propriétés des suites monotones

Nous allons donner deux théorèmes sur les suites monotones qui permettent de prouver la convergence d'une suite sans savoir calculer sa limite

Théorème 45 Théorème de la limite monotone
Soit (u_n) une suite réelle.

1. On suppose (u_n) croissante :
   - si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \lim u_n$;
   - si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

2. On suppose (u_n) décroissante :
   - si (u_n) est minorée, alors (u_n) est convergente et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim u_n \leq u_n$;
   - si (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Retenons qu'**une suite monotone a toujours une limite** (finie ou infinie).

Définition 46 Suites adjacentes
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes lorsque :
(i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante a.p.c.r. ;
(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Sous les conditions (i) et (ii), on a $u_n \leq v_n$ a.p.c.r..

Théorème 47 Théorème des suites adjacentes
Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent vers une même limite.

***Exemple* : Tout réel est limite de deux suites adjacentes de rationnels.**
Si $x \in \mathbb{R}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.
Ces deux suites sont à valeurs dans $\mathbb{Q}$, sont adjacentes, et convergent vers x.

3 Exemples de suites

3.1 Suites arithmétiques

Définition 48 Suite arithmétique
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 49 Formules autour des suites arithmétiques

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$; Plus généralement : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_p + (n-p)r$.
2. Si $r = 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire égale à u_0.
   Si $r > 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (strictement), divergente vers $+\infty$.
   Si $r < 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (strictement), divergente vers $-\infty$.
3. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme } + \text{ dernier terme}}{2}$$

Exemple **:** $u_0 = 0$ et $r = 1$ donnent $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$. On retrouve les formules :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=p}^{n} k = \frac{(n-p+1)(n+p)}{2}$$

3.2 Suites géométriques

Définition 50 Suite géométrique
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Proposition 51 Formules autour des suites géométriques

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$; Plus généralement : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_p q^{n-p}$ (si $n < p$ il faut supposer $q \neq 0$).
2. Si $r = 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire égale à 0 à partir du rang 1.
   Si $q > 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
   Si $q < 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \text{ ie } |q| < 1 \end{cases}$
   et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas si $q \leq -1$.
4. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$, on a pour $q \neq 1$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_0 q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

   et pour $q = 1$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)u_0 = \text{nombre de termes} \times \text{premier terme}$$

⚠ ATTENTION ! Si (x_n) est une suite à valeurs dans $]-1,1[$, on ne peut pas dire que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)^n = 0$. Par exemple, nous verrons à la fin du chapitre que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Exemple **:** Pour la suite $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$, vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0^{(2^n)}$. En déduire la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 52 Suite arithmético-géométrique
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique de paramètres $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

Remarquons que si $a = 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison b, et si $b = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. Dans la suite, on supposera que $a \neq 1$.

On va calculer le terme général u_n en fonction de n, mais cette fois la formule est trop compliquée pour être apprise, il faut donc uniquement retenir la méthode utilisée.

<u>Méthode</u> : on commence par déterminer le point fixe $\ell \in \mathbb{R}$ associé à la relation de récurrence. Il vérifie $\ell = a\ell + b$, donc $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

Ensuite on définit une suite auxiliaire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = u_n - \ell$. Cette suite est alors géométrique de raison a, en effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = a(x_n + \ell) + b - \ell = ax_n + \underbrace{a\ell + b - \ell}_{=0} = ax_n$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = x_0 a^n = (u_0 - \ell)a^n$ puis $u_n = x_n + l = \left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right)a^n + \dfrac{b}{1-a}$.

On peut alors très facilement en déduire la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 53 Suite récurrente linéaire d'ordre 2
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrente linéaire d'ordre 2 de paramètres $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Remarquons que si $b = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

Définition 54 Équation caractéristique
On appelle équation caractéristique associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^2 = az + b$.

Théorème 55 Calcul du terme général u_n en fonction de n
On note $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique (E).

1. $\boxed{\text{Si } \Delta > 0}$ (E) a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Il existe alors un unique couple de réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
2. $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ (E) a une seule racine réelle r_0. Il existe alors un unique couple de réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) r_0^n$.
3. $\boxed{\text{Si } \Delta < 0}$ (E) a deux racines complexes pures conjuguées $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$. Il existe alors un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n \big(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\big)$.

⚠ Dans le cas d'une suite à valeurs **complexes**, on obtient :
$\boxed{\text{Si } \Delta \neq 0}$ (E) a deux racines **complexes** distinctes r_1 et r_2. Il existe alors un unique couple de **complexes** $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
$\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ (E) a une seule racine réelle r_0. Il existe alors un unique couple de **complexes** $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) r_0^n$.

⚠ Le cas d'une suite **réelle** pour laquelle $\Delta < 0$ est un cas particulier du cas d'une suite **complexe** pour laquelle $\Delta \neq 0$. Dans ce cas les deux racines r_1 et r_2 sont conjuguées et on peut donc trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha r_1^n + \beta \overline{r_1}^n$. Nous allons voir comment retrouver la formule du théorème.
On note $r_1 = \rho e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique et puisque la suite réelle on a $u_n = \overline{u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or :

$$u_n = \overline{u_n} \iff \alpha \rho^n e^{in\theta} + \beta \rho^n e^{-in\theta} = \overline{\alpha} \rho^n e^{-in\theta} + \overline{\beta} \rho^n e^{in\theta} \overset{\rho \neq 0}{\iff} \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta} = \overline{\alpha} e^{-in\theta} + \overline{\beta} e^{in\theta}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut prendre $n = 0$ et $n = 1$:

$$\alpha + \beta = \overline{\alpha} + \overline{\beta}\ (1) \quad \text{et} \quad \alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta} = \overline{\alpha} e^{-i\theta} + \overline{\beta} e^{i\theta}\ (2)$$

Alors $e^{i\theta} \times (1) - (2)$ donne $2i\beta \sin(\theta) = 2i\overline{\alpha} \sin(\theta)$, puis $\beta = \overline{\alpha}$ car $\theta \neq 0\ [\pi]$ (en effet r_1 et r_2 sont des complexes purs). On a donc en notant $\alpha_1 = \mathscr{R}e(\alpha)$ et
$al_2 = \mathscr{I}m(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n &= \rho^n \times \left(\alpha e^{in\theta} + \overline{\alpha} e^{-in\theta}\right) \\
&= 2\rho^n \times \mathscr{R}e\left(\alpha e^{in\theta}\right) \\
&= 2\rho^n \times \mathscr{R}e\Big[(\alpha_1 + i\alpha_2)\big(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)\big)\Big] \\
&= \rho^n \times \Big(\underbrace{2\alpha_1}_{=\lambda \in \mathbb{R}} \cos(n\theta) + \underbrace{(-2\alpha_2)}_{=\mu \in \mathbb{R}} \sin(n\theta)\Big)
\end{aligned}$$

ce qui est bien de la forme attendue.

4 Comparaison des suites

4.1 Notations de Landau

Définition 56 Suite négligeable devant une autre suite
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$;
(ii) $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang.
On le notera $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, et on dira que u_n est un « petit o » de v_n.

On dit parfois aussi que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **prépondérante** devant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⚠ ATTENTION : la notation $o(v_n)$ seule n'a pas de sens !
Elle ne désigne pas une suite fixée, mais n'importe quelle suite négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En particulier : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ ne donnent pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (comme on peut le vérifier avec le contre-exemple $u_n = n$, $v_n = n^2$ et $w_n = n^3$).

Lorsque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a un critère plus simple donné dans le théorème suivant.

Théorème 57 Critère de négligeabilité
Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Ce résultat est utilisé en pratique pour prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Mais certaines suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule à partir de n'importe quel rang (prendre $v_n = 1 + (-1)^n$), donc il faut aussi apprendre à manipuler la définition générale de la négligeabilité.

Proposition 58 Règles de calcul pour « le petit o »
On se donne des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Transitivité. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ donnent $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
2. Produit. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ donnent $u_n \times a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n \times b_n)$.
3. Somme. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ donnent $u_n + a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
4. Multiplication par une constante. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ donne $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \times u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
5. Multiplication par une suite. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ donne $u_n \times w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n \times w_n)$.

Définition 59 Suite dominée par une autre suite
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
(i) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
(ii) $u_n = b_n v_n$ à partir d'un certain rang.
On le notera $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$, et on dira que u_n est un « grand o » de v_n.

Les remarques sur la notation $o(v_n)$ sont encore valables pour la notation $\mathcal{O}(v_n)$.

Lorsque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a encore une fois un critère plus simple.

Théorème 60 Critère de domination
Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0} \text{ est bornée}$$

Ce résultat est utilisé en pratique pour prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.

Proposition 61 Lien entre « le petit o » et « le grand o »
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.

4.2 Suites équivalentes

Définition 62 Suite équivalente à une autre suite
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$;
(ii) $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang.
On le notera $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Proposition 63 Propriétés de la relation $\sim$
On se donne trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Transitivité. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ donnent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.
2. Symétrie. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
3. Réflexivité. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

La propriété de symétrie donne que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on peut donc aussi dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

⚠ ATTENTION : ne jamais écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$. Cela n'a aucun sens, sauf dans le cas très particulier où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire égale à 0 à partir d'un certain rang.

Lorsque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a encore une fois un critère plus simple.

Théorème 64 Critère d'équivalence
Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Ce résultat est utilisé en pratique pour prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Théorème 65 Lien entre la relation ~ et « le petit o »
Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$$

On en déduit une méthode simple pour trouver une suite équivalente à une somme.

Corollaire 66 Équivalent d'une somme
Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Théorème 67 Composition d'un « petit o » par une suite équivalente
Pour trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(a_n)$.

Une suite équivalente renseigne sur le signe.

Théorème 68 Équivalent et signe
Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même signe au sens strcit à partir d'un certain rang.

Une suite équivalente permet de calculer une limite.

Théorème 69 Équivalent et limite
Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \overset{\text{existe}}{=} \ell$.
2. On a une réciproque dans le cas particulier $\ell \in \mathbb{R}^*$: si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

⚠ ATTENTION ! Par contre si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, on ne peut pas en déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Prendre par exemple $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n^2}$.

On peut effectuer les opérations suivantes sur les suites équivalentes.

Proposition 70 Règles de calcul pour la relation ~
On se donne des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Valeur absolue. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donne $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.
2. Produit. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ donnent $u_n \times a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \times b_n$.
3. Puissance. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donne $u_n^p \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^p$.
   Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$ (à condition que ces suites soient définies).
4. Inverse. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
5. Quotient. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{a_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b_n}{v_n}$.

⚠ ATTENTION : par contre il n'est pas possible de faire les opérations suivantes.

• **Somme**

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ ne donnent pas $u_n + a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + b_n$.
On peut considérer le contre-exemple suivant : $u_n = n^3 + n$ et $a_n = -n^3 + n^2$.

• **Composition par une fonction**

Si f est une fonction, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(v_n)$.
En particulier $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{v_n}$, et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.
On peut considérer les contre-exemples suivantes : $u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2$, $f(x) = \mathrm{e}^x$ puis $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $v_n = 1$, $f(x) = \ln(x)$.
Noter aussi que $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$, mais en général on n'a pas $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$, bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$. Considérer par exemple $u_n = \mathrm{e}^{-n}$.

• **Puissance dépendante de n**

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $u_n^{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^{\alpha_n}$.

On verra à la fin du paragraphe que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$. On peut en déduire le contre-exemple $u_n = 1+\dfrac{1}{n}$ et $\alpha_n = n$.

4.3 Comparaison des suites usuelles

On rappelle les limites usuelles suivantes :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^\beta = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > 0 \\ 1 & \text{si } \beta = 0 \\ 0 & \text{si } \beta < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\gamma n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \gamma > 0 \\ 1 & \text{si } \gamma = 0 \\ 0 & \text{si } \gamma < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < a < 1 \end{cases}$

Théorème 71 Équivalent et polynômes
Si P est une fonction polynôme de la forme $P(x) = a_q x^q + a_{q+1}x^{q+1} + \cdots + a_p x^p$, où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $q \leq p$, $a_q \neq 0$ et $a_p \neq 0$.
Alors $P(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p$ (plus haut degré), et $P\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_q}{n^q}$ (plus bas degré).

Théorème 72 Comparaison de n^α, $n!$ et a^n
On se donne trois réels α, β et a.

1. Si $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\beta\right)$, ou encore $\dfrac{1}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.
2. $a^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$ et $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$
   Et si $a > 1$: $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(a^n\right)$.
3. $n! = \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^n\right)$

De manière mnémotechnique, on peut retenir que si $a > 1$: $n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n$

Théorème 73 Croissances comparées
On se donne trois réels α, β et γ.

1. $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$
   Et plus généralement, pour $\alpha > 0$: $(\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\alpha\right)$
2. $n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^n\right)$
   Et plus généralement, pour $\gamma > 0$: $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\gamma n}\right)$
   De manière équivalente $\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
   et plus généralement, pour $\gamma > 0$: $\mathrm{e}^{-\gamma n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$
3. Si $\gamma > 0$: $(\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\gamma n}\right)$.

Démonstration :
Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ on utilise l'inégalité : $\forall x \geq 1, 0 \leq \ln(x) \leq \sqrt{x}$.
Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} = 0$ on utilise l'inégalité : $\forall x \geq 1, \mathrm{e}^x \geq x^2$.

CQFD □

De manière mnémotechnique, on peut retenir que si $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$: $(\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll \mathrm{e}^{\gamma n}$

Théorème 74 Équivalents usuels
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0.

1. $\ln(1+x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
2. $\tan(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
3. $\sin(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
4. $\cos(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $1-\cos(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x_n^2}{2}$
5. $\mathrm{e}^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $\mathrm{e}^{x_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$: $(1+x_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $(1+x_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha x_n$

Ces résultats sont à connaître par coeur !

Exemple **:** On est maintenant en mesure de démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

Terminons par un résultat de non existence de limite.

Théorème 75 Limite de $\cos n$, $\sin n$ **et** $\tan n$
Les suites $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tan n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas de limite lorsque $n \to +\infty$ (elles sont divergentes de seconde espèce).

5 Exercices

Exercice 2 Montrer que :

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$
2. $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2,\ \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $-2x^2+7x-5 \leqslant 0$
2. $(x^2+2x+1)^2 < 16$
3. $\frac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10} > 0$
4. $(2x+1)(5-x) < (5-x)(x+4)$
5. $\frac{x}{x-2} \leqslant \frac{6}{x-1}$
6. $\frac{4x^2-15x-3}{2x^2-5x-3} \geqslant 1$
7. $8x-18\sqrt{x}-11 \geqslant 0$
8. $6 \leqslant 2x^2+3x-3 \leqslant 17$
9. $\sqrt{x+1} < 2x-3$
10. $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{4x-1}$
11. $x-1-\sqrt{2x^2+1} \leqslant 0$
12. $|2x-3| = 1$
13. $|4x+5| = |-x+3|$
14. $|7x-3| \geqslant \frac{1}{2}$
15. $|x-3|+|x^2-3x+2| \geqslant 2$
16. $|x-4| \leqslant |2x+1|$
17. $|x^3+x^2-1|+|x-7|+1 \leqslant 0$
18. $2|x-1| \geqslant 3|1-x|$

Exercice 4 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Peut-on relier $\lfloor x+y \rfloor$, $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$?
2. Comparer $\lfloor -x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor$. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

Exercice 5 Soient A et B deux parties non vides et bornées.

1. Vérifier que $\sup(A \cup B)$ et $\inf(A \cup B)$ existent et les exprimer en fonction de $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$.
2. On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$. Mêmes questions avec $\sup(A \cap B)$ et $\inf(A \cap B)$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n^2} E(\sqrt{k})$. Après avoir remarqué que :

$S_n = \sum_{k=1}^{3} E(\sqrt{k}) + \sum_{k=4}^{8} E(\sqrt{k}) + \cdots + \sum_{k=(n-1)^2}^{n^2-1} E(\sqrt{k}) + n$, donner une expression simple de S_n.

Exercice 7

1. Vérifier que : $\forall x > 0,\ x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.
2. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n) \times \left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) = n + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right)$$

et en déduire que :

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n) \times \left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$$

Exercice 8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. On suppose que $\lim u_n = +\infty$ et que (v_n) est bornée. Montrer que (u_n+v_n) diverge vers $+\infty$.
2. On suppose que $\lim u_n = 0$ et que (v_n) est bornée. Montrer que $(u_n v_n)$ converge vers 0.

3. On suppose que $\lim u_n = +\infty$. Montrer que (u_n) n'est pas bornée.
4. On suppose que (u_n) et (v_n) sont bornées. Montrer que $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ sont bornées.
5. On suppose que (u_n) est bornée et ne s'annule pas. Peut-on dire que la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est bornée ?

Exercice 9 (Principe de comparaison logarithmique) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose qu'il existe un réel $k \in [0,1[$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiants : $\forall n \geqslant n_0$, $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \overset{\text{existe}}{=} \ell$, avec $0 \leqslant \ell < 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 10 (Convergence en moyenne de Césaro) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 11 Étudier la monotonie des suites définies par :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - n$
2. $u_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$
3. $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$
4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

Exercice 12 Etudier la limite des suites définies par :

1. $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$
2. $v_n = \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$
3. $w_n = n^2 - n\cos n + 2$
4. $s_n = \frac{2^n+n}{2^n}$
5. $t_n = n^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \sin(n!)$
6. $x_n = \frac{n+(-1)^n}{n-\ln(n^3)}$
7. $y_n = \frac{\alpha^n}{n}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 13 (Limite par encadrement)

1. Etudier la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3 + k^2}$$

2. (a) Vérifier que : $\forall x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

3. Etudier la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $u_n = \dfrac{\left\lfloor \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \right\rfloor}{\left\lfloor \left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \right\rfloor}$.

Exercice 14 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 15 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair. En déduire la convergence de la suite $\left(\sin\left[(3+\sqrt{5})^n\pi\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 16

1. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'équation : $x^n + x - 1 = 0$, admet une unique solution $x > 0$, notée x_n.
2. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par 1.
3. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
4. Montrer qu'il est impossible que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite $l < 1$.
5. Conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Exercice 17 (Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$)
Soit f la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.
2. Étudier complètement la fonction f et montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution réelle α.
3. Représenter sur le même dessin l'allure de son graphe ainsi que les premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer ?
4. Étudier la suite (u_n) dans les cas $u_0 > \alpha$, $u_0 < \alpha$ et $u_0 = \alpha$.

Exercice 18 (Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$)
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$.

1. Faire l'étude complète de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On déterminera aussi ses éventuels points fixes.
2. Représenter sur le même dessin l'allure de son graphe ainsi que les premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer ?
3. On considère les suites extraites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Étudier leur monotonie.
4. Déterminer leur éventuelle limite.
5. Conclure sur la limite de (u_n).

Exercice 19 (Suites récurrentes d'ordre 1)
Étudier les suites $(u_n)_n$ définies par :

1. $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1+u_n^2\right)$
3. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{\sin u_n}{n+1}$ (Attention, il y a un piège !)
4. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = e^{u_n}$
5. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

Exercice 20 (Suites du type $u_{n+1} = f_n(u_n)$ où f_n dépend de n)
On pose : $u_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 2$, $(n+1)^2 u_n = (n-1)u_{n-1} - n$.

1. Calculer les 4 premiers termes de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$: $-1 \leq u_n \leq 1$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 21 (Suites récurrentes couplées)

Soient $0 < b < a$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont bien définies et qu'elles sont strictement positives.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n < u_n$.
3. Établir que (v_n) est croissante et (u_n) est décroissante.
4. (a) Vérifiez que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{1}{2}(u_n - v_n)$
   (b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. Déterminer la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 22 (Changements de suite)

1. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $u_n > 1$, pour $n \geq 3$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$, est bien définie.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (c) Donner u_n en fonction de n et calculer $\lim u_n$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}$.
   (a) Montrer que cette suite est bien définie.
   (b) On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer qu'elle est bien définie et donner une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis la nature de (u_n) et son éventuelle limite.

Exercice 23 (Calcul de u_n en fonction de n)

Déterminer en fonction de n le terme u_n des suites réelles suivantes :

1. $u_8 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 3$
2. $u_5 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2}u_n$
3. $u_{11} = 30$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$
4. $u_4 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n + 2$
5. $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e}\sqrt{u_n}$
6. $u_{10} = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n$
7. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (-1)^n u_n$
8. $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n + 3u_{n-1}$
9. $u_0 = 1,\ u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
10. $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$
11. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + 5u_n = 0$
12. $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$
13. $u_0 = 1,\ u_1 = \mathrm{e}^4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \times (u_n)^4 = (u_{n+1})^4$
14. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = nu_{n-1} + n!$

Exercice 24 (Calculs d'équivalents)

Donner un équivalent simple et la limite éventuelle de chacune des suites (u_n) définies par :

1. $u_n = n^2 - 2n$
2. $u_n = \sqrt{n} + (\ln(n))^{12} + \sin(n)$
3. $u_n = 2^n + n^2$
4. $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$
5. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
6. $u_n = \sin\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$
7. $u_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$
8. $u_n = \dfrac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\cos\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}$
9. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
10. $u_n = \ln(n+1) + \ln(n)$
11. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n(n+1)}\right)$

Exercice 25 (γ la constante d'Euler)

On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\phi(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) - \ln(x+1) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1).$$

1. Étudier le signe des fonctions ϕ et ψ sur $]0, +\infty[$.
2. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définies par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.
3. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 26 (Obtention d'un équivalent par encadrement)

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$.
2. En déduire la limite et un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 27 (Équivalent d'une suite définie implicitement)

Pour $n \geqslant 1$, on note (E_n) l'équation : $x - \ln(x) - n = 0$.

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution supérieure ou égale à 1, notée x_n.
2. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Donner un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.

Chapitre 5

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Dans tout le chapitre K désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 L'espace $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$

1.1 Définitions

On fixe n et p deux entiers naturels non nuls.

Définition 1 Matrice
On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application :

$$\begin{array}{rccc} A: & [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (i,j) & \longmapsto & A[i,j] \end{array}$$

Le scalaire $A[i,j]$ est appelé coefficient de A sur la ligne i et la colonne j.
Il est aussi noté a_{ij}, et dans ce cas la matrice A est notée $((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$.
A est représentée sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & \text{colonne } j & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array}$$

On dit aussi que A est un matrice de taille $n \times p$ ou (n,p).

<u>Notation</u> : L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Remarquer que $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$.

<u>Vocabulaire</u> :
• Si $n = 1$, on dit que $A \in \mathscr{M}_{1p}(\mathbb{K})$ est une matrice ligne.

- Si $p = 1$, on dit que $A \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est une matrice colonne.
- Si $n = p$, $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée d'ordre n.
- La diagonale de A est la famille de ses éléments diagonaux $(a_{ii})_{1 \leq i \leq \min(n,p)}$.

Définition 2 Égalité de deux matrices
Soient n, n', p, p' des entiers naturels non nuls, $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n'p'}(\mathbb{K})$.
On dit que $A = B$ lorsque $n = n'$, $p = p'$ et :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad A[i,j] = B[i,j]$$

Donc deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont même taille et mêmes coefficients.

Définition 3 Matrices triangulaires
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que A est triangulaire supérieure lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Longrightarrow A[i,j] = 0$$

2. On dit que A est triangulaire inférieure lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i < j \Longrightarrow A[i,j] = 0$$

3. On dit que A est diagonale lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A[i,j] = 0$$

Une matrice triangulaire supérieure est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice triangulaire inférieure est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice triangulaire diagonale est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Notations :
• On note $T_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures d'ordre n ;
• On note $T_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées triangulaires inférieures d'ordre n ;
• On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées diagonales d'ordre n.

Proposition 4 Lien entre matrices diagonales et triangulaires
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \text{ est diagonale} \iff A \text{ est à la fois triangulaire supérieure et inférieure}$$

Autrement dit : $D_n(\mathbb{K}) = T_n^+(\mathbb{K}) \cap T_n^-(\mathbb{K})$.

1.2 Opérations dans $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$

On définit l'addition de deux matrices.

Définition 5 Addition dans $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$
Soient $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B = ((b_{ij}))_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.
On définit une matrice notée $A + B = ((c_{ij}))_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

On a donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (A+B)[i,j] = A[i,j] + B[i,j]$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+1 \\ 0+4 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

On définit ensuite la multiplication d'une matrice par un scalaire.

Définition 6 Multiplication par un scalaire d'une élément de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$
Soient $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On définit une matrice notée $\lambda.A = ((d_{ij}))_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad d_{ij} = \lambda \times a_{ij}$$

On a donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (\lambda.A)[i,j] = \lambda \times A[i,j]$$

Exemple : $2.\begin{pmatrix}3 & 2\\0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\times 3 & 2\times 1\\2\times 0 & 2\times 1\\2\times 1 & 2\times 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 4\\0 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}$.

Reste à définir l'élément neutre pour l'addition.

Définition 7 Matrice nulle
Dans $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, on appelle matrice nulle la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0. On la note 0_{np}.
Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice 0_{nn} est notée plus simplement 0_n.

Exemple : $0_{24} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $0_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Théorème 8 Règles de calcul dans l'espace $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$
Les deux opérations précédentes ont les propriétés suivantes $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\forall(A,B,C)\in\left(\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^3$:
• *Commutativité de l'addition :*
$A+B=B+A$
• *Associativité de l'addition*
$\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)$
• *La matrice nulle est l'« élément neutre » pour l'addition*
$0_{np}+A=A+0_{np}=A$
• $(-1).A$ *est l'« opposée » de* A
$A+(-1).A=(-1).A+A=0_{np}$
• *Multiplication par un scalaire distributive p/r à l'addition des scalaires*
$(\lambda+\mu).A=\lambda.A+\mu.A$
• *Multiplication par un scalaire distributive p/r à l'addition des matrices*
$\lambda.\left(A+B\right)=\lambda.A+\lambda.B$
• *Associativité de la multiplication par un scalaire*
$\lambda.\left(\mu.A\right)=(\lambda\times\mu).A=\mu.\left(\lambda.A\right)$
• *Le scalaire* 1 *est l'« élément neutre » pour la multiplication par un scalaire*
$1.A=A$

Nous dirons plus tard dans l'année que ces propriéts font de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ un « $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul est 0_{np} ». Intuitivement, on constate que ces règles de calcul sont les mêmes que celles apprises au lycée pour les vecteurs du plan (ou de l'espace).

Dorénavant la matrice $(-1).A$ sera notée plus simplement $-A$.

À partir des règles de calcul précédentes, on obtient les règles suivantes.

Corollaire 9 Règles de calcul dans l'espace $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$
Si $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et $(A,B)\in\left(\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^2$, on a :

1. $\lambda.\left(A-B\right)=\lambda.A-\lambda.B$;
2. $\lambda.0_{np}=0_{np}$;
3. $(\lambda-\mu).A=\lambda.A-\mu.A$;
4. $0.A=0_{np}$;
5. $(-\lambda).\left(-A\right)=\lambda.A$;
6. *Intégrité externe*
   $\lambda.A=0_{np}\iff\lambda=0$ ou $A=0_{np}$;
   $\lambda.A=\mu.A\iff A=0_{np}$ ou $\lambda=\mu$;
   $\lambda.A=\lambda.B\iff\lambda=0$ ou $A=B$.

⚠ Ne pas négliger la propriété d'intégrité externe qui est fondamentale dans la simplification des calculs ou la résolution d'équation.

1.3 Matrices élémentaires

Définition 10 Matrices élémentaires
Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$.
On note E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j qui est égal à 1 :

$$E_{ij}=\begin{array}{c}\text{colonne } j\\ \downarrow\\ \begin{pmatrix}0&0&\dots&0&\dots&0\\0&0&\dots&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&0&\dots&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&0&\dots&0&\dots&0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\\\leftarrow\text{ligne } i\\\\\\\end{array}$$

On a donc $\forall(k,\ell)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $E_{ij}[k,l]=\begin{cases}1 & \text{si } i=k \text{ et } j=\ell\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Pour deux entiers naturels i et j, on introduit le symbole de Kronecker : $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.
On a donc $E_{ij}[k,\ell]=\delta_{ik}\times\delta_{j\ell}$.

Exemple **:** Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, on a quatre matrices élémentaires :

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\qquad E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Nous verrons plus tard que ces matrices jouent un rôle très particulier dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Produit matriciel

2.1 Produit d'une matrice par un vecteur colonne

Si $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix} \in \mathscr{M}p1(\mathbb{K})$, on définit le produit $A\times X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ par :

$$A\times X = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}\times x_k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\times x_k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{p} a_{nk}\times x_k\end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \quad \text{ligne } i\\ \\ \\ \end{array}$$

ie que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$(AX)[i,1] = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\times x_k$$

2.2 Cas général : produit de deux matrices

Soient n, p et q des entiers naturels non nuls.

On définit le produit de $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ par $B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$ ainsi :
• on note $C_1, \ldots, C_q$ les matrices colonnes égales aux colonnes de B,
• la matrice $A\times B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$ est la matrice dont les colonnes sont les matrices colonnes $A\times C_1$, $\ldots$, $A\times C_q$.

⚠ Nous ne définissons donc le produit $A\times B$ que dans le cas où le nombre de **colonnes** de A est égal au nombre de **lignes** de B.
Dans les autres cas le produit $A\times B$ n'est pas possible.

Théorème 11 Formule du produit matriciel
Soient $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B = ((b_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}} \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$.
On note $A\times B = ((c_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq q}} \in \mathscr{M}_{nq}(\mathbb{K})$.
On a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!], \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\times b_{kj}$$

Autrement dit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad (A \times B)[i,j] = \sum_{k=1}^{p} A[i,k] \times B[k,j]$$

⚠ ATTENTION ! Le produit matriciel ne se fait pas coefficient par coefficient (contrairement à l'addition) : $(A \times B)[i,j] \neq A[i,j] \times B[i,j]$.

Démonstration : En effet la j-ième colonne de $A \times B$ est donnée par :

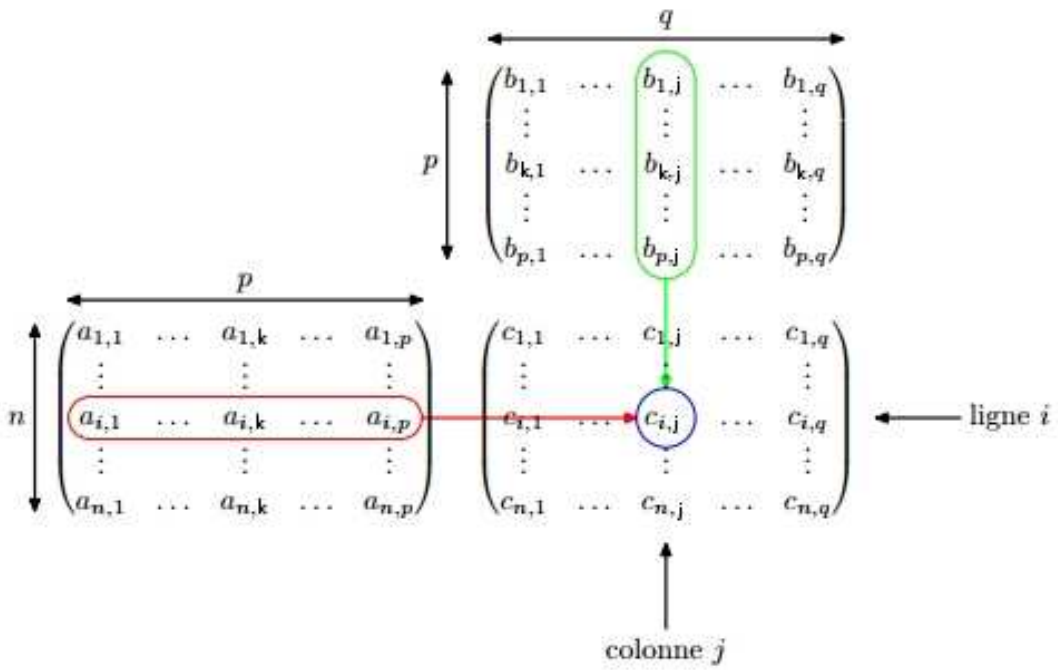
$$A \times C_q = A \times \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k} \times b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{nk} \times b_{kj} \end{pmatrix} \leftarrow \quad \text{ligne } i$$

CQFD □

Proposition 12 Lignes de la matrice $A \times B$
On note $L_1, \ldots, L_n$ les matrices lignes égales aux lignes de A. Alors la i-ième ligne de la matrice $A \times B$ est égale à $L_i \times B$.

Comment poser le produit matriciel ?

Le coefficient c_{ij} situé ligne i colonne j se calcule en suivant la ligne i de la matrice A et la colonne j de la matrice B. Une disposition astucieuse des matrices permet de visualiser ce calcul.



Cette figure permet aussi de comprendre pourquoi il est nécessaire que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

Exemple **:** Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

⚠ ATTENTION : même si les deux produits AB et BA existent (ce qui est rarement le cas), on voit que $AB \neq BA$ en général. Le produit matriciel **n'est donc pas commutatif**.

Exemple **:** Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_2$ on a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.

⚠ ATTENTION : si $AB = 0_{nq}$, on ne peut pas dire que $A = 0_{np}$ ou $B = 0_{pq}$. Le produit matriciel **n'est pas intègre**.
Plus généralement l'égalité $AB = AC$ ne donne pas $B = C$, même si $A \neq 0_{np}$.
Par contre si $A = 0_{np}$ ou $B = 0_{pq}$, on a bien évidemment $AB = 0_{nq}$.

Définissons maintenant l'élément neutre pour le produit matriciel.

Définition 13 Matrice identité
On note I_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la diagonale qui sont égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $I_n[i,j] = \delta_{ij}$.

Théorème 14 Règles de calcul pour le produit matriciel

1. **Associativité :** Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$:
$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$
2. **Distributivité à droite :** Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $(B, C) \in \left(\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})\right)^2$:
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$
3. **Distributivité à gauche :** Si $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^2$ et $C \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$:
$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$
4. **Lien entre produit matriciel et produit par un scalaire :**
Si $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$\lambda.(A \times B) = (\lambda.A) \times B = A \times (\lambda.B)$$
5. **Élément neutre :** Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$:
$$A \times I_p = I_n \times A = A$$
6. **Matrice nulle :** Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$:
$$A \times 0_{p,q} = 0_{n,q} \quad \text{et} \quad 0_{m,n} \times A = 0_{m,p}$$

⚠ ATTENTION : rappelons une dernière dois que le produit matriciel est non commutatif et non intègre.

2.3 Produit matriciel et matrices carrées

Appliquons les résultats précédents dans le cas $n = p$: l'addition deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donne encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et la multiplication d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par un scalaire donne aussi un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À ces deux opérations s'ajoute le produit matriciel, qui permet de multiplier deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et qui donne un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que ces trois opérations sont **internes**). L'élément neutre pour le produit matriciel est la matrice I_n :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \times I_n = I_n \times A = A$$
Ce produit est non commutatif et non intègre.

On peut remarquer que la matrice I_n commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $\lambda.I_n$ commute aussi avec toutes les matrices car $(\lambda.I_n)A = A(\lambda.I_n) = \lambda.A$ (on peut aussi démontrer que ce sont les seules matrices carrées qui commutent avec toutes les autres mais c'est une autre histoire).

Les matrices carrées de la forme $\lambda.I_n = \mathrm{Diag}(\lambda,\dots,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$ sont appelées **matrices scalaires**.

Définition 15 Puissances d'une matrice carrée
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$ on définit A^p par récurrence : $A^0 = I_n$ et $A^p = A \times A^{p-1}$.
Si $p \geq 1$, on a donc $A^p = \underbrace{A \times A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$.

⚠ ATTENTION : bien évidemment, on ne peut pas dire que $\left(A^p\right)[i,j] = \left(A[i,j]\right)^p$! Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ (-1)^2 & 0^2 \end{pmatrix}$$

Proposition 16 Règles de calculs des puissances
Soient $(A,B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

1. $\left(A^p\right)^q = \left(A^q\right)^p = A^{pq}$
2. $A^p \times A^q = A^q \times A^p = A^{p+q}$
3. Si A et B commutent : $(AB)^p) = A^p B^p$;
   sinon $(AB)^p = \underbrace{AB \times AB \times \cdots \times AB}_{p \text{ fois}}$

Théorème 17 Cas de matrices triangulaires/diagonales
Soient $(A,B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$.Soient $(A,B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$

1. Si $(A,B) \in \left(T_n^+(\mathbb{K})\right)^2$ alors : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(AB)[i,i] = A[i,i] \times B[i,i]$. Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & \lambda_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ 0 & \mu_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & & \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

   et donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\left(A^p\right)[i,i] = \left(A[i,i]\right)^p$, ie :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & \lambda_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & & \\ 0 & \lambda_2^p & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

2. On a les mêmes résultats avec des matrices triangulaires inférieures.
3. En particulier, si A et B sont deux matrices diagonales telles que $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $B = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, alors :

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = BA \end{aligned}$$

et pour tout $p \in \mathbb{N}$: $A^p = \big(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\big)^p = \mathrm{Diag}\big(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p\big)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

Corollaire 18 Produit de matrices triangulaires/diagonales

1. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) donne une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieures), autrement dit le produit matriciel laisse stable $T_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $T_n^-(\mathbb{K})$).
2. Le produit de deux matrices diagonales donne une matrice diagonale, autrement dit le produit matriciel laisse stable $D_n(\mathbb{K})$.
   De plus, deux matrices diagonales commutent toujours entre elles.

⚠ En général, une matrice diagonale ne commute pas avec une matrice quelconque.

De même que pour les nombres réels ou complexes, on peut établir une formule du binôme.

Théorème 19 Formule du binôme de Newton, version matrice
Soient $(A,B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$ tel que A et B commutent, ie $AB = BA$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . A^k \times B^{n-k} = (B+A)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . B^k \times A^{n-k}$$

Si A et B commutent, on a donc : $(A-B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} . A^k \times B^{n-k}$.

⚠ ATTENTION : ce résultat est faux si $AB \neq BA$.
Par exemple, on a : $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2.AB + B^2$.

Exemple **:** On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour tout entier naturel n.

2.4 Matrices carrées inversibles

Définition 20 Matrice inversible
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible (à gauche et à droite) lorsqu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Proposition 21 Unicité de l'inverse
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors il y a unicité de la matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Définition 22 Inverse d'une matrice inversible
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle inverse de A l'unique matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
On la note A^{-1}.

⚠ ATTENTION : A^{-1} n'existe pas toujours. De plus, il ne faut pas la noter $\dfrac{1}{A}$.

Exemple **:** I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

Exemple **:** 0_n est non inversible.

Exemple **:** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple **:** $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $N^2 = 0_2$ et n'est donc pas inversible.
Plus généralement on dit qu'une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$; une telle matrice n'est pas inversible.

Exemple **:** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 + 2A - 3I_n = 0_n$. Montrer que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A.

Notation : On note $Gl_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n.
$Gl_n(\mathbb{K})$ est appelé **groupe linéaire d'ordre** n **sur** $\mathbb{K}$.

Théorème 23 Règles de calcul de l'inverse
Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
2. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda.A$ est inversible et $(\lambda.A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}.A^{-1}$.
4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible et $\left(A^p\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p$.

⚠ ATTENTION ! En général la matrice $A + B$ n'est plus inversible. Considérer par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = -A$.

Définition 24 Puissances négatives d'une matrice inversible
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. On pose :
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$;
• pour tout $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, $A^n = \underbrace{\left(A^{-1}\right) \times \left(A^{-1}\right) \times \cdots \times \left(A^{-1}\right)}_{-n \text{ fois}}$

Proposition 25 Règles de calcul des puissances négatives
Si $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$, on a : $\left(A^n\right)^p = A^{np} = \left(A^p\right)^n$ et $A^n \times A^p = A^{n+p} = A^p \times A^n$ et $\left(A^{-1}\right)^n = A^{-n}$.

Théorème 26 Inversibilité à gauche ou à droite d'une matrice
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on a équivalence de :
(i) A est inversible ;
(ii) A est inversible à gauche ;
(iii) A est inversible à droite.

Autrement dit si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles, $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

Exemple **:** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2+2A-3I_n = 0_n$. Montrer que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A.

Proposition 27 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le scalaire :

$$\det(A) = ad - bc$$

On a alors :

$$A \text{ est inversible} \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$$

et dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

<u>Démonstration</u> **:** Remarquer que $A^2 - (a+d).A + (ad-bc).I_2 = 0_2$.

CQFD □

Exemple **:** $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ donne $A^{-1} = \frac{i}{3}\begin{pmatrix} -i & -i \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3 Transposition

3.1 Premières propriétés

Définition 28 Transposée d'une matrice
Soit $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A, la matrice $B = ((b_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad b_{ij} = a_{ji}$$

Cette matrice B est notée ${}^tA$.
Autrement dit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad \left({}^tA\right)[i,j] = A[j,i]$$

Exemple **:** ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les colonnes deviennent les lignes, et réciproquement.

Théorème 29 Règles de calcul de la transposée
Soient $(A,B) \in \left(\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(\lambda.A) = \lambda.{}^tA$
2. ${}^t\left({}^tA\right) = A$
3. ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$ et donc $\forall q \in \mathbb{N}$, ${}^t\left(A^q\right) = \left({}^tA\right)^q$.
4. Si $n = p$: A est inversible si, et seulement si, ${}^tA$ l'est. Dans ce cas ${}^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1}$. Donc $\forall q \in \mathbb{Z}$, ${}^t\left(A^q\right) = \left({}^tA\right)^q$.

Proposition 30 Transposée de matrices triangulaires/diagonales

1. Si $A \in T_n^+(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in T_n^-(\mathbb{K})$. De même, si $A \in T_n^-(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in T_n^+(\mathbb{K})$.
2. Si D est diagonale alors ${}^tB$ aussi, puisque ${}^tB = B$.

3.2 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 31 Matrices symétriques/antisymétriques
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que M est symétrique lorsque ${}^tM = M$, ie lorsque :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad M[i,j] = M[j,i]$$
2. On dit que M est antisymétrique lorsque ${}^tM = -M$, ie lorsque :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad M[i,j] = -M[j,i]$$

Si M est antisymétrique, on a : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $M[i,i] = 0$. Donc une matrice antisymétrique a tous ses coefficients diagonaux égaux à 0.

Exemple **:** I_n est symétrique. 0_n est à la fois symétrique et antisymétrique.

Exemple **:** Une matrice symétrique d'ordre 3 est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ et une matrice antisymétrique d'ordre 3 est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Notations</u> : on note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n, et $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées antisymétriques d'ordre n.

Exemple **:** Soient A et B symétriques. Alors A et B commutent si, et seulement si, AB est symétrique.

⚠ ATTENTION ! En général, le produit de deux matrices symétriques n'est plus symétrique.
Considérer par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ qui donnent $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

4 Systèmes linéaires

Pour commencer, nous allons voir sur deux exemples pourquoi il est indispensable de résoudre des équations (ou système d'équations) par équivalence.

- On considère l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
  Si on multiplie par x : $x^3 + x^2 + x = 0$. Et comme $x^2 = -x - 1$, on en déduit : $x^3 = 1$, ie $x = 1$ puisque $x \in \mathbb{R}$.
  C'est absurde puisque 1 n'est pas solution de l'équation de départ !!
  Explications : on a en fait raisonné par implications et obtenu $x^2 + x + 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$. Mais $x = 1$ serait l'unique solution à condition d'avoir l'éequivalence $x^2 + x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$. Or ce n'est pas le cas ici, l'implication $x = 1 \Longrightarrow x^2 + x + 1 = 0$ est fausse.
  On a donc obtenu que l'équation n'a pas de solution !
- On considère le système d'équation : $\left\{ \begin{array}{rcll} x - y & = & 1 & (1) \\ x + y & = & 3 & (2) \\ -x + 3y & = & -3 & (3) \end{array} \right.$
  $(1) + (2)$ donne $2x = 4$ donc $x = 2$, et $(2) + (3)$ donne $4y = 0$ donc $y = 0$. Le système aurait donc comme unique couple solution $(2, 0)$?
  Encore une fois la réponse est non : ce n'est pas une solution.
  On a donc : $\left\{ \begin{array}{rcll} x - y & = & 1 & (1) \\ x + y & = & 3 & (2) \\ -x + 3y & = & -3 & (3) \end{array} \right. \Longrightarrow (x, y) = (2, 0)$ mais la réciproque est fausse. En conclusion le système n'a aucune solution.

Que retenir de cas exemples ? Qu'il faut résoudre des équations en raisonnant par équivalence ! Si ce n'est pas possible, alors il faut garder en tête qu'on ne trouve pas que des solutions mais aussi des « candidats solutions ». Il faut alors vérifier au cas par cas si chaque « candidat solution » est bien une solution.

4.1 Définitions

On se donne deux entiers naturels non nuls n et p, ainsi que np coefficients $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ dans $\mathbb{K}$ que nous appellerons **coefficients du système**, et n autres coefficients $b_1, \ldots, b_n$ dans $\mathbb{K}$ qui formeront le **second membre du système**.

On considère alors le **système linéaire de n équations à p inconnues** :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1j}x_j & + & \ldots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2j}x_j & + & \ldots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \ldots & + & a_{ij}x_j & + & \ldots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nj}x_j & + & \ldots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

$x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont appelées **inconnues du système**. **Résoudre le système** (S) consiste à trouver l'ensemble $\mathscr{S}$ de tous les p-uplets $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ qui sont solutions des équations de $\mathscr{S}$.

On appelle **système homogène associé**, noté (S_0), le système obtenu lorsque $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$. On note $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène. Remarquez qu'on a toujours $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{S}_0$, et donc $\mathscr{S}_0 \neq \emptyset$.

On dit que le système (S) est **compatible** lorsque $\mathscr{S} \neq \emptyset$, et incompatible dans le cas contraire. D'après la remarque précédente, un système homogène est toujours compatible.

Définition 32 Systèmes équivalents
Si (S) et (S') sont deux systèmes linéaires, on dit qu'ils sont équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions : $\mathscr{S} = \mathscr{S}'$.

Deux systèmes équivalents ont donc même nombre d'inconnues mais pas nécessairement le même nombre d'équations.

Exemple : $(S) \begin{cases} x + y &= 2 \\ x + 2y &= 3 \end{cases}$ et $(S') \begin{cases} x + 2y &= 3 \\ x - y &= 0 \\ x + y &= 2 \end{cases}$

Définition 33 Opérations élémentaires sur les lignes
On note $L_1, L_2, \ldots, L_n$ les lignes (ie les équations) du système linéaire (S). On définit alors les opérations élémentaires sur les lignes :
- échange des lignes i et j : $L_i \longleftrightarrow L_j$
- multiplication de la ligne i par un scalaire $\beta \in \mathbb{K}^*$: $L_i \leftarrow \beta.L_i$
- POUR $i \neq j$, remplacement de la ligne i par elle-même additionnée du produit de la ligne j par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$: $L_i \leftarrow L_i + \alpha.L_j$

Les deux dernières opérations regroupées donnent : $L_i \leftarrow \beta.L_i + \alpha.L_j$ avec $\beta \neq 0$ et $i \neq j$.

Théorème 34 Opérations élémentaires
Si (S') est un système linéaire obtenu par opérations élémentaires sur les lignes de (S), alors (S) et (S') sont équivalents. Autrement dit, les opérations élémentaires sur les lignes ne modifient pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Définition 35 Système de Cramer
Un système de Cramer est un système de n équations à n inconnues (donc $n = p$), qui admet une unique solution.

⚠ un système peut avoir une unique solution sans être un système de Cramer. Par exemple :

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ x-y &= 0 \\ 3x+y &= 4 \end{cases}$$

Les matrices permettent de simplifier les notations. On considère la matrice des coefficients :

$$A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$$

la matrice colonne du second membre :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

et la matrice colonne des inconnues :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K})$$

Alors on a le résultat suivant.

Proposition 36 Écriture matricielle d'un système linéaire

$$(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (S) \iff A\times X = B$$

4.2 Le pivot de Gauss

Le pivot de Gauss est un algorithme, basé sur les opérations élémentaires sur les lignes d'un système, qui permet de déterminer l'ensemble des solutions.

On considère donc le système :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

$\boxed{\text{CAS 1}}$ Tous les coefficients du système sont nuls : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} = 0$.

$\boxed{\text{CAS 1.1}}$ $b_1 = \cdots = b_n = 0$. Dans ce cas le système a une infinité de solutions : $\mathscr{S} = \mathbb{K}^p$. FIN

$\boxed{\text{CAS 1.2}}$ $\exists i \in [\![1,n]\!] / \ b_i \neq 0$. Dans ce cas le système est incompatible : $\mathscr{S} = \emptyset$. FIN

$\boxed{\text{CAS 2}}$ Au moins un des coefficients du système est nul : $\exists (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} \neq 0$.

Dans ce cas on effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_i$. On obtient un nouveau système linéaire qui, pour simplifier, sera noté comme celui de départ :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

avec cette fois $a_{1j} \neq 0$.

Ensuite on renumérote les inconnues de manière à permuter x_1 et x_j. Dans le nouveau système, on a $a_{11} \neq 0$. Ce coefficient sera notre pivot ; on l'utilise pour faire disparaître l'inconnue x_1 de tous les autres équations grâce aux opérations :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1, \qquad \text{avec} \quad i \in [\![2,n]\!]$$

On a alors le système équivalent à (S) :

$$\left\{\begin{array}{c|ccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
\hline
 & & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
 & & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

On recommence alors le processus avec le sous-sytème :

$$(S_1) \quad \left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
a_{32}x_2 & + & \dots & + & a_{3j}x_j & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

$\boxed{\text{CAS 2.1}}$ Tous les coefficients de $\mathscr{S}_1$ sont nuls. Dans ce cas, on arrête l'algorithme. FIN

$\boxed{\text{CAS 2.2}}$ On se ramène à un système équivalent à (S_1) où $a_{22} \neq 0$. Ensuite, en utilisant ce coefficient comme pivot, on fait disparaître x_2 des autres lignes de (S_1). On obtient alors que

(S) est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{ccccc|ccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
\hline
 & & & & & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3j}x_j & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & a_{i3}x_3 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
 & & & & & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & a_{n3}x_3 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

Et on recommence avec le sous-système :

$$(S_2)\quad\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_3 \\
a_{43}x_3 & + & \dots & + & a_{4j}x_j & + & \dots & + & a_{4p}x_p & = & b_4 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i3}x_3 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n3}x_3 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

Etc…

On arrête l'algorithme lorsqu'on obtient un sous-système dont tous les coefficients sont nuls :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3r}x_r & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

ou lorsqu'on a utilisé chaque inconnue comme pivot :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{pp}x_p} & = & b_p \\
 & & & & & & & & 0 & = & b_{p+1} \\
 & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

(ce qui rejoint le cas précédent avec $r = p$), ou encore lorsqu'il ne reste plus de lignes dans le

dernier sous-sytème :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3n}x_n & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{nn}x_n} & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

(ce qui rejoint encore le cas d'avant avec $r = n$).

On est certain que l'algorithme se termine en un nombre fini d'étapes puisque le système de départ n'a qu'un nombre fini d'équations (donc de lignes).

Dans tous les cas on a donc obtenu :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3r}x_r & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & 0 & + & \dots & + & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 & + & \dots & + & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

où l'entier naturel r vérifie $1 \leq r \leq \min(n, p)$ ($r = 0$ si le système de départ avait tous ses coefficients nuls, mais ce cas n'a aucun intérêt). De plus, les coefficients diagonaux sont non nuls : $a_{ii} \neq 0$ si $i \in [\![1, r]\!]$.

On dit que (S) a été mis **sous forme réduite de Gauss**.

4.3 Rang et résolution d'un système linéaire

4.3.1 Résolution des systèmes linéaires

On va maintenant résoudre dans le cas général le système linéaire (S). Grâce à l'algorithme du pivot de Gauss, on a :

$$(S) \iff (S') \left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3r}x_r & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

et il est donc équivalent de résoudre le système linéaire (S').

On obtient premièrement que le système est compatible si et seulement si $b_{r+1} = \dots = b_n = 0$. Ces lignes du système seront donc appelés **conditions de compatibilité**. Supposons désormais qu'elles sont vérifiées ; les dernières lignes du système sont donc de la forme $0 = 0$ et

peuvent être omises :

$$(S) \Longleftrightarrow (S') \left\{ \begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3r}x_r & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r
\end{array} \right.$$

On a alors deux cas à envisager.

$\boxed{\text{CAS 1}}$ $r = p$ (donc $p \leq n$).

$$(S) \Longleftrightarrow (S') \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1,p-1}x_{p-1} & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2,p-1}x_{p-1} & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3,p-1}x_{p-1} & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{p-1,p-1}x_{p-1}} & + & a_{pp}x_p & = & b_{p-1} \\
 & & & & & & & & & & \boxed{a_{pp}x_p} & = & b_p
\end{array} \right.$$

Dans ce cas la dernière ligne donne une unique valeur de x_p, l'avant dernière une unique valeur de x_{p-1}, ..., la première une unique valeur de x_1. (S) **a donc une unique solution**.

$\boxed{\text{CAS 2}}$ $r < p$.

$$(S) \Longleftrightarrow (S') \left\{ \begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & a_{1,r+1}x_{1,r+1} & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & a_{2,r+1}x_{2,r+1} & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & a_{r,r+1}x_{r,r+1} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r
\end{array} \right.$$

Dans cas les $p - r$ inconnues x_{r+1}, ..., x_p peuvent prendre n'importe quelle valeur. On les appelle les **inconnues libres ou arbitraires**. Une fois cette valeur fixée, les autres inconnues x_1, ..., x_p peuvent prendre une unique valeur. (S) **a donc une infinité de solutions**.

4.3.2 Rang d'un système linéaire

Définition 37 Rang d'un système linéaire
L'entier naturel r obtenu avec l'algorithme du pivot de Gauss est unique (on l'admet). Il est appelé rang du système, noté $\text{rg}(S)$.

Proposition 38 Rang d'un système linéaire
On a $0 \leq \text{rg}(S) \leq \min(n, p)$.
Et : $\text{rg}(S) = 0$ si et seulement si tous les coefficients de (S) sont nuls.

Théorème 39 Solutions d'un système linéaire
Un système linéaire (S) peut avoir : aucune solution, ou une unique solution, ou encore une infinité de solutions.
S'il est compatible, alors il a une unique solution si et seulement si $\text{rg}(S) = p$ (et alors $p \leq n$).
Dans le cas contraire on a $\text{rg}(S) < p$ et (S) a une infinité de solutions.

Retenir aussi que :
– pour avoir une unique solution, il faut donc au moins autant d'équations que d'inconnues ;
– dans le cas d'une infinité de solutions, le nombre d'inconnues libres est $p - \text{rg}(S)$.

Corollaire 40 Rang et systèmes de Cramer
Si le système linéaire (S) a n équations à n inconnues (donc $n = p$), alors :
(S) est de Cramer si et seulement si $\text{rg}(S) = n$.

4.3.3 Rang et systèmes linéaires échelonnés

Définition 41 Système linéaire échelonné
Soit (S) un système linéaire. On dit qu'il est échelonné lorsque :
(i) si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes sont nulles ;
(ii) si le premier terme non nul de la ligne i est en position j, soit la $(i+1)^{\text{ième}}$ est nulle, soit le premier terme non nul de la $(i+1)^{\text{ième}}$ ligne est en position k avec $k > j$.
Autrement dit : d'une ligne à l'autre il y a au moins une inconnue en moins « sur la gauche ».

Exemple : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 3y & & & + & t & = & 1 \\ & & & & 3z & + & 5t & = & 0 \\ & & & & & & 7t & = & 3 \end{array}\right.$ est échelonné,

mais $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 3y & & & + & t & = & 1 \\ & & & & 3z & + & 5t & = & 0 \\ & & & & z & - & 7t & = & 3 \end{array}\right.$ ne l'est pas.

Définition 42 Système linéaire triangulaire
Soit (S) un système linéaire. On dit qu'il est triangulaire lorsque :
(i) si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes sont nulles ;
(ii) le premier terme non nul de la ligne i est en position i (ie sur la diagonale).
Autrement dit : d'une ligne à l'autre il y a exactement une inconnue en moins « sur la gauche ».

L'algorithme du pivot de Gauss donne un système linéaire triangulaire.

Proposition 43 Lien entre triangulaire et échelonné
Un système linéaire triangulaire est échelonné.
La réciproque est fausse.

Exemple : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & 8y & + & 5z & + & 4t & = & 0 \\ & & y & & & + & 2t & = & 7 \\ & & & & 2z & + & 6t & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right.$ est triangulaire donc échelonné,

et $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 3y & & & + & t & = & 1 \\ & & & & 3z & + & 5t & = & 0 \\ & & & & & & 7t & = & 3 \end{array}\right.$ est échelonné mais non triangulaire.

On peut remarquer que, quitte à permuter les inconnues, tout système échelonné se mettre sous forme triangulaire.

Théorème 44 Rang d'un système linéaire échelonné
Si (S) est un système linéaire échelonné, alors $\mathrm{rg}(S)$ est égale au nombre de lignes non nulles.

4.4 Matrices inversibles et systèmes linéaires

Théorème 45 Inversibilité et systèmes linéaires
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \text{ est inversible} \iff \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, \forall (X,Y) \in \left(\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})\right)^2, \quad \Big[AX = Y \iff X = BY\Big]$$

et dans ce cas $B = A^{-1}$ (donc si elle existe, B est unique).

<u>Application</u> : calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du système linéaire

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche à résoudre le système linéaire $AX = Y$ avec $(X,Y) \in \left(\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})\right)^2$.

On a deux alternatives possibles :
• Le système n'est pas de Cramer (ie il n'a pas une unique solution). Dans ce cas A **n'est pas inversible**.
• Le système est de Cramer. Dans ce cas A **est inversible** et l'unique solution est $X = A^{-1}Y$. On peut donc lire sur l'écriture des solutions les coefficients de A^{-1}.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 10 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

On en déduit un critère très simple d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Corollaire 46 Inversibilité d'une matrice triangulaire
Soit T une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) d'oredre n. Alors :

T est inversible $\iff$ tous ses coefficients diagonaux sont non nuls $\iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ T[i,i] \neq 0$

L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est elle-même triangulaire supérieure (resp. inférieure), mais ce résultat n'est pas au programme.

Dans le cas d'une matrice diagonale, on sait aussi facilement calculer son inverse.

Corollaire 47 Inversibilité et puissances d'une matrice diagonale
Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale d'ordre n. Alors :

D est inversible $\iff$ tous ses coefficients diagonaux sont non nuls $\iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \neq 0$

Dans ce cas :

$$D^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_1} \end{pmatrix}$$

On en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$: $A^p = \big(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\big)^p = \mathrm{Diag}\big(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p\big)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

5 Exercices

Exercice 1 Calculer les produits de matrices suivants :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$

Exercice 2 (Polynôme annulateur et inversibilité) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Vérifer que $A^2 - A - 2I_2 = 0_2$, puis en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 3 (Calcul de puissances par conjecture) Déterminer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (Calcul de puissances par récurrence) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 (Calcul de puissances avec un polynôme annulateur)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une relation entre A^3, A^2 et A.
2. <u>Méthode 1</u> : Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n A + b_n A^2$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. <u>Méthode 2</u> : Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 2X^2 + X$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 (Calcul de puissances avec la formule du binôme matricielle)

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$. Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = 0$, puis calculer B^n pour tout $n \geq 3$.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A+I_3)(A-2I_3)$. En déduire l'existence et le calcul de A^{-1}.
2. Soient $B = \frac{1}{3}(A+I_3)$ et $C = -\frac{1}{3}(A-2I_3)$. Déterminer B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire l'expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Cette expression est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 8 Déterminer le rang puis résoudre les systèmes linéaires d'inconnues réelles suivants :

1) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y - z - t = 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$

Exercice 9 Inverser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 10 Soit $A = ((a_{ij}))_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle <u>trace de A</u>, notée $\mathrm{Tr}(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1. Montrer que : $\forall (A,B,\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K}$, $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ et $\mathrm{Tr}(\lambda.A) = \lambda \times \mathrm{Tr}(A)$.
2. Montrer que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
   En déduire que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in Gl_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$.
3. Peut-on trouver deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB - BA = I_n$?

Exercice 11

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors : A et M commutent si et seulement si M est diagonale.
2. Montrer que les seules matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres sont les matrices scalaires, c'est-à-dire les matrices de la forme λI_n, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Chapitre 6

Espaces probabilisés finis

1 Vocabulaire et axiomatique des probabilités

1.1 L'univers

On considère une expérience aléatoire (= expérience dont le résultat ne peut pas être prédit ou calculé à l'avance).

On désigne par Ω l'ensemble des résultats possibles de cette expérience aléatoire.

Ω est appelé **univers** ou encore **espace des possibles**, **espace des réalisations** ou **espace des observations**. Les éléments $\omega \in \Omega$ sont appelés **observations** ou **réalisations** de l'expérience aléatoire.

Dans ce chapitre, on se limitera toujours au cas où Ω est un **ensemble fini**, c-est-à-dire qu'on ne considèrera que des expériences aléatoires ne donnant qu'un nombre fini de résultats différents.

Exemple **:** On lance un dé à 6 faces : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} = [\![1,6]\!]$. Un élément $\omega \in \Omega$ est un chiffre entre 1 et 6 qui représente le chiffre obtenu en lançant le dé.

Exemple **:** On lance deux dés à 6 faces distinguables : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} \times \{1;2;3;4;5;6\} = [\![1,6]\!]^2$. Un élément $\omega \in \Omega$ est un couple (ω_1, ω_2) où ω_1 représente le chiffre obtenue avec le premier dé, et ω_2 le chiffre obtenu avec le second.

Exemple **:** On lance 1 fois une pièce : $\Omega = \{P, F\}$ ou $\Omega = \{0, 1\}$ avec la convention que « 1 » représente « pile », et « 0 » représente « face ».

Exemple **:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce : $\Omega = \{P, F\}^n$ ou $\Omega = \{0, 1\}^n$ avec la convention que « 1 » représente « pile », et « 0 » représente « face ». Un élément $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des résultats obtenus aux n lancers. Par exemple pour 6 lancers, on peut avoir $\omega = (P, P, F, P, F, P)$ qui se note aussi $\omega = (1, 1, 0, 1, 0, 1)$.

Exemple **:** Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$.

• On effectue n tirages successifs **avec remise** d'une boule, dans une urne de N boules : $\Omega = [\![1, N]\!]^n$. Ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des numéros tirés.

Par exemple $\omega = (6, 2, 2, 6, 4, 3, 5)$ pour 7 tirages avec remise dans une urne de 6 boules.

• On effectue n tirages successifs **sans remise** d'une boule, dans une urne de N boules (dans ce cas $n \leq N$) : Ω = ensemble des arrangements de n éléments de $[\![1,N]\!]$ = ensemble des n-uplets $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in [\![1,N]\!]^n$ dont les composantes sont deux à deux distinctes. Encore une fois ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des numéros tirés.

Par exemple $\omega = (6,2,3)$ pour 3 tirages sans remise dans une urne de 10 boules.

• On effectue 1 tirage de n boules prises **simultanément** dans une urne de N boules (dans ce cas $n \leq N$) : Ω = ensemble des combinaisons de n éléments de $[\![1,N]\!]$ = ensemble des parties $\omega = \{\omega_1,\dots,\omega_n\} \subseteq [\![1,N]\!]$. Encore une fois ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = \{\omega_1,\dots,\omega_n\} \in \Omega$ est une partie qui représente les numéros tirés.

Par exemple $\omega = \{6,2,3\}$ pour 1 tirage de 3 boules prises simultanément dans une urne de 10 boules.

Exemple **:** On mélange une jeu de n cartes : $\Omega = \{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \,/\, \omega \text{ bijective}\}$. Ceci sous-entend qu'on a numéroté les cartes de 1 à n en fonction de leur position initiale. Pour la carte numéro i, l'entier $\omega(i)$ représente sa position après la permutation ω.

Par contre, on n'étudiera pas dans ce chapitre le cas d'une infinité de lancers d'une pièce (pourtant très instructif !)...

1.2 Évènements

Intuitivement, un évènement A est défini par une phrase qui peut être vraie ou fausse selon le résultat de l'expérience aléatoire.

Exemple **:** On lance un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1,6]\!]$.

A = « obtenir un 6 » donne la partie de Ω : $A = \{6\}$

B = « obtenir un nombre pair » donne la partie de Ω : $B = \{2;4;6\}$

Exemple **:** On lance deux dés à 6 faces distinguables : $\Omega = [\![1,6]\!]^2$.

A = « obtenir un double 6 » donne la partie de Ω : $A = \{(6,6)\}$

B = « obtenir un double » donne la partie de Ω :

$$\begin{aligned} B &= \{(i,i) \,/\, i \in [\![1,6]\!]\} \\ &= \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\} \end{aligned}$$

C = « obtenir au moins un 6 » donne la partie de Ω :

$$\begin{aligned} C &= \{(i,6) \,/\, i \in [\![1,6]\!]\} \cup \{(6,j) \,/\, j \in [\![1,6]\!]\} \\ &= \{(1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5)\} \end{aligned}$$

Exemple **:** On mélange un jeu de n cartes : $\Omega = \{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \,/\, \omega \text{ bijective}\}$.

A = « la première carte se retrouve dans la première moitié du paquet » donne la partie de Ω :

$$A = \left\{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \text{ bijective} \,/\, \omega(1) = \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right\}$$

Pour $i \in [\![1,r]\!]$ fixé, B_i = « la carte numéro i n'a pas changé de place » donne la partie de Ω :

$$B = \left\{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \text{ bijective} \,/\, \omega(i) = i\right\}$$

On voit sur ces exemples qu'un évènement A est nécessairement **une partie de** Ω, ie que $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

Si on note $\mathscr{F}$ l'**ensemble de tous les évènements** qu'on peut associer à l'expérience aléatoire, alors $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$.

On admettra que sous l'hypothèse que Ω est fini, l'ensemble des évènements est $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$, ie que toutes les parties de Ω sont des évènements : on pourra donc calculer leur probabilité. Dans le cas d'un univers infini, certaines parties de Ω ne pourront pas être considérées comme des évènements ; nous ne développerons pas ce point dans ce chapitre.

Vocabulaire :

• On dit que l'**observation** $\omega \in \Omega$ **réalise l'évènement** A lorsque $\omega \in A$. Inversement, si $\omega \notin A$, on dit que l'observation ω **ne réalise pas** A.
• L'évènement $\emptyset$ est appelé **évènement impossible**.
• L'évènement Ω est appelé **évènement certain**.

Il est clair qu'aucune observation ne réalise l'évènement impossible $\emptyset$, et que toutes les observations réalisent l'évènement certain Ω.

Définition 1 Évènements élémentaires
On appelle évènements élémentaires les singletons de Ω, ie les évènements de la forme $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$.

Une remarque importante : tout évènement A est réunion d'évènements élémentaires. En effet, on a :

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

1.3 Opérations sur les évènements

Définition 2 Opérations sur les évènements
Soient A et B deux évènement, c'est-à-dire $(A, B) \in \mathscr{F}^2$.

1. Contraire. L'évènement $\complement_\Omega A = \overline{A}$ est appelé contraire de A.
   Pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in \overline{A} \iff \omega \notin A$
   Autrement dit : $\overline{A}$ est réalisé $\iff$ A n'est pas réalisé
2. Union. Pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in A \cup B \iff \omega \in A$ ou $\omega \in B$
   Autrement dit : $A \cup B$ est réalisé $\iff$ A est réalisé $\boxed{\text{ou}}$ B est réalisé
3. Intersection. Pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in A \cap B \iff \omega \in A$ et $\omega \in B$
   Autrement dit : $A \cap B$ est réalisé $\iff$ A est réalisé $\boxed{\text{et}}$ B est réalisé
4. Différence. Pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in A \backslash B \iff \omega \in A$ et $\omega \notin B$
   Autrement dit : $A \backslash B$ est réalisé $\iff$ A est réalisé et B n'est pas réalisé
5. Implication. $A \subseteq B$ signifie que, pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in A \implies \omega \in B$
   Autrement dit : A est réalisé $\implies$ B est réalisé

On peut aussi remarquer que la différence symétrique $A \Delta B$ permet de définir un « ou » exclusif.

Rappels : Si A, B et C sont des évènements :

$A \backslash B \subseteq A$	$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \Omega = A$
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Généralisation pour $(A_i)_{i \in I}$ famille d'évènements :

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) \qquad B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$$

- L'évènement $\bigcup_{i \in I} A_i$ correspond à l'évènement « au moins un des A_i est réalisé ».
- L'évènement $\bigcap_{i \in I} A_i$ correspond à l'évènement « tous les A_i sont réalisés ».
- L'évènement $\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ correspond à l'évènement « aucun des A_i n'est réalisé ».

Définition 3 Évènements incompatibles
Deux évènements A et B sont dits incompatibles lorsqu'ils sont disjoints, ie lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Intuitivement, A et B sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas se produire simultanément.
Exemple **:** Lorsqu'on lance un dé à 6 faces : les évènements A = « obtenir un chiffre pair » et B = « obtenir un chiffre impair » sont incompatibles.

Définition 4 Espace probabilisable
Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ où Ω est l'univers et $\mathscr{P}(\Omega)$ est la tribu des évènements.

1.4 Système complet d'évènements

Définition 5 Système complet d'évènements
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements de Ω. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements (= s.c.e.) lorsque :
(i) les $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux incompatibles :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$
(iii) $\forall i \in I, \quad A_i \neq \emptyset$

Les propriétés (i) et (ii) définissent **une partition** de Ω. Un système complet d'évènements est donc un cas particulier de partition.

Intuitivement, un s.c.e. correspond à une disjonction des cas, suivant le résultat de l'expérience aléatoire.

Exemple **:** On lance deux dés à 6 faces. On définit les évènements A = « obtenir deux chiffres pairs », B = « obtenir deux chiffres impairs » et C = « obtenir un chiffre pair et un chiffre impair ».
Alors (A, B, C) est un s.c.e..

Exemple **:** Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$, alors $\left(A, \overline{A}\right)$ s.c.e..

Proposition 6 Décomposition d'un évènement sur un s.c.e.
Tout évènement se décompose sur un s.c.e. $(A_i)_{i\in I}$ en une union d'évènements deux à deux incompatibles :

$$\forall B \in \mathscr{P}(\Omega), \quad B = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$$

et les $\left(B \cap A_i\right)_{i\in I}$ sont deux à deux incompatibles.

2 Probabilité sur un espace probabilisable

2.1 Probabilités

Définition 7 Probabilité
On appelle probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ telle que :
(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
(ii) $\mathbb{P}$ est additive ie $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$:

$$(A_1, \ldots, A_n) \text{ 2 à 2 incompatibles} \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

Si A est un évènement, alors le réel $\mathbb{P}(A)$ est appelé probabilité de l'évènement A.

Définition 8 Espace probabilisé
Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où Ω est l'univers, $\mathscr{P}(\Omega)$ est la tribu des évènements et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

Théorème 9 Propriétés d'une probabilité
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors :
(iii) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$;
On se donne deux évènements A et B :
(iv) $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
(v) $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et donc si $B \subseteq A$, alors $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$;
(vi) si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
(vii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Dans le cas d'une union finie d'évènements, avec un nombre quelconque de termes, et sans hypothèse d'incompatibilité, on a les deux résultats suivants.

Théorème 10 Inégalité de Boole
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout famille finie $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

Mais la plupart du temps le membre de droite est supérieur à 1, ce n'est pas très intéressant en pratique. On peut aussi utiliser la formule exacte suivante, mais les calculs sont lourds.

Théorème 11 Formule du crible
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout famille finie $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{F}^n$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) \right)$$

Exemple **:** On mélange n cartes et on note $A =$ « aucune carte ne retrouve sa position initiale ». Alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

C'est aussi la probabilité qu'une permutation aléatoire de n éléments soit un dérangement.

Exemple **:** p personnes entre dans l'ascenseur d'un immeuble de n étages (sans compter le RDC) et descendent chacune à un des n étages. On note $A =$ « À chaque étage au moins une des personnes est descendue ». Alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

C'est aussi la probabilité qu'une application aléatoire de $[\![1, p]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$ soit une surjection.

2.2 Construction de probabilités

Pour définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{P}(\Omega)$, il faut se donner $\mathbb{P}(A)$ pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, ce qui n'est pas toujours possible. On va démontrer qu'il suffit de définir $\mathbb{P}$ sur les évènements élémentaires.

On note $n = \#\Omega$ et $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Théorème 12 Probabilité sur un univers fini

1. Soit $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ avec Ω fini. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $p_i = \mathbb{P}\big(\{\omega_i\}\big)$. Alors les réels $p_1, \dots, p_n$ sont dans $[0, 1]$ et vérifient $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
2. Réciproque. On se donne des réels $p_1, \dots, p_n$ vérifiant :
   - ils sont positifs ;
   - $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

   Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}\big(\{\omega_i\}\big)$.
   Et donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \in [0, 1]$.

C'est le deuxième point que nous utiliserons pour définir une probabilité dans le cas d'un univers fini. Cette probabilité $\mathbb{P}$ vérifie :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i$$

Par exemple, si $A = \{\omega_2, \omega_5, \omega_6\}$, alors : $\mathbb{P}(A) = p_2 + p_5 + p_6$.

En pratique, il suffit donc de connaître la probabilité des évènements élémentaires, pour être capable de calculer la probabilité de n'importe quel évènement.

Exemple **:** On lance un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1, 6]\!]$ et $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. On définit une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$ par :

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{12}; \quad p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{4}$$

ce qui modélise un dé **truqué**.
On a alors $\mathbb{P}(\text{« Chiffre pair »}) = \dfrac{7}{12}$.

Exemple **:** On reprend le même espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{F})$ et on définit une autre probabilité $\mathbb{Q}$ par :

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = \frac{1}{6}$$

ce qui modélise un dé **équilibré**.
On a alors $\mathbb{Q}(\text{« Chiffre pair »}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

On voit sur ces deux exemples qu'on effectue la même expérience aléatoire : lancer un dé à 6 faces. Le choix de la probabilité permet de traduire le fait que le dé est **équilibré** ou **truqué**, c'est-à-dire de choisir la probabilité des évènements élémentaires.

Définition 13 Équiprobabilité
Lorsque Ω est fini on note $n = \#\Omega$. L'unique probabilité définie par :

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$$

est appelée probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.
Pour tout évènement A, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

3 Probabilités conditionnelles

Dans tout ce paragraphe, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

3.1 Définition

Intuitivement : si on lance un dé cubique, équilibré, on devine que sachant que le chiffre obtenu est pair, la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 *est égale à* $\frac{2}{3}$.
D'autre part, si on introduit les évènements A = *« obtenir un chiffre inférieur ou égal à* 5 *»*, B = *« obtenir un chiffre pair »*.
Comme on est en situation d'équiprobabilité, on trouve $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ *et* $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6}$.
On remarque alors que $\frac{2}{3} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Cet exemple motive la définition suivante.

Définition 14 Probabilité conditionnelle
Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, le réel $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. $\mathbb{P}(A|B)$ est aussi notée $\mathbb{P}_B(A)$.

$\mathbb{P}_B(A)$ représente donc la probabilité de A calculée du point de vue d'un observateur qui arriverait en cours d'expérience, au moment où B vient de se réaliser. Il dispose donc de plus d'informations qu'un observateur qui assiste à l'expérience depuis qu'elle a commencée.

⚠ ATTENTION : en général on ne peut pas comparer les valeurs de $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A|B)$, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple **:** On lance deux dés distinguables à 6 faces, équilibrés. On considère les évènements A = « la somme des deux chiffres obtenus est 5 », B = « le premier dé donne 3 », et C = « le premier dé donne au moins 3 ».
Alors $\mathbb{P}(A|C) < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A|B)$.

⚠ ATTENTION : il n'existe pas d'évènement (ie de partie de Ω) $A|B$ = « A sachant B ». Pour cette raison il est préférable d'utiliser la notation $\mathbb{P}_B(A)$ au lieu de la notation $\mathbb{P}(A|B)$.

Théorème 15 Propriétés de $\mathbb{P}_B$
Soit B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

1. Pour tout $A \in \mathscr{F}$, on a : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$.
2. $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
   En particulier si A_1 et A_2 sont deux évènements :

$$\mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2) - \mathbb{P}_B(A_1 \cap A_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_B\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}_B(A)$$

On a donc à disposition deux méthodes pour calculer la probabilité d'un évènement non élémentaire :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$$

Ces deux formules s'appuient sur des techniques totalement différentes : la première est basée sur l'incompatibilité, la seconde sur la dépendance entre deux évènements. En pratique, il faut choisir la solution la plus simple (le fait que l'évènement soit composé de $\cup$ ou de $\cap$ n'est pas décisif puisque les lois de Morgan permettent d'inverser ces symboles).

Exemple **:** On lance deux dés à 6 faces : calculer la probabilité d'obtenir deux nombres de la même parité.

Exemple **:** On tire deux fois une boule, sans remise, dans un une urne composée de 6 boules blanches et 2 noires : calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches.

3.2 Formule des probabilités composées

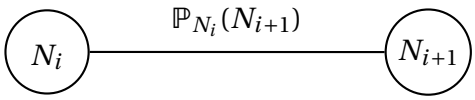
Théorème 16 Formule des probabilités composées / Formule du conditionnement multiple
Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ des évènements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k}(A_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right)\end{aligned}$$

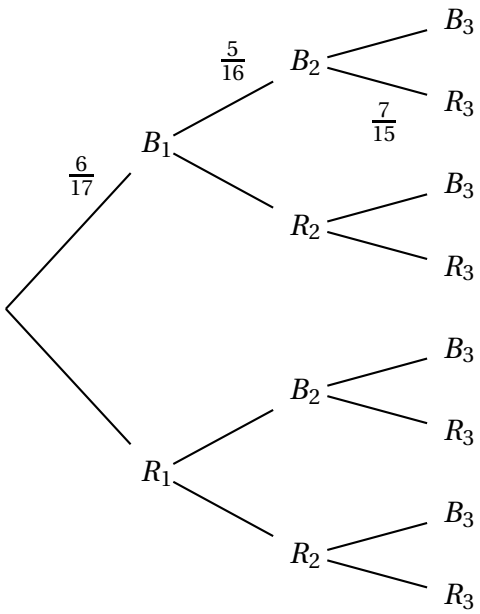
avec la convention que, pour $i = 1$: $\mathbb{P}\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)$.

Interprétation sur un arbre :

D'un noeud N_i à un noeud N_{i+1}, on trace une arête étiquetée par la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(N_{i+1}|N_i)$. La probabilité de la branche complète est alors obtenue en multipliant entre elles les probabilités conditionnelles placées sur les arêtes.



Exemple **:** On considère une urne composée de 6 boules blanches et 7 boules rouges. On effectue 3 tirages successifs d'une boule sans remise. Pour $i = 1$, 2 et 3, on pose B_i = « le i-ième tirage donne une boule blanche », et on définit de même l'évènement R_i.



Alors : $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(R_3) = \dfrac{6}{13} \times \dfrac{5}{12} \times \dfrac{7}{11}$.

⚠ ATTENTION : il faut respecter l'ordre chronologique dans le conditionnement ! Sur l'exemple précédent on pouvait aussi écrire que : $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(R_3) \times \mathbb{P}_{R_3}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_2 \cap R_3}(B_1)$, mais cela ne permet pas de faire le calcul !

3.3 Formule des probabilités totales

Théorème 17 Formule des probabilités totales
On se donne un système complet d'évènements $(A_1, \ldots, A_n)$. Pour tout évènement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

La formule des probabilités totales est très utile lorsqu'on effectue une expérience aléatoire en plusieurs étapes. Elle permet de raisonner par disjonction des cas, suivant le résultat de la première étape.

Complément : On dit que qu'une famille d'évènements $(A_i)_{i\in I}$ est un **système quasi-complet d'évènements** (ou une partition de Ω) lorsque :
(i) $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$
(ii) les $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux incompatibles.
La différence avec un s.c.e. est qu'on peut avoir $\mathbb{P}(A_i) = 0$ pour certaines valeurs de l'indice i. Pour ces valeurs $\mathbb{P}_{A_i}(B)$ n'existe pas ...mais on a tout de même la formule suivante :

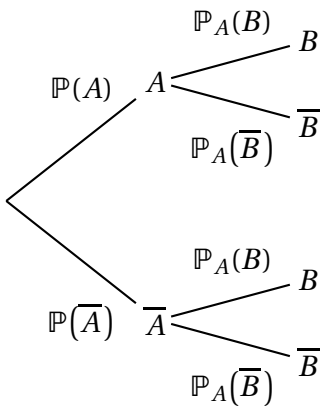
$$\forall B \in \mathscr{F}, \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

En pratique, l'intérêt de cette généralisation réside dans le fait qu'on ne peut pas toujours vérifier que $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, et dans ce cas on se contente d'un système quasi-complet d'évènements.

Interprétation sur un arbre :

Sur un arbre à deux générations, on multiplie les probabilités le long d'une branche et on additionne les branches qui réalisent l'évènement considéré.

Par exemple avec un s.c.e. à deux évènements $\left(A, \overline{A}\right)$:

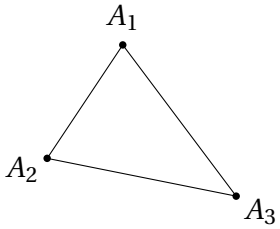


On lit sur l'arbre la formule :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$

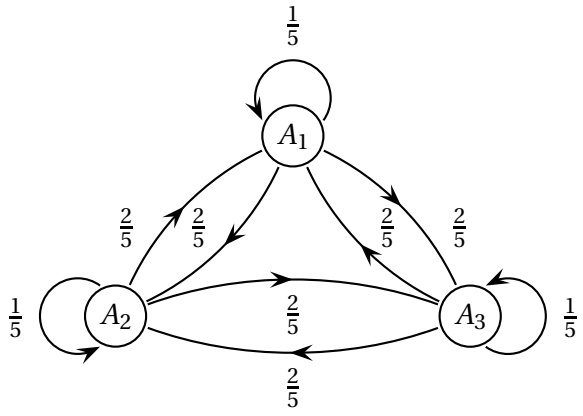
***Exemple* :** On dispose de deux pièces : l'une honnête, l'autre truquée avec deux faces pile. On choisit une pièce au hasard et on la lance. Alors $\mathbb{P}($ « obtenir pile » $) = \dfrac{3}{4}$.

***Exemple* : Chaîne de Markov**. On considère un point qui se déplace sur les sommets d'un triangle $A_1A_2A_3$:



On suppose qu'initialement le point se trouve en A_1. Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante :
• si le point est en A_i alors il passe en A_j $(j \neq i)$ avec probabilité $\dfrac{2}{5}$ dans les deux cas ;
• le point reste en A_i avec probabilité $\dfrac{1}{5}$.

On peut résumer ceci grâce à un diagramme de transition :



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les évènements :
• U_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_1 » ;
• V_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_2 » ;
• W_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_3 ».

On pose alors, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \mathbb{P}(U_n)$, $v_n = \mathbb{P}(V_n)$ et $w_n = \mathbb{P}(W_n)$.

Les conditions initiales sont $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$, et grâce à la formule des probabilités totales, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n \\ v_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n \\ w_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{1}{5}w_n \end{cases}$$

On peut alors déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n, grâce au calcul matriciel. En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

où A est la matrice donnée par $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

Le problème est donc ramené au calcul des puissances de la matrice A.

3.4 Formule de Bayes

On va essayer de relier les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$, ce qui permettra en pratique d'inverser causes et conséquences.

Théorème 18 Formule de Bayes
On se donne un système complet d'évènements $(A_1, \dots, A_n)$. Pour tout évènement B non négligeable, on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B) \times \mathbb{P}(A_k)}$$

En particulier avec un s.c.e. de la forme $\left(A, \overline{A}\right)$:

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) \times \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}$$

***Exemple* : Test d'une maladie rare.** Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie. La notice précise la qualité du test :
• lorsque le test est appliqué à une personne malade, le test est positif dans 99,8% des cas ;
• lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans 99,6% des cas.1
D'autre part, on sait qu'une personne sur 100 000 est malade.

Peut-on avoir confiance en ce test ? À priori oui, mais on est bien étonné de trouver que sachant que le test est positif, il n'y a que 0,25% de chances que la personne soit malade !

4 Indépendance

Dans tout ce paragraphe, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

4.1 Indépendance de deux évènements

Définition 19 Indépendance de deux évènements
Soient A et B deux évènements.
On dit que A et B sont indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
On le note $A \perp\!\!\!\perp B$.

Le résultat suivant donne un sens intuitif à cette définition.

Proposition 20 Lien entre indépendance et probabilité conditionnelle
Si A et B sont deux évènements avec B non négligeable : $A \perp\!\!\!\perp B$ si, et seulement si, $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

En pratique, nous verrons que l'indépendance ne se démontre pas, mais fait des hypothèses de modélisation. Elle permet de simplifier les calculs.

***Exemple* :** Lorsqu'on lance plusieurs fois une pièce de monnaie, ou lorsqu'on effectue plusieurs tirages avec remise dans une urne, on pourra supposer que les répétitions sont effectuées de manière indépendante.

⚠ ATTENTION : ce n'est pas si simple ! Si on lance deux fois une pièce, les évènements A = « obtenir pile au premier lancer » et B = « obtenir face au second lancer » sont indépendants, mais les évènements C = « obtenir pile » et B = « obtenir face » ne le sont pas.

⚠ ATTENTION : cette notion dépend du choix de la probabilité $\mathbb{P}$. En particulier si on a trois évènements A, B et C : on peut avoir A et B indépendants pour $\mathbb{P}$, mais A et B non indépendants pour $\mathbb{P}$ sachant C (ie pour $\mathbb{P}_C$) :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \quad \text{mais} \quad \mathbb{P}_C(A \cap B) \neq \mathbb{P}_C(A) \times \mathbb{P}_C(B)$$

ou l'inverse : A et B indépendants pour $\mathbb{P}_C$, mais A et B non indépendants pour $\mathbb{P}$, comme le montre l'exemple suivant.

***Exemple* :** On dispose de deux pièces : un équilibrée et une truquée (deux piles). On lance un dé (non truqué) à 6 faces :
• si on obtient le chiffre 1, on lance deux fois la pièce équilibrée ;
• si on obtient un chiffre différent de 1, on lance deux fois la pièce truquée.
On note A = « obtenir pile au premier lancer de la pièce », B = « obtenir pile au second lancer de la pièce », et C = « le lancer du dé donne le chiffre 1 ».
Alors $A \perp\!\!\!\perp B$ pour $\mathbb{P}_C$ (et pour $\mathbb{P}_{\overline{C}}$), mais $A \not\perp\!\!\!\perp B$ pour $\mathbb{P}$.

Proposition 21 Indépendance et contraire
Si $A \perp\!\!\!\perp B$, alors $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$ et $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

4.2 Indépendance mutuelle

On se donne n évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Définition 22 Indépendance deux à deux
On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux indépendants lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \perp\!\!\!\perp A_j$$

On a donc : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$. Mais par contre, on ne peut rien dire sur $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Pour cela on a besoin d'une notion plus forte.

Définition 23 Indépendance mutuelle
On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants lorsque :

$$\forall J \subseteq [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in J} A_k\right) = \prod_{k\in J} \mathbb{P}(A_k)$$

Dans ce cas on peut dire que : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$.

En pratique, l'hypothèse d'indépendance mutuelle fera partie des hypothèses de modélisation. Elle ne sera pas démontrée.

4.2.1 Propriétés de l'indépendance

On se donne une famille finie d'évènements $(A_1, \ldots, A_n)$.

Théorème 24 Lien entre indépendance mutuelle et indépendance deux à deux
Si les évènements $(A_1, \ldots, A_n)$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse. Nous verrons un contre-exemple en TD.

Théorème 25 Lemme des coalitions
On suppose que les évènements $(A_1, \ldots, A_n)$ sont mutuellement indépendants.

1. Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $B_k = A_k$ ou $\overline{A_k}$, alors les évènements $(B_1, \ldots, B_n)$ sont encore mutuellement indépendants.
2. Pour toute partie $J \subseteq [\![1, n]\!]$, les $(A_k)_{k\in J}$ sont aussi mutuellement indépendants.
3. Pour toute partie $J \subseteq [\![1, n]\!]$, tout évènement construit à partir de $(A_k)_{k\in J}$ est indépendant de tout évènement construit à partir de $(A_k)_{k\notin J}$.

Exemple **:** On lance 5 fois une pièce de monnaie, et on note A = « obtenir pile aux deux premiers lancers », B = « obtenir pile aux lancers numéros 3 à 5 » et C = « obtenir pile aux lancers numéros 2 à 5 ».
Alors A et B sont indépendants, mais A et C (et de même B et C) pourrait ne pas l'être.

4.3 Compléments sur la formule des probabilités totales : propriété de Markov

Elle n'est pas au programme mais la « propriété de Markov » doit être souvent utilisée, et la rédaction est assez acrobatique vu qu'on fleurte allègrement avec les limites du programme d'ECS…

Nous allons donc donner une liste d'exemples classiques qui devraient permettre de traiter la plupart de situations. Dans chaque, on est dans le cadre de répétitions mutuellement indépendantes d'une même expérience aléatoire, mais le nombre de répétitions est lui-même aléatoire (ce qui complique vraiment les choses).

• **Ruine du joueur.** Un joueur joue à un jeu d'argent : à chaque tour il gagne 1 euro avec probabilité p, ou perd 1 euro avec probabilité $1-p$ ($p \in]0,1[$). On voudrait calculer la probabilité qu'il termine ruiné (ou bout d'un nombre quelconque de tours), partant d'une fortune initiale de n euros ($n \in \mathbb{N}$). On note cette probabilité u_n ; notons que $u_0 = 1$ puisqu'il commence ruiné.

La formule des probabilité totales (et la propriété de Markov qu'il ne faut pas citer puisque hors-programme) donnent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = p.u_{n+1} + q.u_{n-1}$$

On est ramené à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui s'étudie simplement...

• **Le lion et les gazelles.** À chaque repas, un lion mange soit un zèbre avec probabilité $\frac{1}{3}$, soit une gazelle avec probabilité $\frac{2}{3}$. On suppose que les compositions des repas du lion sont indépendantes entre elles. On veut calculer la probabilité u_n que le lion mange pour la première fois deux gazelles consécutives à son $n^{\text{ième}}$ repas ($n \geq 2$).
La formule des probabilité totales (et la propriété de Markov qu'il ne faut pas citer puisque hors-programme) donnent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}.u_{n+1} + \frac{2}{9}.u_n$$

On est ramené à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui s'étudie simplement...

• **Modèle de Galton-Watson.** On considère une cellule qui peut se diviser en 2 (par mitose) avec probabilité p, ou mourir avec probabilité $1-p$ ($p \in]0,1[$). On veut calculer la probabilité que sa lignée soit éteinte à la $(n+1)^{\text{ième}}$ génération. On note cette probabilité u_n ; notons que $u_0 = 1-p$.

La formule des probabilité totales (et la propriété de Markov qu'il ne faut pas citer puisque hors-programme) donnent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = p.u_n^2 + 1 - p$$

On est ramené à l'étude d'une suite récurrente d'ordre 1 du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sur ces exemples l'espace probabilisé n'est pas fini (en toute rigueur), mais ils sont tout de même compréhensible dans ce chapitre puisque les évènements considérés sont inclus dans des univers finis.

5 Exercices

Calcul des probabilités :

Exercice 1 Soient A et B des événements aléatoires avec $\mathbb{P}(A) = 1/2$ et $\mathbb{P}(B) = 1/3$.

1. Donnez un encadrement de $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Déterminez $\mathbb{P}(A \cup B)$ lorsque A et B sont incompatibles puis lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$.

Exercice 2 Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathscr{P}(\Omega)$ la tribu de ses parties et la probabilité $\mathbb{P}$ définie (partiellement, x et y étant à déterminer) par $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{\omega_3\}) = x$ et $\mathbb{P}(\{\omega_4\}) = y$. Soit les événements $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_3\}$. Pour un événement quelconque C, on désigne son complémentaire par $\overline{C}$.
1. Combien d'événements pouvons nous considérer dans cet exemple ?
2. On donne $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{8}$. Déterminer complètement la probabilité $\mathbb{P}$.
3. Ici, les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ?
4. On rappelle que la différence symétrique $A \Delta B$ peut être définie par $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. Calculer $\mathbb{P}(A \Delta B | \overline{B})$, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle de $A \Delta B$ sachant $\overline{B}$ réalisé.

Exercice 3 On considère une classe de n élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.

1. Calculez la probabilité que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour. À partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5 ? A 0.8 ? Comment interpréter ce résultat ?
2. Calculez la probabilité qu'au moins un élève soit né le même jour que le professeur. Comparez le résultat obtenu avec le précédent.

Exercice 4 Un bibliothécaire fou permute au hasard les n livres de sa bibliothèque.

1. (a) Quelle est la probabilité que les volumes 1 et 2 de "Guerre et Paix" de Tolstoï se retrouvent côte à côte dans le bon ordre ?
   (b) Dans n'importe quel ordre ?
2. (a) Quelle est la probabilité qu'aucun livre n'ait changé de place ?
   (b) Qu'exactement un livre ait changé de place ?
   (c) Qu'exactement deux livres aient changé de place ?

Probabilités conditionnelles :

Exercice 5 On considère trois cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard, on expose une face au hasard : elle est rouge.
Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ? (Construisez d'abord un arbre adéquat).

Exercice 6 Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
Ma voisine a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité pour que le plus âgé soit un garçon ?

Exercice 7 On cherche un parapluie qui avec la probabilité $p/7$ se trouve dans l'un quelconque des sept étages d'un immeuble ($0 \leq p \leq 1$).

1. Quelle est la probabilité que la parapluie se trouve dans l'immeuble ?
2. On a exploré en vain les six premiers étages. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au septième étage ?

Exercice 8 Considérons une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.

1. Quelle est la probabilité de la suite "blanc, blanc, rouge" si on tire 3 boules sans remise ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au total deux blanches et une rouge si on tire 3 boules sans remise ?

Exercice 9 On considère n urnes ($n \geq 1$), numérotées de 1 à n. L'urne numérotée k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Exercice 10 Sur Orion, les Rigolus et les Tristus cherchent à faire la paix. Heureusement, il y a trois fois plus de Rigolus que de Tristus. Pour la paix, les Rigolus sont à 60% favorables, 16% y sont opposés et 24% sont sans opinion. Par contre, pour la guerre, les Tristus sont à 68% favorables, 12% opposés et 20% sans opinion. Vous rencontrez par hasard un habitant d'Orion (on ne vous demande pas la probabilité de le rencontrer..) et vous lui demandez son opinion.
1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. S'il vous répond qu'il est favorable à la paix, quelle est la probabilité qu'il soit un Rigolus ?
3. Finalement, s'il vous répond qu'il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il soit un Tristus ?

Indépendance :

Exercice 11 On jette trois dés. Calculez :

1. la probabilité d'avoir exactement un 6.
2. la probabilité d'obtenir au moins un 6.
3. la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques.

Exercice 12 On jette deux dès non-pipés, un noir et un blanc. Montrez que les évènements suivants sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants :
– «le chiffre du dè noir est pair»,
– «le chiffre du dè blanc est impair»,
– «les chiffres des deux dès ont même parité».

Exercice 13

1. On dispose d'une urne contenant 3 boules blanches numérotées de 1 à 3 et deux boules noires numérotées de 4 à 5.
   (a) On tire une à une successivement trois boules de l'urne, sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, deux boules blanches, puis une noire ? Dans n'importe quel ordre ?
   (b) Mêmes question pour des tirages avec remise.
   (c) Calculer la probabilité d'obtenir, deux boules blanches et une noire lors d'un tirage simultané de trois boules.

1. Dans une urne, on place 7 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement avec remise quatre boules de l'urne. On note N l'événement "obtenir une boule noire" et B l'événement "obtenir une boule blanche".
   (a) Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne le résultat (N, N, B, B) dans cet ordre ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches exactement ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?

Exercice 14 On dispose de 2 dès A et B. Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir "pile" soit 1/3.
- Si on obtient "pile" on décide de jouer uniquement avec le dè A ;
- Si on obtient "face" on décide de jouer uniquement avec le dè B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au premier coup, puis au deux premiers coups. Ces deux évènements sont-ils indépendants ?
2. On a obtenu "rouge" aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au troisième coup.
3. On a obtenu "rouge" aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dè A.

Exercice 15 Un joueur joue à un jeu d'argent contre le casino. On suppose qu'initialement la fortune du joueur est de $a \in \mathbb{N}$ et celle du casino de $N - a$, avec $0 \leqslant a \leqslant N$ et $N \in \mathbb{N}$.
Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et $p \neq 1/2$.
A chaque répétition du jeu on suppose que le joueur gagne 1 euros avec probabilité p ou perd 1 euros avec probabilité $q = 1 - p$. Si on note x_n la fortune du joueur à l'issue du n^e jeu, alors :

$$x_0 = a \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 \text{ avec la probabilité } p \\ x_n - 1 \text{ avec la probabilité } q \end{cases}.$$

Le jeu s'arrête dès que x_n prend la valeur 0 (le joueur est ruiné) ou la valeur N (le casino est ruiné).

1. Soit u_a la probabilité que le joueur soit ruiné, étant initialement parti d'une fortune de a. On a en particulier $u_0 = 1$ et $u_N = 0$.
   (a) Montrer que pour tout entier a tel que $1 \leq a \leq N - 1$, on a :
   $$u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}.$$
   (b) Vérifier que :
   $$u_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$
   Déterminer la limite de u_a lorsque $N \to +\infty$ et interpréter le résultat.
2. De même, calculer la probabilité v_a que le casino soit ruiné, le joueur étant initialement parti d'une fortune de a.
3. Calculer la somme $u_a + v_a$. En déduire la probabilité que le joueur et le casino s'affrontent indéfiniment.
4. Reprendre les calculs dans le cas $p = q = \dfrac{1}{2}$.

Chapitre 7

Généralités sur les fonctions numériques

1 Étude d'une fonction réelle d'une variable réelle

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1.1 Fonction réelle d'une variable réelle

Définition 1 Fonction réelle d'une variable réelle
On appelle fonction réelle d'une variable réelle toute application $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, où A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Pour simplifier on dira que f est une fonction réelle.

⚠ ATTENTION : il faut veiller à ne pas confondre les notations f et $f(x)$. f désigne l'application et $f(x)$ désigne l'image de x. L'application f peut être aussi notée $x \longmapsto f(x)$.

1.2 Ensemble de définition

Définition 2 Ensemble de définition
L'ensemble définition d'une fonction réelle f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$, noté $\mathscr{D}_f$, formé des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'expression $f(x)$ est définie.

Exemple **:** $f(x) = \sqrt{x}$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

Exemple **:** $f(x) = \ln(x)$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

Exemple **:** $f(x) = \mathrm{e}^x$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

Exemple **:** $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

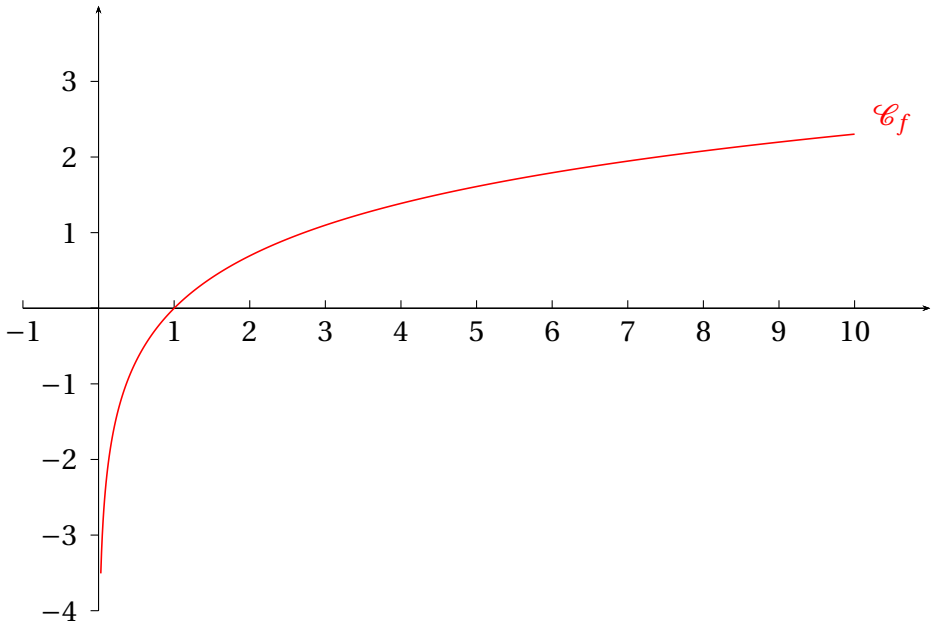
1.3 Représentation graphique de f

Définition 3 Graphe de f
Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$. Le graphe de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, noté G_f, défini par :

$$G_f = \{(x, f(x)) / \ x \in \mathscr{D}_f\}$$

Représenter f c'est représenter G_f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On obtient une courbe du plan, appelée représentation graphique de f, notée $\mathscr{C}_f$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \ln(x)$ donne $G_f = \{(x, \ln x) / \ x > 0\}$.



Définition 4 Périodicité
Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $T > 0$.
La fonction f est dite périodique de période T, ou encore T-périodique, lorsque :
(i) $\forall x \in \mathscr{D}_f$, $x + T \in \mathscr{D}_f$
(ii) $\forall x \in \mathscr{D}_f$, $f(x + T) = f(x)$.

On peut remarquer que si $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, la condition (i) est automatiquement vérifiée. On montre facilement que la condition (ii) entraîne que :

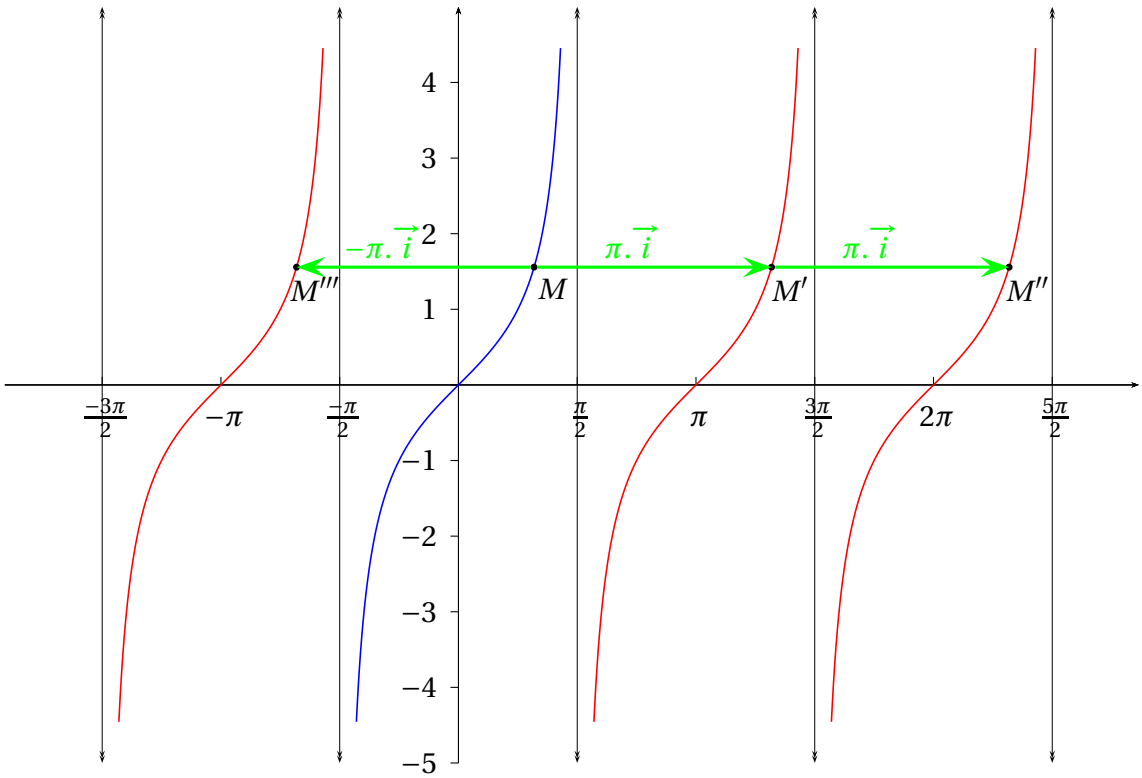
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x + kT) = f(x)$$

Exemple **:** La fonction tan est π-périodique.

Interprétation graphique Si f est T-périodique alors son graphe est invariant par toute translation de vecteur $kT.\vec{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur T, ie du type $[a, a+T]$ avec $a \in \mathbb{R}$ (on choisit souvent $[0, T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$). Le reste du graphe de f se déduit ensuite par translations de vecteurs $kT.\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple **:** Pour la fonction tan.



Définition 5 Parité

Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subseteq \mathscr{D}_f$.

1. La fonction f est dite paire sur A lorsque :
   (i) $\forall x \in A, -x \in A$
   (ii) $\forall x \in A, f(-x) = f(x)$.
2. La fonction f est dite impaire sur A lorsque :
   (i) $\forall x \in A, -x \in A$
   (ii) $\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$.

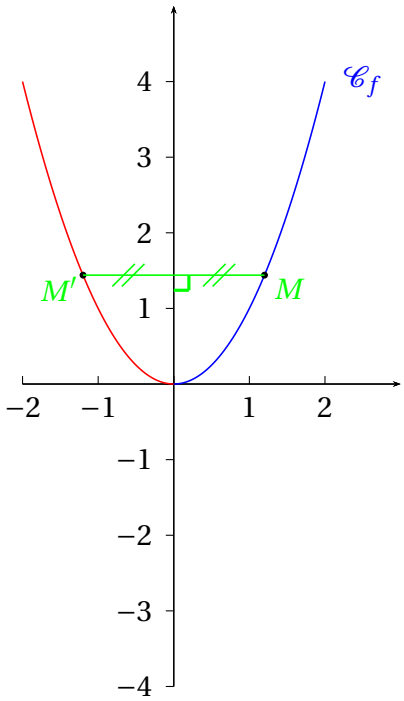
Évidemment si $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, la condition (i) est automatiquement vérifiée.

Exemple **:** La fonction $x \longmapsto x^2$ est paire sur $\mathbb{R}$, et $x \longmapsto x^3$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

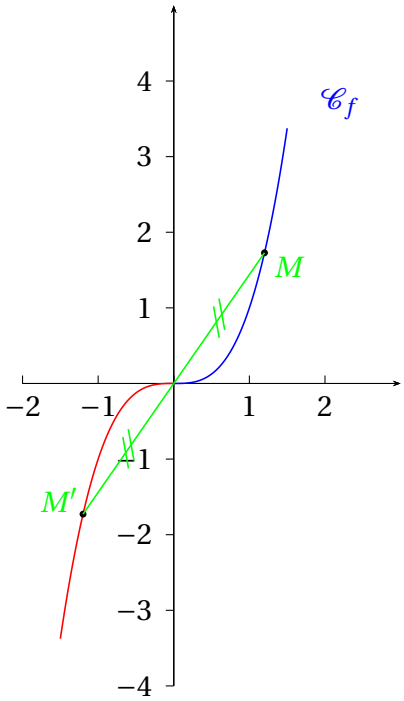
Interprétation graphique

1. Si f est paire alors son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(0y)$.
   On peut donc restreindre l'étude à $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}^+$ ou $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}^-$.
2. Si f est impaire alors son graphe est symétrique par rapport au point O.
   On peut donc restreindre l'étude à $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}^+$ ou $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}^-$.

Exemple **:** Pour la fonction $x \longmapsto x^2$.



Exemple **:** Pour la fonction $x \longmapsto x^3$.



1.4 Monotonie

Définition 6 Fonction monotone
Soit f fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. f est croissante sur I lorsque :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$
Dans ce cas :
$$x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$
et
$$f(x) < f(y) \Longrightarrow x < y \Longrightarrow x \leq y$$
⚠ Par contre si on a seulement l'inégalité large $f(x) \leq f(y)$, alors on ne peut pas comparer x et y.
2. f est strictement croissante sur I lorsque :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$
Dans ce cas :
$$x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y)$$
et
$$x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y)$$
3. f est décroissante sur I lorsque :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$
Dans ce cas :
$$x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$
et
$$f(x) < f(y) \Longrightarrow x > y \Longrightarrow x \geq y$$
⚠ Par contre si on a seulement l'inégalité large $f(x) \leq f(y)$, alors on ne peut pas comparer x et y.
4. f est strictement décroissante sur I lorsque :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$
Dans ce cas :
$$x < y \Longleftrightarrow f(x) > f(y)$$
et
$$x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \geq f(y)$$
5. f est dite monotone sur I lorsqu'elle est croissante ou décroissante sur I.
6. f est dite strictement monotone sur I lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Exemple **:** $x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple **:** $x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$.

Exemple **:** $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On rappelle deux théorèmes bien connus qui seront démontrés dans le chapitre sur les fonctions numériques dérivables.

Théorème 7 Monotonie et signe de la dérivée
On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$
2. f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$
3. f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0$

Théorème 8 Stricte monotonie et signe de la dérivée
On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en des points « isolés » $\Longrightarrow f$ strictement croissante sur I
2. $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en des points « isolés » $\Longrightarrow f$ strictement décroissante sur I

⚠ ATTENTION : si f est strictement croissante sur un intervalle I, on ne peut pas dire que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, comme le montre l'exemple de la fonction $x \longmapsto x^3$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto x + \cos(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1.5 Extremums d'une fonction

Définition 9 Fonction majorée/minorée/bornée
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que f est majorée sur I lorsque :
$$\exists M \in \mathbb{R} / \ \forall x \in I, \quad f(x) \leq M$$
M est alors appelé majorant de f.
2. On dit que f est minorée sur I lorsque :
$$\exists m \in \mathbb{R} / \ \forall x \in I, \quad f(x) \geq m$$
m est alors appelé minorant de f.
3. On dit que f est bornée sur I lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée sur I, ie lorsque :
$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x \in I, \quad m \leq f(x) \leq M$$

Proposition 10 Caractérisation des fonctions bornées
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Alors :

$$f \text{ est bornée sur } I \iff |f| \text{ est majorée sur } I$$

Définition 11 Extremum global
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que f admet un maximum global en $x_0 \in I$, lorsque f est majorée par $f(x_0)$:

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

2. On dit que f admet un minimum global en $x_0 \in I$, lorsque f est minorée par $f(x_0)$:

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

3. On dit que f admet un extremum global en $x_0 \in I$, lorsque f admet en x_0 un maximum global ou un minimum global.

Définition 12 Extremum global
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que f admet un maximum local en $x_0 \in I$, lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que f est majorée par $f(x_0)$ sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$:

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

2. On dit que f admet un minimum local en $x_0 \in I$, lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que f est minorée par $f(x_0)$ sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$:

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

3. On dit que f admet un extremum local en $x_0 \in I$, lorsque f admet en x_0 un maximum local ou un minimum local.

Proposition 13 Un extremum global est local
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Alors :

$$f \text{ admet un extremum global en } x_0 \implies f \text{ admet un extremum local en } x_0$$

Théorème 14 Condition nécessaire d'extremum local
Soit f fonction dérivable sur un intervalle I et telle que :
(i) f admet un extremum local en $x_0 \in I$
(ii) $x_0 \in \mathring{I}$, ie x_0 n'est pas une borne de I.
Alors $f'(x_0) = 0$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc horizontale.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \longmapsto x^3$ en 0.

⚠ ATTENTION : l'hypothèse $x_0 \in \mathring{I}$ est essentielle, comme le montre l'exemple de la fonction $x \longmapsto x$ sur $[0,1]$.

Ce résultat donne donc des points x_0 candidats à être des extremums locaux (on les appelle **points critiques** de f : $x_0 \in \mathring{I}$ et $f'(x_0) = 0$). Mais il faut ensuite vérifier point par point si on trouve bien un extremum local en ces points, puis faire une étude séparée des bornes de l'intervalle. Pour l'étude des points critiques, on peut utiliser le théorème suivant.

Théorème 15 Condition suffisante d'extremum local en un point critique
Soit f fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un point critique de f.
Si f' change de signe en x_0 alors f admet un extremum local en x_0.

En pratique il suffit de dresser le tableau de variations de f.

Exemple **:** Déterminer les extremums de la fonction $x \longmapsto -8x^3 + 2x^4 + 8x^2 - 1$.

2 Fonctions usuelles

2.1 Fonction racine n-ième

Pour $n \geq 1$, la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

On a les valeurs particulières : $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\sqrt[n]{1} = 1$.

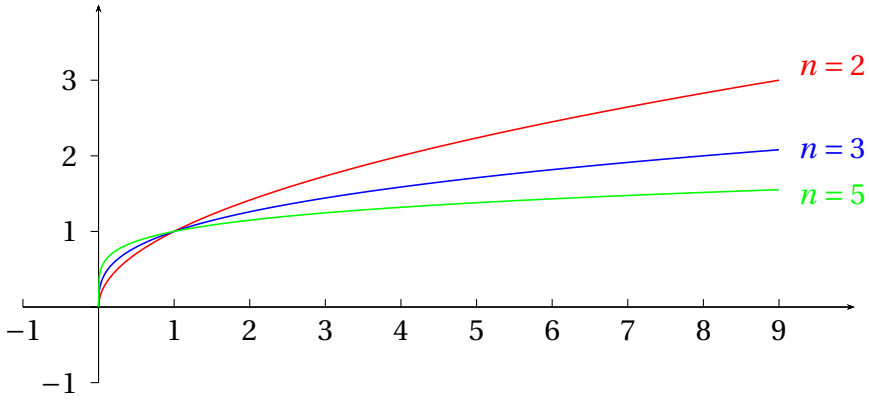
Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$: elle est continue mais non dérivable en 0. Sa dérivée est donnée par :

$$\forall x > 0, \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$$

et en particulier pour $n = 2$:

$$\forall x > 0, \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Représentation graphique :

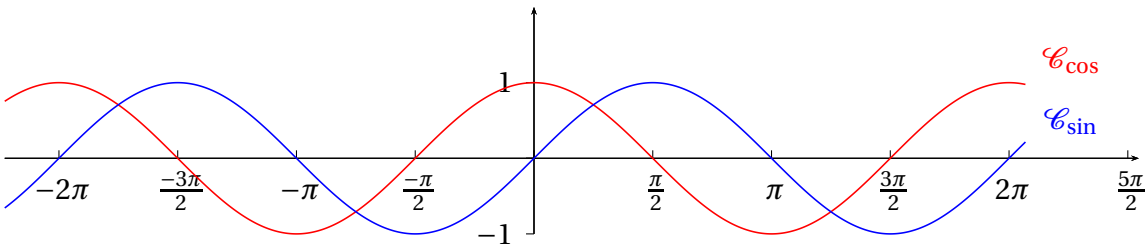


2.2 Fonctions trigonométriques

Les fonctions cos et sin sont dérivables (donc continues) sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Représentation graphique :

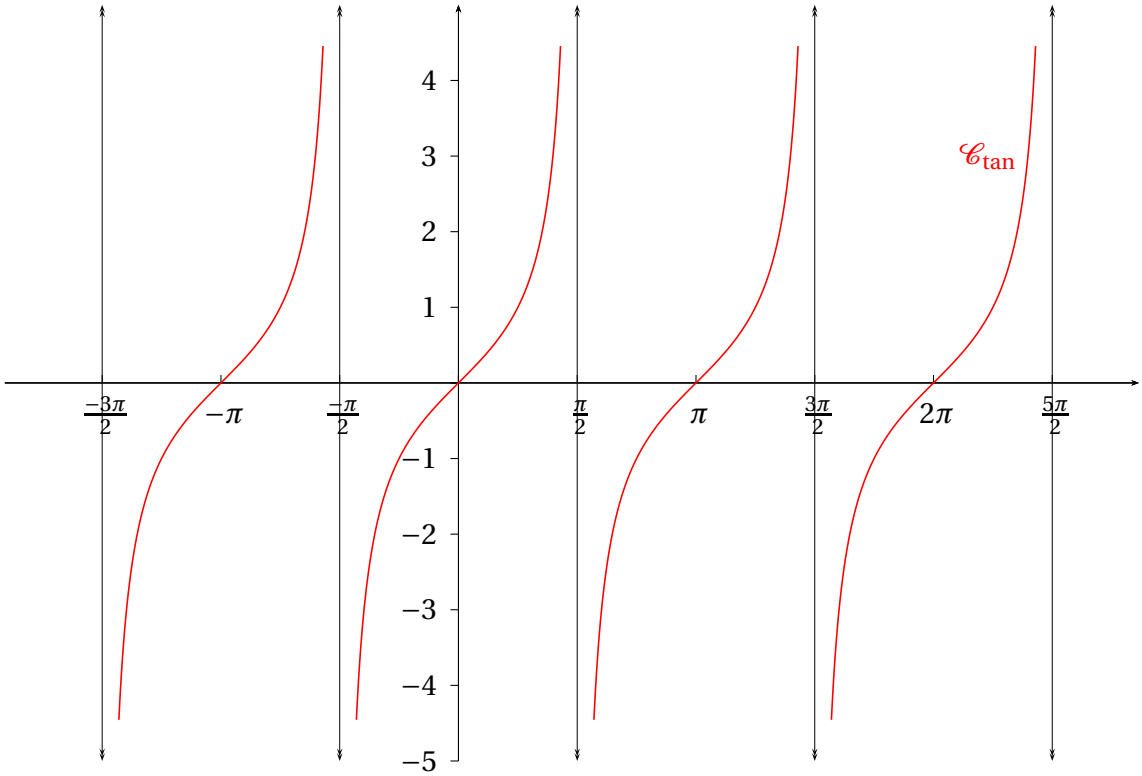


Il faut connaître par coeur les limites suivantes :
$\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

La fonction tan est dérivable (donc continue) sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et :

$$\forall x \in \mathscr{D}_{\tan}, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Représentation graphique :



Il faut connaître par coeur les limites suivantes :
$\lim\limits_{x\to 0} \tan(x) = \tan(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$.

2.3 Fonctions logarithmes et exponentielles

La fonction exponentielle est définie comme étant l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée, et prenant la valeur 1 en 0. On la note exp ou $x \longmapsto \mathrm{e}^x$.

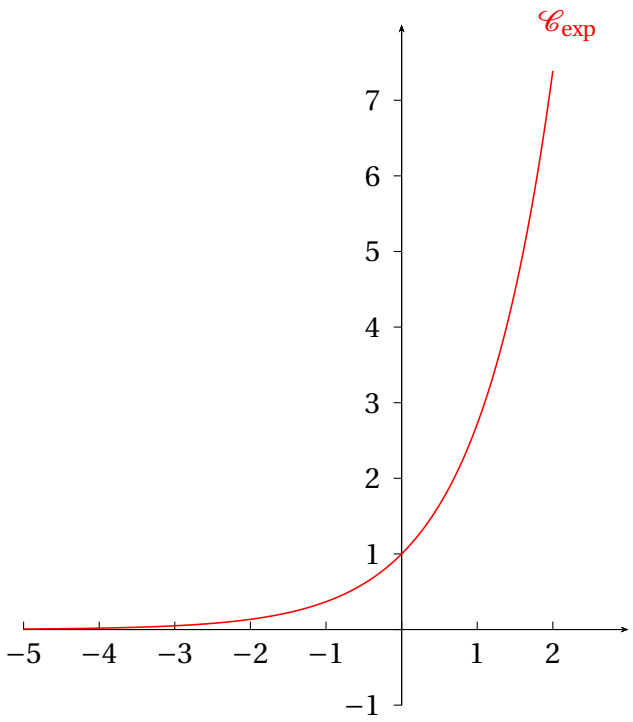
On a les propriétés suivantes.

Proposition 16 Propriétés de la fonction exponentielle

1. $\forall x \in \mathbb{R}$,$\mathrm{e}^x > 0$ et donc $\mathrm{e}^x \neq 0$
2. $\mathrm{e}^0 = 1$
3. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$, $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$ et $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
4. Plus généralement : $\forall (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\exp\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{a_i}$
5. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\left(\mathrm{e}^a\right)^n = \mathrm{e}^{na}$
6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$

Ainsi on a $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$, $\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ...

Représentation graphique :



Il faut connaître par coeur les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

La fonction exp est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0 $\nearrow$	$+\infty$

D'après le théorème de la bijection monotone, elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. On note $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ sa bijection réciproque. Cette fonction est appelée logarithme népérien. On démontrera dans le chapitre sur les fonctions numériques dérivables qu'elle est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$.

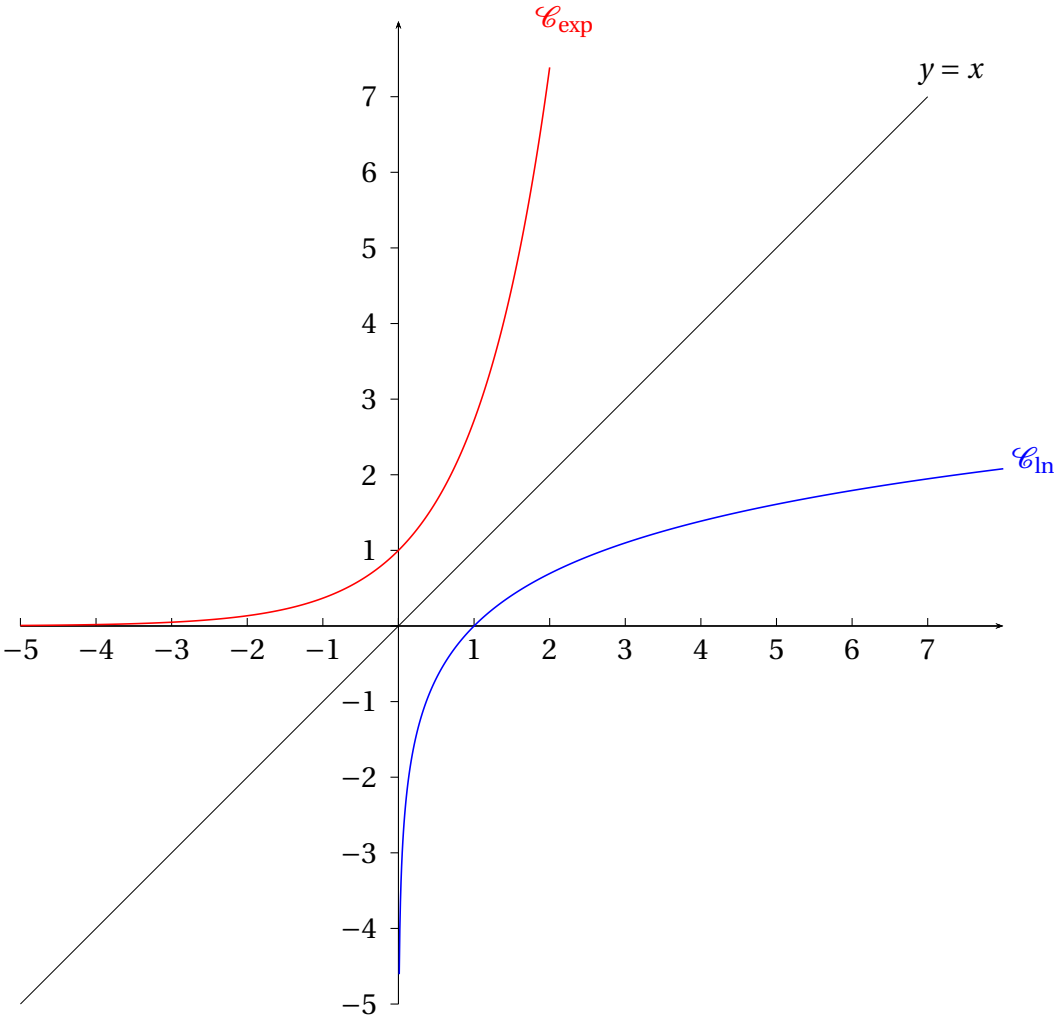
Par définition de la bijection réciproque, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$ et $\forall x > 0, \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, \quad \mathrm{e}^x = y \Longleftrightarrow x = \ln y$$

Proposition 17 Propriétés de la fonction logarithme népérien

1. $\ln(x) = 0 \iff x = 1$ et $\ln(x) = 1 \iff x = \mathrm{e}$
2. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ et $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3. Plus généralement : $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$
4. $\forall a > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$
5. $\forall x > 0$, $\left(\ln(x)\right)' = \dfrac{1}{x}$

On démontrera dans le chapitre sur les fonctions numériques dérivables que les courbes représentatives de exp et ln sont symétriques par rapport à $y = x$:



Il faut connaître par coeur les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$.

2.4 Fonctions puissances réelles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction puissance α est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0 \quad x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$$

On peut vérifier que pour $x > 0$:
- si $n \geq 1$, $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}} = \mathrm{e}^{n\ln(x)}$;
- si $n = 0$, $\mathrm{e}^{n\ln(x)} = 1$;
- si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, $\underbrace{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \cdots \times \frac{1}{x}}_{-n \text{ termes}} = \mathrm{e}^{n\ln(x)}$;
- si $n \geq 1$, $\sqrt[n]{x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(x)}$.

Donc on généralise sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonctions puissances entières, et racines n-ièmes définies au lycée.

⚠ ATTENTION : la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est définie **au moins** sur $]0, +\infty[$. Par exemple la fonction $x \longmapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ! ! De plus la formule $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}$ n'est intéressante que si $\alpha \notin \mathbb{Z}$: par exemple écrire $x^2 = \mathrm{e}^{2\ln(x)}$ n'est pas plus simple que $x^2 = x \times x$.

On a les propriétés suivantes.

Proposition 18 Propriétés des fonctions puissances
On se donne $x > 0$, $y > 0$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
1. $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ et $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$;
2. $\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta} = \left(x^\beta\right)^\alpha$;
3. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = y^\alpha x^\alpha = (yx)^\alpha$.

On démontrera que la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable (donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$), de dérivée :

$$\forall x > 0, \quad \left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

On en déduit qu'elle est strictement croissante si $\alpha > 0$, strictement décroissante si $\alpha < 0$ (et constante égale à 1 si $\alpha = 0$).

Il faut connaître par coeur les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 0 \\ 1 \text{ si } \alpha = 0 \\ +\infty \text{ si } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ 1 \text{ si } \alpha = 0 \\ 0 \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

On a les tableaux de variations :

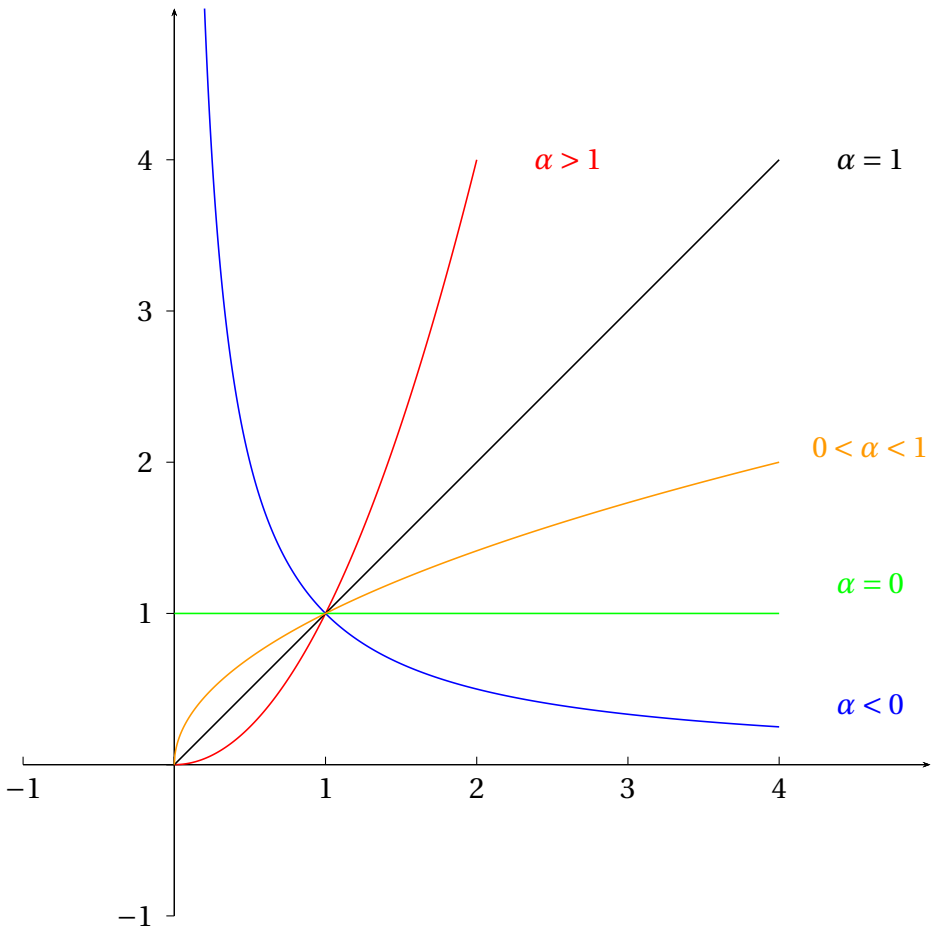
Cas $\alpha > 0$

x	0	$+\infty$
$x \longmapsto x^\alpha$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Cas $\alpha < 0$

x	0	$+\infty$
$x \longmapsto x^\alpha$	$+\infty$ $\searrow$	0

et les représentations graphiques (les cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$ seront étudiés dans le chapitre sur la dérivabilité) :



2.5 Fonctions logarithmes et exponentielles en base a

Soit $a > 0$ tel que $a \neq 1$, ie $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. On définit les fonctions logarithmes et exponentielles en base a par :

$$\forall x > 0, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$$

Pour $a = \mathrm{e}$, on retrouve les fonctions logarithme népérien et exponentielle.

On peut montrer qu'elles sont bijections réciproques l'une de l'autre :

$$\forall x > 0, \quad a^{\log_a(x)} = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \log_a\left(a^x\right) = x$$

Exemple **:** $\log_2(256) = \log_2(2^8) = 8$

On utilisera principalement que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\log_{10}(10^n) = n$.

La fonction $\log_a$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée :

$$\forall x > 0, \quad \log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

La fonction $x \longmapsto a^x$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(a^x\right)' = \ln(a)\,a^x$$

2.6 Croissances comparées

Théorème 19 Croissances comparées
On se donne trois réels α, β et γ.

1. Pour $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0^+$.
2. Pour $\gamma > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-\gamma x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\gamma x}} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha \mathrm{e}^{\gamma x} = 0^+$.
3. Pour $\gamma > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^\beta \mathrm{e}^{-\gamma x} = 0$.

De manière mnémotechnique, on peut retenir que : ln $\ll$ puissance $\ll$ exp

3 Exercices

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = x$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

Exercice 2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. Si f et g sont croissantes sur I alors $f + g$ est croissante sur I.
2. Si f est croissante sur I et g croissante sur J, tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ croissante sur I.
3. Si f et g sont croissantes positives sur I alors $f \times g$ est croissante sur I.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T > 0$. On suppose que f est monotone, montrer que f est constante.

Exercice 4 Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction croissante. Montrer que f a au moins un point fixe. Est-ce vrai si f est décroissante ?
Indications : on pourra poser $\alpha = \sup\left\{x \in [0,1] /\ f(x) > x\right\}$.

Exercice 5 [**Fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques**]

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Montrer les formules suivantes, valables pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\cosh x + \sinh x = e^x; \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}; \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
2. Calculer, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\cosh(x+y)$, $\cosh(x-y)$, $\sinh(x+y)$ et $\sinh(x-y)$ en fonction de $\cosh x$, $\sinh(x)$, $\cosh y$ et $\sinh y$. En déduire des formules de transformation de sommes en produits de fonctions hyperboliques.

Exercice 6

1. Montrer que : $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 7 Soit $0 < a \leq b$. On pose $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \longmapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$. Etudier la monotonie de f et en déduire que
$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

Exercice 8 Pour $x > 0$ simplifier $\left(\exp\left(x^2\right)\right)^{\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}{x}}$.

Exercice 9 Parmi les relations suivantes lesquelles sont exactes :
1) $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ 2) $a^b a^c = a^{bc}$ 3) $a^{2b} = \left(a^b\right)^2$
4) $(ab)^c = a^{\frac{c}{2}} b^{\frac{c}{2}}$ 5) $\left(a^b\right)^c = a^{(b^c)}$ 6) $\left(a^b\right)^c = (a^c)^b$?

Exercice 10 Résoudre les équations suivantes :
1) $e^x + e^{1-x} = e + 1$ 2) $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$ 3) $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.

Exercice 11 Résoudre les systèmes suivants :
a) $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} e^x e^{2y} = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$

Exercice 12 On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ (ii) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \end{array}$$

1. Soit f une fonction solution qui n'est pas la fonction nulle.
   (a) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
   (b) Déterminer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$, puis pour $x \in \mathbb{Q}$.
   (c) Montrer que $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq 0$. En déduire que f est croissante.
   (d) En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
2. Conclure.

Chapitre 8

Limites et comparaison des fonctions numériques

On rappelle que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$.

1 Limite en un point de $\overline{R}$

1.1 Voisinages d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 1 Voisinages d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

1. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de x_0 tout intervalle V ouvert et centré en x_0, ie du type $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ où $\delta > 0$.
   On définit aussi les voisinages à droite de x_0 par $V_d =]x_0, x_0 + \delta[$, et les voisinages à gauche par $V_g =]x_0 - \delta, x_0[$.
   Remarquons que $x_0 \in V$ mais $x_0 \notin V_d$ et $x_0 \notin V_g$.
2. On appelle voisinage de $+\infty$, tout intervalle V ouvert du type $V =]A, +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$.
3. On appelle voisinage de $-\infty$, tout intervalle V ouvert du type $V =]-\infty, A[$, avec $A \in \mathbb{R}$.

Proposition 2 Intersection de voisinages
Si $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et si V_1 et V_2 sont deux voisinages de x_0, alors $V_1 \cap V_2$ est encore un voisinage de x_0. En particulier $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

1.2 Limite finie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 3 Limite finie à gauche en x_0
Soit x_0 un point de I, ou la borne droite de I.
On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite à gauche en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[, \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On le note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x_0^-} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \overset{<}{\to} x_0}{\longrightarrow} \ell$.
Dans ce cas, on pose $f(x_0^-) = \ell$.

Remarquons qu'on peut avoir $x_0 \notin \mathscr{D}_f$.

On peut remplacer $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ par $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Mais cette dernière inégalité est équivalente à l'encadrement $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$. On obtient donc une nouvelle écriture de la définition :

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell, \quad \exists V_g \text{ voisinage à gauche de } x_0 \,/\, \forall x \in V_g, \ f(x) \in W$$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$.

Définition 4 Limite finie à droite en x_0
Soit x_0 un point de I, ou la borne gauche de I.
On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite à droite en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[, \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On le note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x_0^+} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \overset{>}{\to} x_0}{\longrightarrow} \ell$.
Dans ce cas, on pose $f(x_0^+) = \ell$.

Remarquons qu'on peut avoir $x_0 \notin \mathscr{D}_f$.

On peut remplacer $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ par $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, ce qui donne comme précédemment une nouvelle écriture de la définition :

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell, \quad \exists V_d \text{ voisinage à droite de } x_0 \,/\, \forall x \in V_d, \ f(x) \in W$$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$.

Définition 5 Limite finie en x_0
Soit x_0 un point de I qui n'est pas une borne de I (ie $x_0 \in \mathring{I}$).
On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On le note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

1 Limite en un point de $\overline{R}$

Remarquons cette fois qu'il est nécessaire que $x_0 \in \mathscr{D}_f$.

⚠ ATTENTION ! On ne devrait donc pas écrire que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ puisque la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0. On devrait écrire à la place que $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, ou sous-entendre qu'on a posé $\dfrac{\sin(0)}{0} = 1$ pour avoir une fonction définie en 0.

Encore une fois, on peut remplacer $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ par $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, ce qui donne comme précédemment une nouvelle écriture de la définition :

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell, \quad \exists V \text{ voisinage de } x_0 \,/\, \forall x \in V,\ f(x) \in W$$

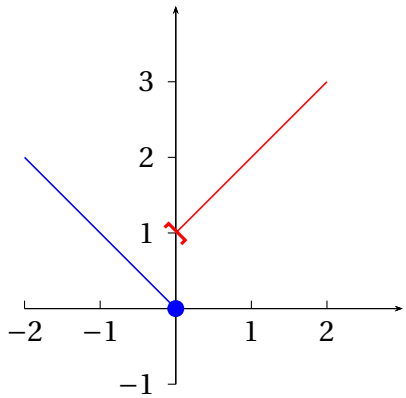
Théorème 6 Lien entre $f(x_0)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\ell = f(x_0)$.

⚠ ATTENTION : ceci est faux avec une limite à gauche ou à droite, comme le montre l'exemple de la fonction partie entière.

Théorème 7 Lien entre $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$
Si $x_0 \in \mathscr{D}_f$:

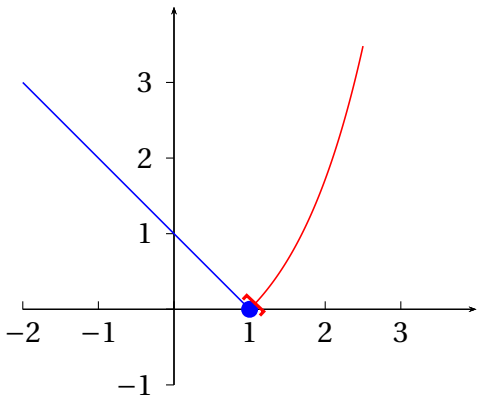
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x_0^-) = \ell \\ f(x_0^+) = \ell \\ \ell = f(x_0) \end{cases}$$

Exemple **:** $f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x \leq 0 \\ x+1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



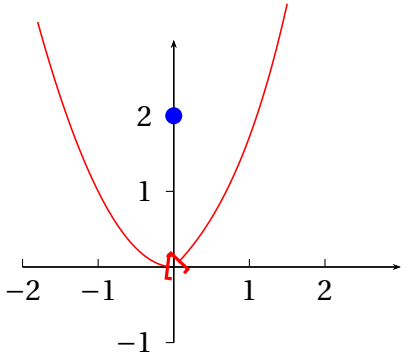
Sur cette exemple $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas puisque $f(0^-) = 0 \neq 1 = f(0^+)$.

Exemple **:** $f(x) = \begin{cases} 1-x \text{ si } x \leq 1 \\ \mathrm{e}^{x-1} - 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



Sur cette exemple $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, car $\begin{cases} f(1^-) = 0 \\ f(1^+) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$.

Exemple **:** $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \\ \mathrm{e}^x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



Sur cette exemple $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas, bien que $f(0^-) = f(0^+) = 0$. En effet $f(0) = 2 \neq 0$.

1.3 Limite infinie en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 8 Limite infinie à gauche en x_0
Soit x_0 un point de I, ou la borne droite de I.

1. On dit que f admet $+\infty$ pour limite à gauche en x_0 lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[, \ f(x) \geq A$$

On le note $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x_0^-} f = +\infty$ ou encore $f(x) \underset{x \overset{<}{\to} x_0}{\longrightarrow} +\infty$.
De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } +\infty, \quad \exists V_g \text{ voisinage à gauche de } x_0 \,/\, \forall x \in V_g, \ f(x) \in W$$

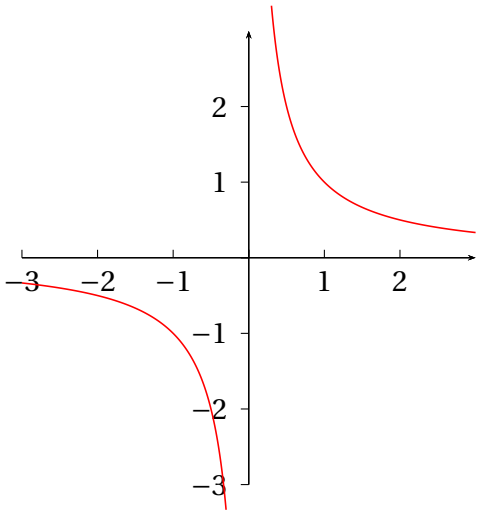
2. On dit que f admet $-\infty$ pour limite à gauche en x_0 lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[, \ f(x) \leq A$$

On le note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x_0^-} f = -\infty$ ou encore $f(x) \underset{x \overset{<}{\to} x_0}{\longrightarrow} -\infty$.
De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } -\infty, \quad \exists V_g \text{ voisinage à gauche de } x_0 \ / \ \forall x \in V_g, \ f(x) \in W$$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.



Définition 9 Limite infinie à droite en x_0
Soit x_0 un point de I, ou la borne gauche de I.

1. On dit que f admet $+\infty$ pour limite à droite en x_0 lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[, \ f(x) \geq A$$

On le note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x_0^+} f = +\infty$ ou encore $f(x) \underset{x \overset{>}{\to} x_0}{\longrightarrow} +\infty$.
De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } +\infty, \quad \exists V_d \text{ voisinage à droite de } x_0 \ / \ \forall x \in V_d, \ f(x) \in W$$

2. On dit que f admet $-\infty$ pour limite à droite en x_0 lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[, \ f(x) \leq A$$

On le note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x_0^+} f = -\infty$ ou encore $f(x) \underset{x \overset{>}{\to} x_0}{\longrightarrow} -\infty$.
De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } -\infty, \quad \exists V_d \text{ voisinage à droite de } x_0 \ / \ \forall x \in V_d, \ f(x) \in W$$

Exemple : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

1.4 Limite finie/infinie en $\pm\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 10 Limite finie/infinie en $+\infty$

1. On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \in \mathbb{R} / \ \forall x \geq B, \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

   On le note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
   De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell, \quad \exists V \text{ voisinage de } +\infty \big/ \ \forall x \in V, \ f(x) \in W$$

2. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R} / \ \forall x \geq B, \ f(x) \geq A$$

   On le note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ ou encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } +\infty, \quad \exists V \text{ voisinage de } +\infty \big/ \ \forall x \in V, \ f(x) \in W$$

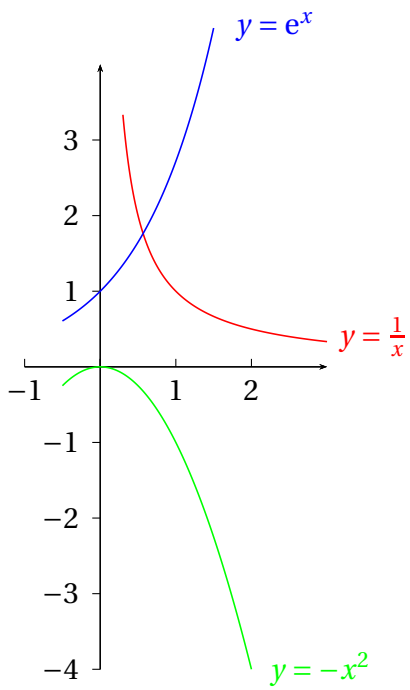
3. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R} / \ \forall x \geq B, \ f(x) \leq A$$

   On le note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ ou encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
   De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } -\infty, \quad \exists V \text{ voisinage de } +\infty \big/ \ \forall x \in V, \ f(x) \in W$$

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$.



Définition 11 Limite finie/infinie en $-\infty$

1. On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $-\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \in \mathbb{R} / \ \forall x \leq B, \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On le note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$.
De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell, \quad \exists V \text{ voisinage de } -\infty \big/ \ \forall x \in V, \ f(x) \in W$$

2. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R} / \ \forall x \leq B, \ f(x) \geq A$$

On le note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ ou encore $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } +\infty, \quad \exists V \text{ voisinage de } -\infty \big/ \ \forall x \in V, \ f(x) \in W$$

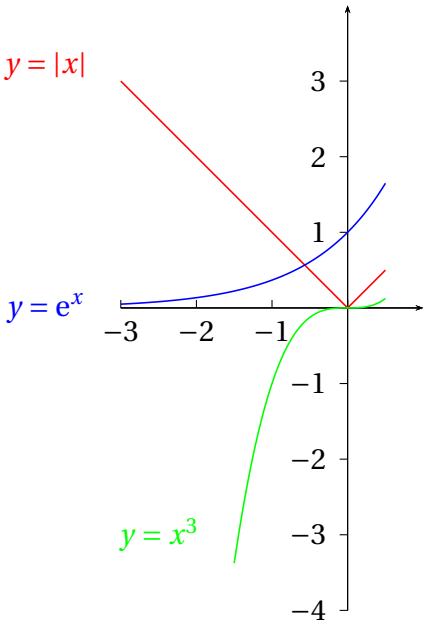
3. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R} / \ \forall x \leq B, \ f(x) \leq A$$

On le note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ ou encore $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } -\infty, \quad \exists V \text{ voisinage de } -\infty \big/ \ \forall x \in V, \ f(x) \in W$$

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.



1.5 Extensions dans le cas d'une limite finie

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si on a $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $f(x) \geq l$ au voisinage à droite de x_0, on le note $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \ell^+$.
- Si on a $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $f(x) \leq l$ au voisinage à droite de x_0, on le note $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \ell^-$.
- Si on a $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $f(x) \geq l$ au voisinage à gauche de x_0, on le note $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \ell^+$.
- Si on a $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $f(x) \leq l$ au voisinage à gauche de x_0, on le note $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \ell^-$.
- Si on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $f(x) \geq l$ au voisinage de x_0, on le note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell^+$.
- Si on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $f(x) \leq l$ au voisinage de x_0, on le note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell^-$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$, ce qui permet de conclure que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

1.6 Unicité de la limite

Théorème 12 Unicité de la limite
Si la limite existe, elle est unique ie :
si on a $(x_0, \ell, L) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^3$ tel que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ alors $\ell = L$.

On a les mêmes résultats quand $x \overset{>}{\to} x_0$ ou $x \overset{<}{\to} x_0$.

2 Théorèmes généraux sur les limites

2.1 Opérations algébriques sur les limites

On se donne f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I (ie que $x_0 \in I$ ou x_0 est une des deux bornes de I).

Dans le théorème suivant, on utilise les règles de calculs dans $\overline{\mathbb{R}}$ définies au chapitre sur les suites réelles (chapitre 4).

Théorème 13 Opérations sur les limites

1. Somme. Si f et g ont une limite en x_0 alors :

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) \overset{\text{existe}}{=} \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

   ⚠ sauf en cas de FI : $(+\infty)+(-\infty)$.

2. Multiplication par un réel. Si f a une limite en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$$\lim_{x\to x_0} \lambda.f(x) \overset{\text{existe}}{=} \lambda \times \lim_{x\to x_0} f(x)$$

   ⚠ sauf en cas de FI : $0\times(\pm\infty)$.

3. Produit. Si f et g ont une limite en x_0 alors :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\times g(x) \overset{\text{existe}}{=} \lim_{x\to x_0} f(x) \times \lim_{x\to x_0} g(x)$$

   ⚠ sauf en cas de FI : $(+\infty)\times 0$.

4. Inverse. Si f a ont une limite en x_0 alors :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} \overset{\text{existe}}{=} \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$$

   ⚠ sauf en cas de FI : $\frac{1}{0}$ $\left(\text{il faut préciser } \frac{1}{0^+}=+\infty \text{ ou } \frac{1}{0^-}=-\infty\right)$.

5. Quotient. Si f et g ont une limite en x_0 alors :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{existe}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

   ⚠ sauf en cas de FI : $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ et $\frac{0}{0}$.

On a les mêmes résultats avec des limites à droite/gauche.

2.2 Composition de limites

2.2.1 Fonction composée de deux fonctions

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subseteq J$:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ I \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g\circ f"'] & \end{tikzcd}$$

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I (ie $a \in I$ ou a est une borne de I), $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à J, et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 14 Théorème de la limite de la fonction composée
On suppose que $\lim\limits_{x \to \boxed{a}} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \boxed{L}$.

Alors $\lim\limits_{x \to \boxed{a}} g\big(f(x)\big) \overset{\text{existe}}{=} \boxed{L}$.

On a le même résultat avec des limites à droite/gauche.

⚠ ATTENTION ! Ce résultat ne dit pas que $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)} = \left(\lim\limits_{x \to a} u(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x \to a} v(x)\right)}$. Par exemple, on verra à la fin du chapitre que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \neq 1$.

2.2.2 Suite composée d'une suite et d'une fonction

On rappelle un théorème vu dans le chapitre sur les suites réelles (chapitre 4, théorème 4.33).

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I à partir d'un rang n_0, ie telle que : $\forall n \geq n_0$, $u_n \in I$. On peut donc considérer la suite $\big(f(u_n)\big)_{n \geq n_0}$.

Soient $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I (ie $\ell \in I$ ou a est une borne de I), et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 15 Théorème de la limite de la fonction composée
On suppose que (u_n) converge vers $\boxed{\ell}$ et que $\lim\limits_{x \to \boxed{\ell}} f(x) = \boxed{a}$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) \overset{\text{existe}}{=} \boxed{a}$.

On a le même résultat avec des limites à droite/gauche.

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x)$ n'existe pas.

2.3 Limites et inégalités

2.3.1 Limite et inégalités locales

On se donne f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I (ie que $x_0 \in I$ ou x_0 est une des deux bornes de I).

Théorème 16 Limite finie et bornitude
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et est finie, alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est bornée.

On a le même résultat avec une limite à droite/gauche et un voisinage à droite/gauche.

Théorème 17 Limite et signe local

1. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors il existe un voisinage V de x_0 tel que :
$$\forall x \in V, \quad f(x) > 0$$
2. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, alors il existe un voisinage V de x_0 tel que :
$$\forall x \in V, \quad f(x) < 0$$

On a le même résultat avec une limite à droite/gauche et un voisinage à droite/gauche.

Corollaire 18 Limite finie et majorant/minorant

1. Si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $f(x) \geq m$ et si f a une limite finie au point x_0 alors :
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geq m$$
2. Si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $f(x) \leq M$ et si f a une limite finie au point x_0 alors :
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq M$$

On a les mêmes résultats avec une limite à droite/gauche.

⚠ ATTENTION ! Ces résultats sont faux avec des inégalités strictes. Par exemple $\dfrac{1}{x} > 0$, pour tout $x \in]0, +\infty[$, mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Corollaire 19 Passage à la limite dans une inégalité Si on a $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x)$, et si f et g ont une limite finie au point x_0, alors :
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

⚠ ATTENTION ! Encore une fois ce résultat est faux avec une inégalité stricte : $f(x) < g(x)$ ne donne pas $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ mais seulement $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

2.3.2 Calculs de limites par inégalité

On se donne f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I (ie que $x_0 \in I$ ou x_0 est une des deux bornes de I).

Proposition 20 Limite et valeur absolue

1. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$.
2. Si $\ell \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to x_0} |f(x) - \ell| = 0$$

Théorème 21 Théorème d'existence de la limite par encadrement

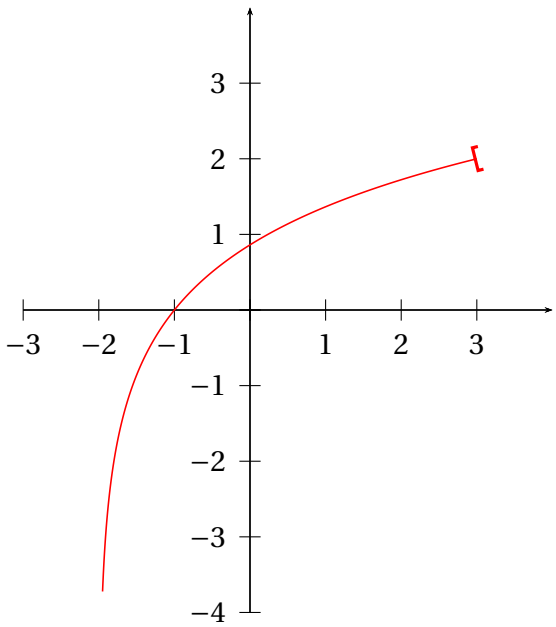
1. <u>Version limite finie</u>.
On suppose que f, g et h sont trois fonctions définies sur I telles que : $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
On suppose de plus que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\lim_{x\to x_0} g(x) \overset{\text{existe}}{=} \ell$$
2. <u>Version limite infinie</u>.
On suppose que f, g sont deux fonctions définies sur I telles que : $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$.
On a :
   - Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \overset{\text{existe}}{=} +\infty$.
   - Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} -\infty$.

2.4 Limites des fonctions monotones

Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une fonction définie sur $]a, b[$.

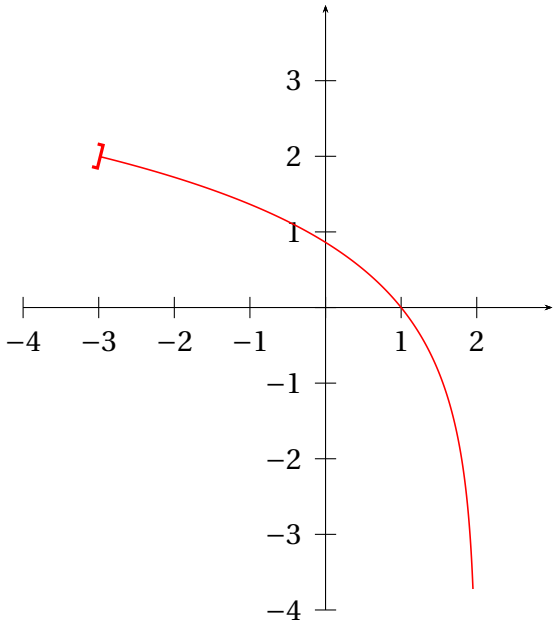
Théorème 22 Théorème de la limite monotone pour une fonction croissante
On suppose que f est croissante sur $]a,b[$. Alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existent. Plus précisément :
• si f est majorée sur I alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ est finie et $\forall x \in]a,b[,\ f(x) \leq \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$;
si f n'est pas majorée sur I, alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$
• si f est minorée sur I alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ est finie et $\forall x \in]a,b[,\ f(x) \geq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$;
si f n'est pas minorée sur I, alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

Exemple **:** Une fonction croissante sur $]-2,3[$ majorée mais non minorée.
On a $\lim\limits_{-2^+} f = -\infty$ et $\lim\limits_{3^-} f = 2$.



Théorème 23 Théorème de la limite monotone pour une fonction décroissante
On suppose que f est décroissante sur $]a,b[$. Alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existent. Plus précisément :
• si f est minorée sur I alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ est finie et $\forall x \in]a,b[,\ f(x) \geq \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$;
si f n'est pas minorée sur I, alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$
• si f est majorée sur I alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ est finie et $\forall x \in]a,b[,\ f(x) \leq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$;
si f n'est pas majorée sur I, alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -+\infty$

Exemple **:** Une fonction décroissante sur $]-3,2[$ majorée mais non minorée.
On a $\lim\limits_{-3^+} f = 2$ et $\lim\limits_{2^-} f = -\infty$.



Corollaire 24 Existence de la limite à droite/gauche pour une fonction monotone
Si f est monotone sur un intervalle I alors en tout $x_0 \in I$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ existent (en une borne de I une seule de ces deux limites est possible).
De plus, on a :
- si f croissante : $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$;
- si f décroissante : $f(x_0^+) \leq f(x_0) \leq f(x_0^-)$;

3 Comparaison de fonctions

On se donne f et g deux foncions définies sur un intervalle I et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I (ie que $x_0 \in I$ ou x_0 est une des deux bornes de I).

On va définir plusieurs notions permettant de **comparer** les fonctions f et g au voisinage de x_0.

3.1 Fonctions équivalentes

Définition 25 Fonctions équivalentes
On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0, lorsqu'il existe V voisinage de x_0 et une fonction $u : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in V, \quad f(x) = u(x) \times g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} u(x) = 1$$

On le note $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$.

On peut aussi définir $f(x) \underset{x \to x_0^-}{\sim} g(x)$ et $f(x) \underset{x \to x_0^+}{\sim} g(x)$.

Proposition 26 Propriétés de la relation ~
On se donne trois fonctions f, g et h définies sur I.

1. Transitivité. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$ donnent $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$.
2. Symétrie. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$.
3. Réflexivité. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$.

La propriété de symétrie donne que si f est équivalente à g au voisinage de x_0, alors g est équivalente à f au voisinage de x_0 : on peut donc aussi dire que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0.

⚠ ATTENTION : ne jamais écrire que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} 0$. Cela na aucun sens, sauf dans le cas très particulier où f est la fonction constante égale à 0 sur un voisinage de x_0.

Lorsque la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage V de x_0 , sauf éventuellement en x_0 (ie $\forall x \in V\setminus\{x_0\}$, $g(x) \neq 0$), on a un critère plus simple.

Théorème 27 Critère d'équivalence
Si g ne s'annule pas sur un voisinage V de x_0, sauf éventuellement en x_0, on a :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Ce résultat est utilisé en pratique pour prouver que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.

⚠ ATTENTION : ce n'est pas toujours possible. En effet $f(x) = \frac{x+1}{x}\sin(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sin(x)$, mais $g(x) = \sin(x)$ s'annule sur tout voisinage de $+\infty$.
Sur cet exemple, la fonction $\frac{f}{g}$ n'existe pas au voisinage de $+\infty$.

Une fonction équivalente renseigne sur le signe.

Théorème 28 Équivalent et signe

1. Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et si g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0, alors f ne s'annule pas sur un voisinage de x_0.
2. Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, alors f et g sont de même signe au sens strict sur un voisinage de x_0.

Une fonction équivalente permet de calculer une limite.

Théorème 29 Équivalent et limite

1. Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} \ell$.
2. On a une réciproque dans le cas particulier $\ell \in \mathbb{R}^*$: si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ell$.

On peut effectuer les opérations suivantes sur les fonctions équivalentes.

Proposition 30 Règles de calcul pour la relation $\sim$
On se donne des fonctions f_1, g_1, f_2 et g_2 définies sur I.

1. Valeur absolue. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ donne $|f_1(x)| \underset{x\to x_0}{\sim} |g_1(x)|$.
2. Produit. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x)$ donnent $f_1(x)\times f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)\times g_2(x)$.
3. Puissance. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ donne $f_1(x)^p \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)^p$.
   Plus généralement, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$: $f_1(x)^\alpha \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)^\alpha$ (à condition que ces fonctions soient définies au voisinage de x_0).
4. Inverse. Si $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ et si g_1 ne s'annule pas au voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0), alors $\dfrac{1}{f_1(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{1}{g_1(x)}$.
5. Quotient. Si $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$, $f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x)$ et si g_1 ne s'annule pas au voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0), alors $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}$.

⚠ ATTENTION : par contre il n'est pas possible de faire les opérations suivantes.

• **Somme**

$f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x)$ ne donnent pas $f_1(x)+f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)+g_2(x)$.
On peut considérer le contre-exemple suivant : $f_1(x) = x^3+x$ et $g_1(x) = -x^3+x^2$ lorsque $x\to+\infty$.

• **Composition par une fonction**

Si h est une fonction, $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ ne donne pas $h\circ f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h\circ g_1(x)$.
En particulier $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ ne donne pas $\mathrm{e}^{f_1(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \mathrm{e}^{g_1(x)}$, et $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ ne donne pas $\ln\big(f_1(x)\big) \underset{x\to x_0}{\sim} \ln\big(g_1(x)\big)$.
On peut considérer les contre-exemples suivantes : $f_1(x) = x^2+x$, $g_1(x) = x^2$, $h(x) = \mathrm{e}^x$ puis $f_1(x) = 1+\dfrac{1}{x}$, $g_1(x) = 1$, $h(x) = \ln(x)$, dans les deux cas lorsque $x\to+\infty$.
Par contre on peut composer la fonction $x \longmapsto x^\alpha$, c'est le seul cas possible !

• **Puissance dépendante de x**

$f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ ne donne pas $f_1(x)^{\alpha(x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} g_1(x)^{\alpha(x)}$.
A partir de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$, on peut déduire le contre-exemple $f_1(x) = 1+\dfrac{1}{x}$ et $\alpha(x) = x$.

Le résultat suivant permet de passer de deux fonctions équivalentes à deux suites équivalentes.

Théorème 31 Substitution dans un équivalent
On suppose que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.

1. Par une fonction. On suppose qu'on a une fonction $x : t \longmapsto x(t)$ telle que $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$. Alors :
$$f(x(t)) \underset{t\to t_0}{\sim} g(x(t))$$
2. Par une suite. On suppose qu'on dispose d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite x_0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$. Alors :
$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$$

⚠ ATTENTION ! Il ne faut pas confondre **substitution** et **composition** (qui n'est pas autorisée avec les équivalents).

On donne des exemples dans le paragraphe suivant.

3.2 Équivalents usuels

Pour les polynômes on a le résultat intuitif vu au lycée.

Théorème 32 Équivalent et polynômes
Si P est une fonction polynôme de la forme $P(x) = a_q x^q + a_{q+1}x^{q+1} + \cdots + a_p x^p$, où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \geq q$, $a_q \neq 0$ et $a_p \neq 0$. Alors :
- **en** $+\infty$ **:** $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_p x^p$ (plus haut degré)
- **en** 0 **:** $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_q x^q$ (plus bas degré).

Les limites apprises pour les fonctions usuelles donnent les équivalents suivants.

Théorème 33 Équivalents usuels en 0

1. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
2. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
3. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
4. $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
5. $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$: $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$

Ces résultats sont à connaître par coeur !

Exemple **:** On a : $\sin(x)+\sin(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

Exemple **:** On est maintenant en mesure de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

3.3 Notations de Landau

Définition 34 Fonction négligeable
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0, lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $\varepsilon : V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in V, \quad f(x) = \varepsilon(x) \times g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

On le note $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$, et on le lit « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ lorsque $x \to x_0$ ».

On peut aussi définir $f(x) \underset{x\to x_0^-}{=} o\big(g(x)\big)$ et $f(x) \underset{x\to x_0^+}{=} o\big(g(x)\big)$.

Définition 35 Fonction dominée
On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0, lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $b : V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in V, \quad f(x) = b(x) \times g(x) \qquad \text{et la fonction } b \text{ est bornée sur } V$$

On le note $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$, et on le lit « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ lorsque $x \to x_0$ ».

On peut aussi définir $f(x) \underset{x\to x_0^-}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$ et $f(x) \underset{x\to x_0^+}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$.

Lorsque la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage V de x_0 , sauf éventuellement en x_0 (ie $\forall x \in V\backslash\{x_0\}$, $g(x) \neq 0$), on a un critère plus simple.

Théorème 36 Critère de négligeabilité et critère de domination

1. Si g ne s'annule pas sur un voisinage V de x_0, sauf éventuellement en x_0, on a :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

2. Si g ne s'annule pas sur un voisinage V de x_0, sauf éventuellement en x_0, on a :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big) \Longleftrightarrow \text{la fonction } \frac{f}{g} \text{ est bornée sur un voisinage de } x_0$$

Ce résultat est utilisé en pratique pour prouver que $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$ ou que $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$.

En particulier, on peut retenir que :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(1) \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

et que :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathcal{O}(1) \iff \text{la fonction } f \text{ est bornée sur un voisinage de } x_0$$

Théorème 37 Lien entre la relation ~ et « le petit o »
On a :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \iff g(x) - f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(f(x)\big)$$

On en déduit une méthode simple pour trouver une fonction équivalente à une somme.

Corollaire 38 Équivalent d'une somme
On a :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \iff f(x) + g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$$

Le résultat suivant relie le « petit o » et le « grand O ».

Proposition 39 Lien entre « le petit o » et « le grand o »
Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$ alors $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$.

Proposition 40 Règles de calcul pour « le petit o »
On se donne des fonctions f_1, g_1, h_1, f_2 et g_2.

1. Transitivité. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)\big)$ et $g_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h_1(x))$ donnent $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h_1(x))$.
2. Produit. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)\big)$ et $f_2(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_2(x)\big)$ donnent $f_1(x) \times f_2(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x) \times g_2(x)\big)$.
3. Somme. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h_1(x))$ et $g_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h_1(x))$ donnent $f_1(x) + g_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h_1(x))$.
4. Multiplication par une constante. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)\big)$ donne $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \times f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)\big)$.
5. Multiplication par une fonction. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)\big)$ donne $f_1(x) \times h_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x) \times h_1(x)\big)$.
6. Composition par une fonction équivalente. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)\big)$ et $g_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h_1(x)$ donnent $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h_1(x))$.

On a des règles de calcul similaires pour le « grand O ».

Exemple **:** Trouver un équivalent en 0 de $\sin(x) + 1 - \cos(x)$.

3.4 Croissances comparées

Théorème 41 Croissances comparées
On se donne trois réels α, β et γ.

1. Pour $\alpha > 0$: $(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\alpha\right)$ et $|\ln x|^\beta \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$.
2. Pour $\gamma > 0$: $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\gamma x}\right)$ et $|x|^\alpha \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-\gamma x}\right)$.
3. Pour $\gamma > 0$: $(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\gamma x}\right)$.

De manière mnémotechnique, on peut retenir que : ln $\ll$ puissance $\ll$ exp

4 Développements limités

On notera $f(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x) + o\big(h(x)\big)$ lorsque $f(x) - g(x) \underset{x\to x_0}{=} o\left(h(x)\right)$.

4.1 Développement limité d'ordre n en un point $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Définition 42 Développement limité d'ordre n en un point $x_0 \in \mathbb{R}$
Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n en x_0 (en abrégé $DL_n(x_0)$), lorsqu'il existe des réels a_0 ,a_1, …, a_n tels que :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big) \\ &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big) \end{aligned}$$

On peut définir de la même manière un $DL_n(x_0^+)$ de f ou un $DL_n(x_0^-)$ de f.

On utilisera principalement des $DL_n(0)$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o\big(x^n\big) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\big(x^n\big)$$

Définition 43 Développement limité d'ordre n en $+\infty$
Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n en $+\infty$ (en abrégé $DL_n(+\infty)$), lorsqu'il existe des réels a_0 ,a_1, …, a_n tels que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

On peut définir de la même manière un $DL_n(-\infty)$ de f.

Grâce au théorème suivant, on pourra toujours se ramener à des $DL_n(0)$.

Théorème 44 On peut toujours se ramener à un $DL_n(0)$

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0.
   On pose $g(h) = f(x_0 + h)$, ie $f(x) = g(x - x_0)$.
   Alors f admet un $DL_n(x_0)$ si et seulement si g admet un $DL_n(0)$, et les coefficients sont les mêmes dans les deux développements. Autrement dit :
   $$\begin{aligned} & f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big) \\ \iff\ & g(h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o\big(h^n\big) \end{aligned}$$
2. Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$).
   On pose $g(h) = f\left(\frac{1}{h}\right)$, ie $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$.
   Alors f admet un $DL_n(+\infty)$ (resp. un $DL_n(-\infty)$) si et seulement si g admet un $DL_n(0^+)$ (resp. un $DL_n(0^-)$), et les coefficients sont les mêmes dans les deux développements. Autrement dit :
   $$\begin{aligned} & f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ \iff\ & g(h) \underset{h\to 0^+}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o\big(h^n\big) \end{aligned}$$

4.2 Développements limités usuels en 0

Il faut connaître les formules suivantes **au voisinage de** 0.

• **Exponentielle.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le $DL_n(0)$ de e^x :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x & \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\big(x^n\big) \\ & \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\big(x^n\big) \end{aligned}$$

Exemple : $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\big(x^2\big)$ et $\mathrm{e}^x \underset{x\to 1}{=} \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \frac{\mathrm{e}}{2}(x-1)^2 + \frac{\mathrm{e}}{6}(x-1)^3 + o\big((x-1)^3\big)$.

• **Logarithme.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a le $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$:

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\big(x^n\big)\\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o\big(x^n\big)\end{aligned}$$

et à l'ordre 0 : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} 0 + o(1) \underset{x\to 0}{=} o(1)$.

Exemple **:** $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o\big(x^3\big)$ et $\ln(x) \underset{x\to 1}{=} (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + o\big((x-1)^2\big)$.

• **Puissance.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a le $DL_n(0)$ de $(1+x)^\alpha$:

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots\\ &\qquad \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\times\cdots\times(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\big(x^n\big)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\times\cdots\times(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o\big(x^n\big)\end{aligned}$$

et à l'ordre 0 : $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + o(1)$.

Exemple **:** $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o\big(x^2\big)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}x^2 + o\big(x^2\big)$.

Il faut connaître le cas particulier suivant, pour $\alpha = -1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o\big(x^n\big)\\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\big(x^n\big)\end{aligned}$$

Exemple **:** $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o\big(x^3\big)$.

• **Sinus.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le $DL_{2n+2}(0)$ de $\sin(x)$:

$$\begin{aligned}\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big)\\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big)\end{aligned}$$

Exemple **:** $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o\big(x^4\big)$.

• **Cosinus.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le $DL_{2n+1}(0)$ de $\cos(x)$:

$$\begin{aligned}\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right)\end{aligned}$$

Exemple **:** $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$ et $\sin(x) \underset{x\to \frac{\pi}{2}}{=} 1 - \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^3\right)$.

4.3 Opérations sur les développements limités

Á partir des développements limités précédents, et des règles de calcul suivantes, on peut trouver des développements limités de la plupart des fonctions.

Définition 45 Troncature d'une fonction polynômiale

Soit $f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ une fonction polynômiale de degré n.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on appelle troncature de f à l'ordre p la fonction notée $T_p(f)$:

$$T_p(f) : x \longmapsto \begin{cases} \sum_{k=0}^{p} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p \text{ si } p \leq n \\ f(x) \text{ si } p \geq n+1 \end{cases}$$

Théorème 46 Règles de calcul sur les développements limités

On suppose que f et g toutes deux un $DL_n(0)$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o\left(x^n\right)$$

1. Troncature. Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, f admet un $DL_p(0)$ obtenu en tronquant son $DL_n(0)$ à l'ordre p :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + o\left(x^p\right)$$

2. Combinaison linéaire. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda.f + \mu.g$ admet un $DL_n(0)$:

$$\alpha.f(x) + \beta.g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (\alpha.a_k + \beta.b_k) x^k + o\left(x^n\right)$$

3. Produit. $f \times g$ admet un $DL_n(0)$:

$$f(x) \times g(x) \underset{x\to 0}{=} T_n\Bigg[\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right)}_{\text{à développer}}\Bigg] + o\left(x^n\right)$$

4. Multiplication/division par une puissance de x. Si $p \in \mathbb{Z}$:

$$x^p f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k+p} + o\left(x^{n+p}\right)$$

ce qui peut donner un $DL_{n+p}(0)$ (⚠ l'ordre a changé !).

5. Substitution. Si $x : t \longmapsto x(t)$ est une fonction telle que $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = 0$, on a le développement asymptotique :

$$f\left(x(t)\right) \underset{t\to t_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x(t)^k + o\left(x(t)^n\right)$$

et donc pour $x(t) = t^p$ avec $p \in \mathbb{Z}$:

$$f\left(t^p\right) \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k t^{pk} + o\left(t^{np}\right)$$

ce qui peut donner un $DL_{np}(0)$ (⚠ l'ordre a changé !).

⚠Les opérations de composition et de division sont possibles mais ne sont pas au programme.

Exemple : Combinaison linéaire.

$$1 - \cos(x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} -x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

Exemple : Produit.

$$\frac{\mathrm{e}^x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

Exemple : Multiplication/division par une puissance de x.

$$\mathrm{e}^x \frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

Exemple : Substitution.

$$\frac{1}{1+x^3} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^3 + x^6 + o\left(x^6\right) \qquad 2^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x.\ln(2) + x^2\frac{\ln^2(2)}{2} + o\left(x^2\right)$$

On voit déjà se dégager un premier intérêt des développements limités par rapport aux équivalents : la somme de deux développements limités sont autorisés !

4.4 Développements limités et recherche de fonction équivalente

Théorème 47 Fonction équivalente et développements limités
Si f admet un $DL_n(0)$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=p}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n + o\left(x^n\right)$$

avec $a_p \neq 0$, alors :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$$

ie que f est équivalente au premier terme non nul du développement limité.

Un développement limité sera donc utilisé pour trouver l'équivalent d'une somme de fonctions.

Pour un quotient de fonctions, on cherche un développement limité du numérateur et du dénominateur, et on en déduit pour chacun un équivalent, ce qui donne ensuite un équivalent du quotient.

Exemple **:** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x^2}} = 1.$

5 Exercices

Exercice 1

1. **Opérations sur les limites.** Déterminer les limites suivantes. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x \ln(\ln x)$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln(\sin x) - \ln x)$
   (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}$
   (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$
   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x(x+1)}$
   (g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$
2. **Quantité conjuguée.** Déterminer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{x\sqrt{1+x}-x}$
3. **Limites par encadrement.** Déterminer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos e^x}{x^2+1}$
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 2 **Utilisation des équivalents.** Déterminer les limites suivantes.

1. **Logarithme et exponentielle.**
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(1+x) - \ln x)$
   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x-1}{x}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{x^2}$
   (d) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}$
   (e) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$
2. **Puissances réelles.**
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$

3. **Fonctions trigonométriques.**

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{\pi}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(3x)}{1-2\cos(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{e^{-\frac{\pi}{2}x^2}-e^{-\frac{\pi}{2}}}$

Exercice 3 Passer au logarithme dans un équivalent (???)

1. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \overline{R}$ et à valeurs strictement positives.
   On suppose que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}^+}\setminus\{1\}$.
   Établir que $\ln f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ln g(x)$.
2. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \ln\left(x^2+2^x\right)$.

Exercice 4 Le théorème des gendarmes permet de trouver des équivalents.
Soit f une fonction telle qu'au voisinage de $+\infty$, on ait :

$$x^2+\frac{1}{x} \leq f(x) \leq x^2+x.$$

Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 5 Calculer les développements limités suivants :

1. $DL_2(0)$ de $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
2. $DL_3(0)$ de $\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{1+x}$
3. $DL_2(2)$ de $\frac{1}{x}$
4. $DL_3(\pi/4)$ de $\frac{\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi-4x}$

Exercice 6 Plus difficile. À l'aide de développements limités, calculer les limites suivants :

1. $\lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{\sin(t)}\right)$ et $\lim\limits_{t\to0}\left(-\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{\cos(t)}{\sin^2(t)}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x-\sin(x)\right)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$
3. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-\ln(1+x)+\ln(2)-1}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x}$

Exercice 7 Utiliser des développements limités pour calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\left(2+\cos(x)\right)-3\sin(x)}{x^5}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2(x)}-\dfrac{1}{x^2}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$

Chapitre 9

Polynômes

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1 Polynôme
Une fonction $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction polynôme (ou plus simplement un polynôme) à coefficients dans $\mathbb{K}$ lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Notations :

• L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$. Il est clair que $\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$, conséquence immédiate du fait que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
• Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note X^k la fonction polynôme $x \longmapsto x^k$.
• Le polynôme $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ se note donc plus simplement $P = P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec la convention $a_0 X^0 = a_0$.

Quelques polynômes particuliers :

• Le polynôme nul : $P(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$, défini par $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = 0_{\mathbb{K}}$.
• Les polynômes constants : $P(X) = a \in \mathbb{K}$, définie par $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = a$.
• Un polynôme n'ayant qu'un seul (resp. deux, resp. trois) coefficient(s) non nul(s) est appelé monôme (resp. binôme, resp. trinôme).

***Exemple* :** $P(X) = \sqrt{2}$ est constant ; $Q(X) = 2X^2 + X^5$ est un binôme ; $R(X) = -X^3$ est un monôme.

Théorème 2 Unicité des coefficients
Les coefficients d'un polynôme sont uniques, ie que si on a $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

alors :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = b_k$$

Démonstration : On se ramène à : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0_{\mathbb{K}[X]}$. On procède par récurrence sur n et, pour l'hérédité, on calcule $P(2x) - 2P(x)$, pour tout $x \in \mathbb{K}$.

CQFD □

Corollaire 3 Unicité de l'écriture d'un polynôme non nul
Tout $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, s'écrit de manière unique $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $\boxed{a_n \neq 0}$.

Définition 4 Degré d'un polynôme
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. On dit que P est de degré n lorsqu'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\boxed{a_n \neq 0_{\mathbb{K}}}$.
n est alors unique, on le note $\deg(P)$ ou $d^\circ P$.

On adopte parfois la convention $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$. Cela permet de simplifier certains résultats sur le degré.
Par exemple : P est un polynôme constant $\iff P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ ou $\left(P \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ et } \deg(P) = 0 \right)$
devient : P est un polynôme constant $\iff \deg(P) \leq 0$

Notations :
• L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\mathbb{K}_n[X] = \left\{ P \in \mathbb{K}[X] \middle/ \deg(P) \leq n \right\}$$

• Il est clair que $\mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}[X]$, que $\mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}_{n+1}[X]$ et plus généralement que, si $n \leq m$, $\mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}_m[X]$.
• De plus on peut remarquer que $\mathbb{K}_0[X]$ désigne l'ensemble des polynômes constants.

Vocabulaire : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.
• Terme dominant de P : c'est le monôme de plus haut degré, de la forme $a_n X^n$ avec $n = \deg(P)$ et $a_n \neq 0_{\mathbb{K}}$.
• Coefficient dominant de P : c'est le coefficient du terme dominant, de la forme a_n avec $n = \deg(P)$ et $a_n \neq 0_{\mathbb{K}}$.

• Terme constant de P : c'est le coefficient de degré 0, noté a_0. Remarquer que c'est la valeur de P en 0 : $P(0) = a_0$.

Définition 5 Polynôme unitaire
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. On dit que P est unitaire lorsque son coefficient dominant est égal à 1.

Exemple **:** $P(X) = X^5 - 2X + 3$ est unitaire, de degré 5, de terme dominant X^5, de coefficient dominant 1 et de terme constant 3.

Définition 6 Égalité de deux polynômes
Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Alors :

$$P(X) = Q(X) \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = Q(x)$$

Théorème 7 Égalité de deux polynômes
Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Alors :

$$P(X) = Q(X) \Longleftrightarrow P \text{ et } Q \text{ ont même degré et même coefficients}$$

1.2 Opérations sur les polynômes

Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit les fonctions suivantes $P+Q$, $\lambda.P$, $P \times Q$ et $Q \circ P$ par :

$$\begin{array}{rrcl} \forall x \in \mathbb{K}, & (P+Q)(x) & = & P(x) + Q(x) \\ & (\lambda.P)(x) & = & \lambda \times P(x) \\ & (Q \circ P)(x) & = & Q\big(P(x)\big) \\ & (P \times Q)(x) & = & P(x) \times Q(x) \end{array}$$

On a donc au total quatre opérations : addition, multiplication par un scalaire, composition et produit. Nous admettrons qu'elles donnent toutes un élément de $\mathbb{K}[X]$ et que les règles de calculs sont les mêmes que pour les fonction numériques.

En particulier, on a la propriété d'intégrité :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (P \times Q)(X) = 0_{\mathbb{K}[X]} \Longleftrightarrow P(X) = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ ou } Q(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

et la formule du binôme :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(P(X) + Q(X)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times P(X)^k \times Q(X)^{n-k}$$

Un premier théorème donne une formule de calcul des coefficients d'un produit.

Théorème 8 Coefficients d'un produit de polynômes
Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ alors :

$$(PQ)(X) = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k \quad \text{avec} \quad c_k = \sum_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq p \\ i+j=k}} a_i b_j$$

Un second théorème donne les règles de calcul du degré.

Théorème 9 Règles de calcul du degré
Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $P(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $Q(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

1. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$: $\deg(\lambda.P) = \deg(P)$.
2. En général : $\deg(P+Q) \leq \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$
   et si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.
3. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
4. si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$: $\deg(Q \circ P) = \deg(Q) \times \deg(P)$.

Si $\deg(P) = \deg(Q)$, on peut avoir $\deg(P+Q) < \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$ lorsque les termes dominants s'annulent.

1.3 Parité

Définition 10 Polynôme pair/impair
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. On dit que P est pair lorsque $P(-X) = P(X)$, ie $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(-x) = P(x)$.
2. On dit que P est impair lorsque $P(-X) = -P(X)$, ie $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(-x) = -P(x)$.

Théorème 11 Caractérisation de polynômes pairs/impairs
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. P est pair si, et seulement si, tous ses coefficients d'indice impair sont nuls.
2. P est impair si, et seulement si, tous ses coefficients d'indice pair sont nuls.

Exemple **:** $X^5 + X$ est impair et $X^8 + 4X^4 + 3X^2$ est pair. Par contre, $X^3 + X^2$ n'est ni pair, ni impair.

2 Racines d'un polynôme

2.1 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 12 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$
Soient $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $B(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. On dit que B divise A lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A(X) = B(X) \times Q(X)$. Dans ce cas on le note $B \mid A$; on dit que B est un diviseur de A, que A est divisible par B ou encore que A est un multiple de B.

Proposition 13 Propriétés de la relation de divisibilité
Soient $(A,B,C) \in \mathbb{K}[X]^3$ tels que $B(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $C(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

1. Transitivité. Si $C \mid B$ et $B \mid A$ alors $C \mid A$.
2. Réflexivité. On a $B \mid B$.
3. Antisymétrie. Si $B \mid C$ et $C \mid B$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $B = \lambda.C$.
4. Si $B \mid C$, alors $\deg(B) \leq \deg(C)$

Théorème 14 Division euclidienne des polynômes
Soient $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $B(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.
Alors il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A(X) = B(X) \times Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < \deg(B)$.
Q est appelé quotient et R est appelé reste de la division euclidienne de A par B.

Exemple **:** Effectuer la division euclidienne de $2X^3 + X^2 - 2X - 1$ par $X^2 + X - 1$.

Proposition 15 Division par $X - a$
Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$ alors le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est $P(a)$.

Définition 16 Polynômes irréductibles
Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit irréductible lorsqu'il est non constant et lorsque ses seuls diviseurs sont les λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, ainsi que les polynômes constants non nuls.

Proposition 17 Caractérisation des polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$
Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible lorsqu'il est non constant et ses diviseurs sont de degré O ou de dégré égal à $\deg(P)$.

2.2 Racines d'un polynôme

Définition 18 Racine d'un polynôme
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que α est racine de P lorsque $P(\alpha) = 0_{\mathbb{K}}$.

Le théorème suivant est primordial dans la suite.

Théorème 19 Racine et divisibilité
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff X - \alpha \mid P$$

Autrement dit : $P(\alpha) = 0_{\mathbb{K}} \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - \alpha) \times Q(X)$.

On peut noter que $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Corollaire 20 Cas de racines deux à deux distinctes
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ deux à deux distincts. Alors :

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ sont racines de } P \iff \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) \mid P$$

Corollaire 21 Relation entre degré et nombre de racines
Tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ non nul a un nombre de racines au plus égal à son degré.
Par contraposée, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(P) \leq n$ et P a au moins $n+1$ racines, alors P est le polynôme nul.

Exemple **:** La fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{ix}$ n'est pas polynomiale.

Définition 22 Racines multiples
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
L'ordre de multiplicité de α pour P est le plus grand entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $(X-\alpha)^r \mid P$, ie l'unique entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $(X - \alpha)^r \mid P$ et $(X - \alpha)^{r+1} \nmid P$.
On dit alors que α est racine d'ordre r de P.

Remarquez que α racine d'ordre 0 signifie en fait que α n'est pas racine de P.

<u>Vocabulaire</u> :
- Si $r = 1$, on dit que α est **racine simple** de P.
- Si $r = 2$, on dit que α est **racine douple** de P.
- Si $r \geq 3$, on dit que α est **racine multiple** de P.

Proposition 23 Autre définition de l'ordre de multiplicité
Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$: α est racine d'ordre $r \in \mathbb{N}$ de P si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-\alpha)^r \times Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

2.3 Théorème de d'Alembert-Gauss

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 24 Théorème de d'Alembert-Gauss
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant a au moins une racine complexe.
Par conséquent : tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ non constant a au moins une racine complexe.

Corollaire 25 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de la forme $\lambda(X-\alpha)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Corollaire 26 Décomposition d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ en facteurs irréductibles
Tout $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit :

$$P(X) = \lambda \times \prod_{i=1}^{\ell} (X-\alpha_i)^{r_i}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ sont deux à deux distincts, et $(r_1, \dots, r_\ell) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^\ell$ sont tels que $\sum_{i=1}^{\ell} r_i = \deg(P)$.
De plus, cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près dans le produit.

Exemple **:** $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

On va maintenant étudier le cas d'un polynôme à coefficients réels.

Proposition 27 Condition suffisante d'existence d'une racine réelle
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair. Alors P a au moins une racine réelle.

Proposition 28 Racines complexes et polynômes de $\mathbb{R}[X]$
Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff \overline{\alpha} \text{ est racine de } P$$

Le calcul suivant sera fondamental dans la suite. Si $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$(X-\alpha)\times(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\mathscr{R}e(\alpha)X + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}[X]$$

Corollaire 29 Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
- les polynômes de la forme $\lambda(X-\alpha)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$;
- les polynômes de la forme $\lambda(X^2+\beta X+\gamma)$ avec $(\lambda,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ et $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$.

Corollaire 30 Décomposition d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles
Tout $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit :

$$P(X) = \lambda \times \prod_{i=1}^{\ell}(X-\alpha_i)^{r_i} \times \prod_{j=1}^{h}(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{\nu_j}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\ell,h) \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_\ell,\beta_1,\dots,\beta_h,\gamma_1,\dots,\gamma_h) \in \mathbb{R}^{\ell+2h}$ et $(r_1,\dots,r_\ell,\nu_1,\dots,\nu_h) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^{\ell+h}$, avec $\forall j \in [\![1,h]\!]$, $\Delta_j = \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$.
De plus, cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près dans le produit.

Exemple : $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

3 Formule de Taylor

3.1 Dérivée d'un polynôme

Définition 31 Dérivée d'un polynôme
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme dérivé de P, noté P' par :
- Si P est constant alors on pose $P' = 0$.
- Si $\deg(P) \geq 1$ alors on a $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n = \deg(P)$ et $a_n \neq 0$.

On pose alors $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k$.

Exemple : $P(X) = 4X^5 + 9X + \dfrac{3}{2}$ donne $P'(X) = 20X^4 + 9$.

Proposition 32 Degré du polynôme dérivé
Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non constant, ie si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme constant, ie si $\deg(P) \leq 0$, alors $P' = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Théorème 33 Propriétés de la dérivation
Si $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on a :

$$(P \times Q)'(X) = P'(X) \times Q(X) + P(X) \times Q'(X)$$

et :

$$(Q \circ P)'(X) = P'(X) \times Q' \circ P(X)$$

Exemple **:** $\left(X^2 \times P(X)\right)' = 2X \times P(X) + X^2 \times P'(X)$ et $\left(P(2X)\right)' = 2 \times P'(2X)$.

Définition 34 Dérivée d'ordres supérieurs
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le polynôme dérivé d'ordre k de P, note $P^{(k)}$, par :

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)' \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le polynôme $P^{(k)}$ désigne le polynôme P dérivé k fois.

Exemple **:** $P(X) = 4X^5 + 9X + \dfrac{3}{2}$, $P'(X) = 20X^4 + 9$, $P''(X) = 80X^3$, $P^{(3)}(X) = 240X^2$, $P^{(4)}(X) = 480X$, $P^{(5)}(X) = 480$ et pour $k \geq 6$, $P^{(k)}(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Proposition 35 Propriétés de polynôme $P^{(k)}$
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$.

1. Si $k > \deg(P)$, alors $P^{(k)} = 0$.
2. Si $k \leq \deg(P)$ et si $P(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\deg(P)} a_j X^j$, alors :

$$\begin{aligned} P^{(k)}(X) &= \sum_{j=k}^{\deg(P)} j(j-1) \times \cdots \times (j-k+1) \times X^{j-k} = \sum_{j=k}^{\deg(P)} \frac{j!}{(j-k)!} a_j X^{j-k} \\ &= \sum_{j=0}^{\deg(P)-k} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k} X^j \end{aligned}$$

On a donc $\deg\left(P^{(k)}\right) = \deg(P) - k$ et on remarque que $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

3.2 Formule de Leibnitz

Théorème 36 Formule de Leibnitz
Si $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$(P \times Q)^{(n)}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times P^{(k)}(X) \times Q^{(n-k)}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times Q^{(k)}(X) \times P^{(n-k)}(X)$$

Exemple **:** $(P\times Q)^{(3)}(X) = P(X)\times Q^{(3)}(X)+3\times P'(X)\times Q''(X)+3\times P''(X)\times Q'(X)+P^{(3)}(X)\times Q(X)$.

Exemple **:** Calculer la dérivée n-ième de $X^2Q(X)$.

Exemple **:** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = (X+1)^n(X-1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$ (Polynômes de Legendre). Vérifier que $P_n(X) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X+1)^k(X-1)^{n-k}$.

3.3 Formule de Taylor et application

Théorème 37 Formule de Taylor pour les polynômes
Si $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

On arrive au résultat principal de ce paragraphe, qui permet de déterminer simplement l'ordre de multiplicité d'une racine.

Lemme 38 Dérivé et ordre de multiplicité
Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $P \imath \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine d'ordre } r \text{ de } P \Longrightarrow \alpha \text{ est racine d'ordre } r-1 \text{ de } P'$$

Théorème 39 Calcul de l'ordre de multiplicité
Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $P \imath \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors on a équivalence de :
(i) α est racine d'ordre r de P ;
(ii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Exemple **:** Factoriser le polynôme $P(X) = X^5-3X^4+2X^3+2X^2-3X+1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ (réponse : $P(X) = (X+1)(X-1)^4$).

Exemple **:** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (X+1)^n(X-1)^n$. Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$ et de plus $P_n^{(n)}(1) \neq 0$ et $P_n^{(n)}(-1) \neq 0$.

4 Exercices

Exercice 1 Déterminer les degrés et coefficients dominants des polynômes suivants :

1. $X^3 - X(X-2+i)$
2. $(X-2)^n - (X+5)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
3. $\prod_{k=0}^{n} (2X-k)$
4. $\prod_{k=0}^{n} (X-6)^k$
5. $\prod_{k=0}^{n} (kX-2)^{k^2}$

Exercice 2 Montrer qu'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ bornée sur $\mathbb{R}$ est nécessairement le polynôme constant.

Exercice 3 Factoriser les polynômes suivants :

1. $X^4 - X^2 + 1$, $X^8 + X^4 + 1$ et $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant que $i+1$ est racine dans $\mathbb{C}$

Exercice 4 On désire prouver le résultat suivant :
« Si a, b et c sont trois complexes de module 1 vérifiant $a+b+c=1$, alors un des ces trois complexes vaut 1 ».
Supposons que a, b et c soient trois nombres complexes de module 1 tels que $a+b+c=1$.

1. Justifier l'égalité : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.
2. On considère le polynôme P défini par : $P = (X-a)(X-b)(X-c)$.
   Justifier l'existence d'une constante complexe α non nulle telle que : $P = X^3 - X^2 + \alpha X - \alpha$.
3. Conclure.

Exercice 5

1. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $P(X+1) = P(X)$.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $P_n - P_n' = X^n$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B lorsque :

1. $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ et $B = X^2 + 1$
2. $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ et $B = (X-i)^2$
3. $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X-2)^2$
4. $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X-3)^2$

Exercice 7 (Calcul de puissances d'une matrice avec un polynôme annulateur)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une relation entre A^3, A^2 et A.
2. <u>Méthode 1</u> : Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n A + b_n A^2$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. <u>Méthode 2</u> : Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 2X^2 + X$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 (Formule de Vandermonde)
Soient N_1 et N_2 deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et $n \in [\![0, N_1 + N_2]\!]$.
En considérant le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{N_1} \times (1+X)^{N_2}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$.
Proposer une autre démonstration de cette formule en dénombrant des tirages simultanés dans une urne.

Exercice 9 (Polynômes d'interpolation de Lagrange)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts, et $n+1$ réels $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer l'unique polynôme $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \begin{cases} L_k(x_j) = 0 & \text{si } j \neq k \\ L_k(x_k) = 1 \end{cases}$$
2. En déduire que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k L_k$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $P(x_j) = y_j$.

Exercice 10 Soit $n \geq 2$. On pose $P = (X+1)^n - 1$.

1. Déterminer toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On note Q le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P = XQ$. En calculant $Q(0)$ de deux manières différentes, déterminer la valeur de :
$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 11 (Polynômes de Tchebychev)
On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} P_0 = 1 \text{ et } P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n.
2. Déterminer le terme constant de P_n et étudier la parité de P_n.
3. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_n(\cos x) = \cos(nx)$.
4. En déduire les racines de P_n.
5. Donner alors une expression factorisée de $P_n(X)$.
6. À l'aide des formule d'Euler et de De Moivre donner une autre expression de $P_n(X)$.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $z_0, z_1, \ldots, z_n$ les racines $(n+1)^{\text{èmes}}$ de l'unité : $z_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$.
On définit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, avec $a_n \neq 0$, et on pose $M = \max\limits_{k\in[\![0,n]\!]} \left|P(z_k)\right|$.

1. Vérifier que : $M > 0$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (z_k)^p$ en fonction de p.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(z_k)\right| \leqslant (n+1)M$.
   (b) En déduire que : $|a_0| \leqslant M$.
4. Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $|a_k| \leqslant M$.

Chapitre 10

Variables aléatoires discrètes

On considère une expérience aléatoire modélisée par un triplet $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, où Ω est un univers **fini**.

1 Variables aléatoires discrètes finies

1.1 Définitions

On note $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ avec $N = \text{Card}(\Omega)$, et on choisit comme tribu des évènements $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$.

Définition 1 Variable aléatoire discrète finie
On appelle variable aléatoire réelle discrète finie, en abrégé VARD finie, toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
L'ensemble $X(\Omega) = \{X(\omega_1), \dots, X(\omega_N)\}$ est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

Notations : L'ensemble $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal $N = \text{Card}(\Omega)$:

$$\text{Card}\big(X(\Omega)\big) \leq \text{Card}(\Omega)$$

On note $n = \text{Card}\big(X(\Omega)\big)$ et $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Exemple : On lance deux dès cubiques distinguables : $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ et $N = \text{Card}(\Omega) = 36$.
On note X = Nombre de 6 obtenus. Alors X est une VARD finie et $X(\Omega) = \{0,1,2\}$ et $n = \text{Card}\big(X(\Omega)\big) = 3$.

⚠ ATTENTION : ne pas confondre variable aléatoire et évènement. Une variable aléatoire est un **nombre aléatoire**, et un évènement est un **prédicat aléatoire**, c'est-à-dire une phrase qui peut être vraie ou fausse.
Sur l'exemple précédent, on ne peut pas dire que « Nombre de 6 obtenus » est vrai ou faux, X n'est donc pas un évènement.

Exemple : On considère une urne de 10 boules, composée de 6 boules blanches et 4 rouges. On effectue p tirages successifs d'une boule avec remise : $\Omega = [\![1,10]\!]^p$ (les boules sont numérotées) et $N = \text{Card}(\Omega) = 10^p$.
On note X = Nombre de boules rouges obtenues. Alors X est une VARD finie et $X(\Omega) = [\![0,p]\!]$ et $n = \text{Card}\big(X(\Omega)\big) = p+1$.

1.2 Évènements associés à une VARD

Notation : Si X est une VARD et A une partie de $\mathbb{R}$:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$$

est un élément de $\mathscr{F}$, ie $X^{-1}(A)$ est un évènement. Cet évènement sera noté plus simplement $[X \in A]$. On a donc :

$$[X \in A] = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$$

Cas particuliers :
• Si $A = \{a\}$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $[X \in \{a\}]$ est noté plus simplement $[X = a]$.
• Si $A =]-\infty, a]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $\big[X \in]-\infty, a]\big]$ est noté plus simplement $[X \leq a]$.
• Si $A = [a, b[$ où $(a, b) \in \big(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\big)^2$, alors $\big[X \in [a, b[\big]$ est noté plus simplement $[a \leq X < b]$ etc...

Notation : Si X est une VARD et A une partie de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $[X \in A]$ est un évènement, et on peut donc calculer $\mathbb{P}\big([X \in A]\big)$.
Pour simplifier les notations on notera $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\big([X \in A]\big)$.

Exemple : On lance simultanément deux dès distinguables : $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$.
On pose X = Somme des deux chiffres obtenus. On a alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et on peut considérer les évènements :
$[X = 11] = \{(6,5); (5,6)\}$ donc $\mathbb{P}(X = 11) = \dfrac{2}{36}$
$[X > 10] = \{(6,5); (5,6); (6,6)\} = [X = 11] \cup [X = 12]$ donc $\mathbb{P}(X > 10) = \dfrac{3}{36}$
$[X \leq 1] = \emptyset$ évènement impossible, donc $\mathbb{P}(X \leq 1) = 0$
$[X \leq 12] = \Omega = [X \geq 0]$ évènement certain, donc $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$
On peut comparer les évènements associés à X.
Par exemple $[X \leq 5] \subseteq [X \leq 7]$ donc $\mathbb{P}(X \leq 5) \leq \mathbb{P}(X \leq 7)$:
en effet $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq 5 \Longrightarrow X(\omega) \leq 7$.
De plus $[X \geq 4] = [X > 3]$, donc $\mathbb{P}(X \geq 4) = \mathbb{P}(X > 3)$, car : $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 4 \Longleftrightarrow X(\omega) > 3$.
De même $[X = 3] = [X \geq 3] \cap [X < 4]$ donc $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}\big([X \geq 3] \cap [X < 4]\big)$.
Il faut bien comprendre que tous ces résultats viennent du fait que X ne prend que des valeurs **entières**.

Théorème 2 Système complet d'évènements associés à une VARD
Si X est une VARD alors la famille $\big([X = x]\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un s.c.e..Autrement dit, si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors la famille $\big([X = x_k]\big)_{1 \leq k \leq n} = \big([X = x_1], [X = x_2], \ldots, [X = x_n]\big)$ est un s.c.e..

⚠ ATTENTION ! Si A est une partie de $\mathbb{R}$, $[X \in A]$ est un évènement, ie un élément de $\mathscr{F}$, et on peut donc calculer $\mathbb{P}(X \in A)$. Par contre $\mathbb{P}(X)$ ne veut absolument rien dire...en effet X n'est pas un **évènement** mais une **variable aléatoire**.

1.3 Loi de probabilité d'une VARD finie

Définition 3 Loi de probabilité d'une VARD
Si X est une VARD sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on appelle loi de probabilité de X l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{L}_X : & X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array}$$

La loi de probabilité $\mathscr{L}_X$ est aussi notée $\mathbb{P}^X$.

⚠ ATTENTION ! Avant de déterminer la loi de X, il est donc *indispensable* de déterminer $X(\Omega)$, c'est-à-dire les valeurs prises par la VARD X.

Si on note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, déterminer la loi de X c'est calculer $\mathbb{P}(X = x_k)$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Pour de petites valeurs de n, on peut représenter les résultats sous forme d'un tableau à une entrée :

x	x_1	x_2	$\dots$ $\dots$	x_n
$\mathbb{P}(X = x)$	?	?		?

ou d'un diagramme en bâtons.

Définition 4 Égalité en loi
Si X et Y sont deux VARD, définies chacune sur un espace probabilisé, on dit que X et Y sont égales en loi lorsque $\mathscr{L}_X = \mathscr{L}_Y$.
On le note $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$.

⚠ ATTENTION : $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$ ne signifie pas que $X = Y$, même si X et Y sont définies sur le même espace probabilisé (ie associée à la même expérience aléatoire). Considérer par exemple le lancer d'un dé, $X = 1$ si le chiffre obtenu est pair et 0 sinon, et $Y = 1$ si le chiffre obtenu est impair et 0 sinon.

Proposition 5 Propriétés élémentaires d'une loi de probabilité
Soit X une VARD. On a alors :
(i) $\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = x) \in [0,1]$;
(ii) $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

Donc si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors :

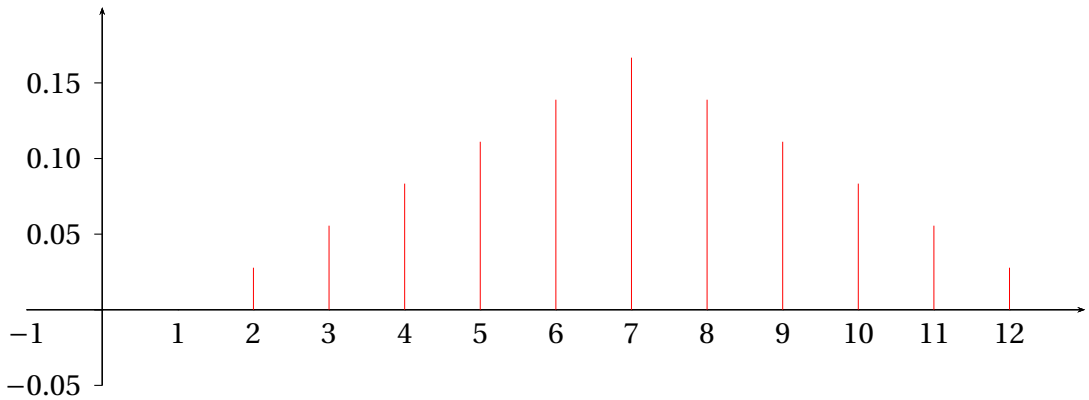
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_k) = 1$$

Dans le tableau représentant la loi de X, la somme des cases de la seconde linge doit donc être égale à 1.

Exemple **:** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chifres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On obtient le diagramme en bâtons :



Théorème 6 Construction d'une VARD finie ayant une loi de probabilité donnée
On se donne des réels $p_1, \dots, p_n$, vérifiant :
- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $p_k \geq 0$;
- $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Alors pour tous réels deux à deux distincts $x_1, \dots, x_n$, il existe une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ telle que :
$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$.
Et donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k \in [0, 1]$.

Il n'y a unicité, ni de $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, ni de la VARD X.

Exemple **:** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une VARD finie X, à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, et de loi donnée par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

1.4 Fonction de répartition d'une VARD finie

Définition 7 Fonction de répartition d'une VARD
Soit X une VARD finie.
On appelle fonction de répartition de X la fonction

$$\begin{array}{rccc} F_X & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, 1] \\ & t & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leq t) \end{array}$$

Théorème 8 Calcul de la fonction de répartition d'une VARD
Si X est une VARD finie alors, alors F_x est une fonction constante par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Plus précisément, si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_x(t) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \text{tq } x_k \leq t}} \mathbb{P}(X = x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x_1 \\ \mathbb{P}(X = x_1) & \text{si } x_1 \leq t < x_2 \\ \mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) & \text{si } x_2 \leq t < x_3 \\ \mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) + \mathbb{P}(X = x_3) & \text{si } x_3 \leq t < x_4 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_1) + \cdots + \mathbb{P}(X = x_{n-1}) & \text{si } x_{n-1} \leq t < x_n \\ 1 & \text{si } x_n \leq t \end{cases}$$

On peut retenir que $[X \leq x_k] = \bigcup_{i=1}^{k} [X = x_i]$ et donc :

$$F_x(x_k) = \mathbb{P}(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) + \cdots + \mathbb{P}(X = x_k)$$

Théorème 9 La fonction de répartition caractérise la loi

1. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, alors $X(\Omega)$ = ensemble des points de discontinuité de F_X et :

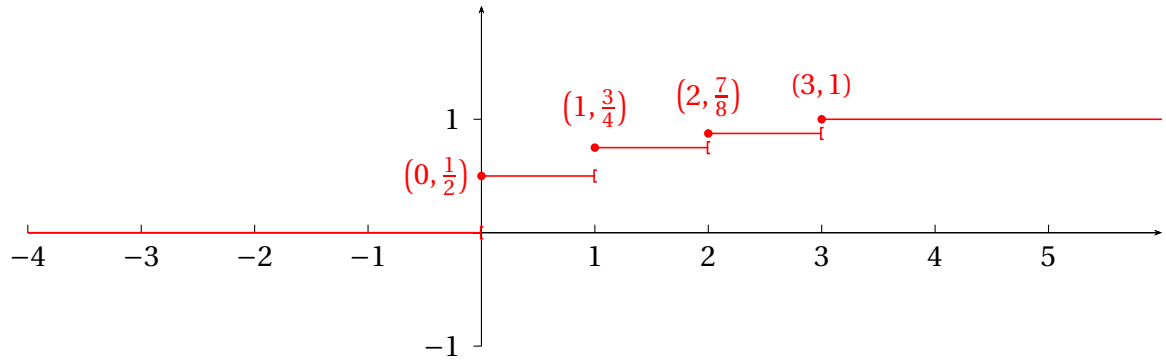
$$\forall k \in [\![2, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$$

   et $\mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1)$.
2. Si X et Y sont deux VARD finies, alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = F_Y(t) \Longleftrightarrow X \overset{(\mathscr{L})}{=} Y$$

Ce résultat est fondamental : il indique que pour définir la loi d'une VARD finie, il suffit de donner sa fonction de répartition.

Exemple **:** On définit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par son graphe :



Cette fonction définie la loi d'une VARD X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, telle que $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ et :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Cas particulier où $X(\Omega) \subseteq [\![0,n]\!]$: Dans ce cas on utilise les formules suivantes (à savoir redémontrer), valables pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)$$

et :

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}(X=j)$$

***Exemple* :** Dans une urne de n boules numérotées, on effectue n tirages d'une boule sans remise (l'urne est vidée).
On note X = nombre de tirages nécessaires pour obtenir un numéro supérieur ou égal au précédent, avec la convention que $X = n+1$ si ceci ne se produit pas au bout des n tirages.
Donner la loi de X.

1.5 Transfert de loi

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

On considère une VARD $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) \subseteq \mathscr{D}_f$. On a alors le schéma de composition :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "f \circ X"'] & \end{tikzcd}$$

On admettra que l'application $Y = f \circ X$ est aussi une VARD sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On la note plus simplement $Y = f(X)$.

Connaissant la loi de X et l'expression de la fonction f, nous souhaiterions déterminer la loi de la VARD $Y = f(X)$: c'est ce qu'on appelle un **transfert de loi** (la loi de X est transférée par la fonction f).

Valeurs prises par Y : Si X est une VARD finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors $Y(\Omega) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$. On peut aussi noter $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ avec $y_1 < y_2 < \cdots < y_p$; dans ce cas $p \leq n$ (car f peut ne pas être injective).

***Exemple* :** $X(\Omega) = \{-2,-1,0,1,2\}$ et $Y = X^2$ donne $Y(\Omega) = \{0,1,4\}$.

On peut maintenant s'intéresser à la loi de Y. Pour cela il est important de comprendre le point suivant : si on prend $y \in Y(\Omega)$ une valeur prise par la VARD Y, alors, par définition, y a un antécédent par f dans $X(\Omega)$: $\exists x \in X(\Omega)$ tel que $y = f(x)$. Et comme f est en général non injective, il y a plusieurs valeurs de x possibles, voire même une infinité !

***Exemple* :** Sur l'exemple précédent, 1 a deux antécédents : -1 et 1.

Théorème 10 Formule de transfert de loi
La loi de $Y = f(X)$ est donnée par :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x)$$

On somme sur tous les antécédents de y.

Exemple **:** Si la loi de X est donnée par :

k	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

et si $Y = X^2$, alors $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$ et :

k	0	1	4
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

2 Espérance mathématique d'une VARD

2.1 Définition

Définition 11 Espérance mathématique d'une VARD
Si X est une VARD finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors on appelle espérance de X le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

On peut aussi écrire la formule de la manière suivante :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x)$$

Exemple **:** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chifres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Puisque X est une VARD finie, $\mathbb{E}(X)$ existe et :

$$\mathbb{E}(X) = 2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36} = 7$$

C'est la notion d'espérance qui justifie l'introduction de la notion de variable aléatoire en plus de celle d'évènements. Par exemple si on lance n fois une pièce, et si on note E_i = « le i-ième lancer donne pile » et X = « nombre de piles obtenus sur les n lancers » alors l'évènement $[X = k]$ se décompose en unions/intersections d'évènements E_i. On peut donc se demander quel est l'intérêt d'utiliser la VARD X...? L'intérêt est qu'on voudrait calculer le nombre moyen de piles obtenus sur les n lancers, ie calculer $\mathbb{E}(X)$, et cette quantité ne s'exprime pas en fonction des E_i !

2.2 Théorème de transfert

On reprend les notations du paragraphe sur le transfert de loi :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "f\circ X"'] & \end{tikzcd}$$

On a vu que la loi de la VARD $Y = f(X)$ se calcule par la formule :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x)$$

On veut cette fois calculer son espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \times \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left[y \times \left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x) \right) \right]$$

On peut voir que le calcul est compliqué. On va donc essayer d'avoir une formule simple, donnant $\mathbb{E}(Y)$ connaissant la loi de X, et **sans avoir à calculer la loi de Y.**

Théorème 12 Théorème de transfert
Soit X une VARD finie et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) \subseteq \mathscr{D}_f$.
Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors $Y = f(X)$ est aussi une VARD finie et :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

Ce résultat sera très utile en pratique, car dans beaucoup de cas on ne sait pas calculer simplement la loi de la VARD $Y = f(X)$.

On peut aussi écrire la formule de la manière suivante :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X = x)$$

Exemple **:** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chiffres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Puisque X est une VARD fine, $\mathbb{E}(X^2)$ existe et :

$$\mathbb{E}(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{329}{6}$$

Corollaire 13 Linéarité de l'espérance (version 1)
Soit X une VARD finie. Alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{E}(aX+b)$:

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

En particulier si $a = 0$, on a pour tout $b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{E}(b) = b$. Et donc pour $b = \mathbb{E}(X)$, on obtient $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X)\big) = \mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big) = 0$.

Définition 14 VARD centrée

1. On appelle VARD finie centrée une VARD finie X telle que $\mathbb{E}(X) = 0$.
2. Si X est une VARD finie, on appelle VARD centrée associée à X la VARD $Y = X - \mathbb{E}(X)$.

2.3 Variance d'une VARD finie

Définition 15 Variance d'une VARD finie
Soit X une VARD finie. On appelle variance de X, notée $V(X)$ ou $\mathrm{Var}(X)$:

$$V(X) = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big]$$

La variance sert à mesurer la dispersion quadratique de X autour de sa valeur moyenne (= son espérance).

Théorème 16 Règles de calcul de la variance
Soit X une VARD finie.

1. $V(X) \geq 0$;
2. $V(X) = 0 \iff X$ est constante.
   Dans ce cas : $X = \mathbb{E}(X)$.
3. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:
$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Théorème 17 Formule de Koenig-Huyghens
Soit X une VARD finie. Alors :

$$V(X) = \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

Puisque $V(X) \geq 0$, on a $\mathbb{E}\left(X^2\right) \geq \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$. Plus généralement, on peut montrer que si φ est une fonction numérique convexe, alors $\mathbb{E}\left(\varphi(X)\right) \geq \varphi\left(\mathbb{E}(X)\right)$ (inégalité de Jensen), mais c'est une autre histoire...
C'est cette formule qu'on utilise en pratique pour calculer la variance d'une VARD finie.

Exemple **:** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chifres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Puisque X est une VARD fine, $V(X)$ existe et :

$$V(X) = \frac{329}{6} - 7^2 = \frac{35}{6}$$

Définition 18 Écart-type d'une VARD
Soit X une VARD finie. On appelle écart-type de X le réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Contrairement à la variance, l'écart-type possède la même unité que X, et s'interprète donc mieux en pratique. Il sert à mesurer la dispersion de X autour de sa valeur moyenne.

Définition 19 VARD centrée réduite Soit X une VARD finie, non presque sûrement constante.

1. On dit que X est une VARD centrée réduite lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$ et $V(X) = 1$.
2. On appelle VARD centrée réduite associée à X la VARD : $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$.

En effet si X^* est une VARD centrée réduite.

3 Lois usuelles

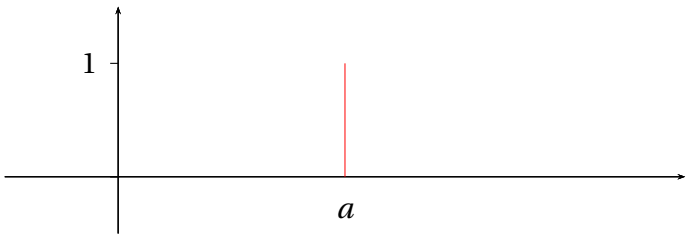
Dans tout ce paragraphe X est une VARD définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

3.1 Loi certaine

Définition 20 VARD de loi certaine
X suit la loi certaine de paramètre $a \in \mathbb{R}$, lorsque $X = a$ $\mathbb{P}$-p.s., ie $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

X est donc une VARD finie.

On obtient le diagramme en bâtons :



Par abus de notations, on peut considérer que $X(\Omega) = \{a\}$.

Théorème 21 Espérance et variance d'une VARD de loi certaine
Soit X une VARD de loi certaine de paramètre $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = a \qquad \text{et} \qquad V(X) = 0$$

Théorème 22 Caractérisation de la loi certaine
Soit X une VARD finie. Alors :

$$X \text{ suit une loi certaine} \iff V(X) = 0$$

et dans ce cas le paramètre est $a = \mathbb{E}(X)$.

3.2 Loi uniforme

Définition 23 VARD de loi uniforme
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ finie et non vide. On dit que X suit la loi uniforme sur A lorsque $X(\Omega) = A$ et :

$$\forall a \in A, \quad \mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{\text{Card}(A)}$$

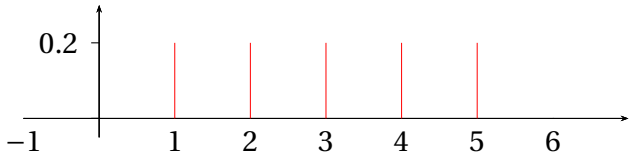
On le note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(A)$.

X est donc une VARD finie.

Si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ avec $n = \text{Card}(A)$, alors : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = a_k) = \dfrac{1}{n}$.

Si A est un singleton, $A = \{a\}$, alors $\mathscr{U}\big(\{a\}\big)$ est la loi certaine de paramètre a.

Pour $\mathscr{U}([\![1,5]\!])$, on obtient le diagramme en bâtons :



Exemple **:** Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1,n]\!]\big)$, alors $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$$

Théorème 24 Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{U}\big([\![1,n]\!]\big)$
Soit X une VARD de loi $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$. Alors X :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

⚠ ATTENTION : ces formules sont fausses si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![0,n]\!]\big)$.

<u>Modélisation 1</u> : On choisit au hasard un nombre dans A, partie finie non vide de $\mathbb{R}$. On note X = Nombre obtenu. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}(A)$.

Exemple **:** On dispose d'une urne de 10 boules numérotées. On tire une boule au hasard et on note X = Numéro obtenu. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1,10]\!]\big)$.

<u>Modélisation 2</u> : On se donne A partie finie non vide $\mathbb{R}$, de cardinal n, et on s'intéresse à un élément donné de A noté a_0. On effectue une successions de tirages sans remise d'un élément de A. On note X = Nombre de tirages nécessaires pour obtenir l'élément a_0. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1,n]\!]\big)$.

Exemple **:** On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire les cartes une à une sans remise et on note X = Nombre de tirages nécessaires pour obtenir l'as de coeur. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1,32]\!]\big)$.

Exemple **:** Un gardien doit ouvrir une porte dans le noir, avec n clef dont une seule est la bonne. On note X le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef. On suppose que le gardien essaie les clefs une à une, sans utiliser deux fois la même. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1,n]\!]\big)$ et le nombre moyen d'essais pour trouver la bonne clef est donc $\dfrac{n+1}{2}$.

3.3 Loi de Bernoulli

Définition 25 VARD de loi de Bernoulli
On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ lorsque $X(\Omega) = \{0,1\}$ et :

$$\mathbb{P}(X=1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p = q$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

X est donc une VARD finie.

Théorème 26 Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{B}(p)$
Soit X une VARD de loi $\mathscr{B}(p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = pq = p(1-p)$$

Modélisation : On considère une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : succès ou échec.
On note p la probabilité qu'elle donne un succès et $X = \begin{cases} 1 & \text{si l'expérience donne un succès} \\ 0 & \text{si l'expérience donne un échec} \end{cases}$
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Exemple : On dispose d'une pièce de monnaie truquée, de telle sorte qu'elle donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$.
On note $X = \begin{cases} 1 & \text{si la pièce donne Pile} \\ 0 & \text{si la pièce donne Face} \end{cases}$
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Exemple : On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
On note $X = \begin{cases} 1 & \text{si la carte est un coeur} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{4}\right)$.

Théorème 27 Caractérisation de la loi de Bernoulli
Soit X une VARD. Alors :

$$X \text{ suit une loi de Bernoulli} \iff X(\Omega) = \{0,1\}$$

et dans ce cas le paramètre est $p = \mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X = 1)$.

Exemple : Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $X^2 \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Exemple : Si A est un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \notin \{0,1\}$, alors $X = 1_A$ est une VARD de loi $\mathscr{B}(\mathbb{P}(A))$. En particulier on obtient que $\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$, formule qui relie probabilité d'un évènement et espérance d'une VARD.

3.4 Loi binomiale

Définition 28 VARD de loi binomiale
On dit que X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ lorsque $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

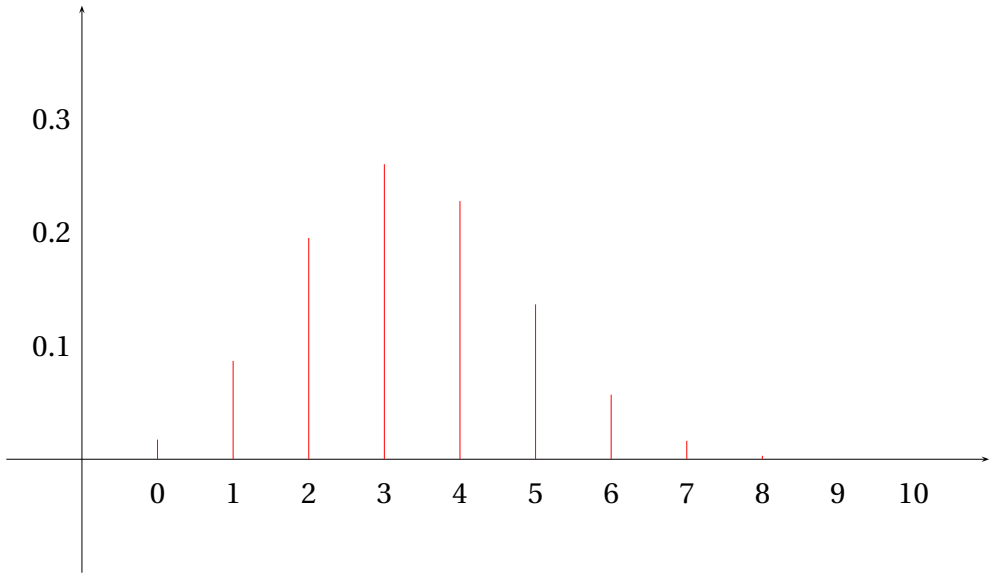
X est donc une VARD finie.

On a $\mathscr{B}(1,p) = \mathscr{B}(p)$.

Si $k \in \mathbb{Z}$, $k \notin [\![0, n]\!]$, on a par convention $\binom{n}{k} = 0$. De plus, on a aussi $\mathbb{P}(X = k) = 0$. Donc $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Pour $\mathscr{B}\left(10, \frac{1}{3}\right)$, on obtient le diagramme en bâtons :



Théorème 29 Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{B}(n, p)$
Soit X une VARD de loi $\mathscr{B}(n, p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = npq = np(1-p)$$

<u>Modélisation</u> : On considère une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : succès avec probabilité p ou échec avec probabilité $q = 1 - p$.
On effectue n répétitions indépendantes de cette même expérience.
On note X = Nombre de succès obtenus.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Exemple **:** On dispose d'une pièce de monnaie truquée, de telle sorte qu'elle donne Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$.
On la lance n fois de manières indépendantes.
On note X = Nombre de Piles obtenus.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Exemple **:** On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.
On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{N_1}{N}\right)$.

4 Exercices

Exercice 1 (Lois usuelles)
Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs.
   X = nombre d'objets dans le premier tiroir.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos.
   X = nombre de bosses.
3. Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement et avec remise 10 boules de l'urne.
   X = nombre de boules vertes tirées.
4. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques.
   X = nombre de garçons d'une famille de 3 enfants.
5. On suppose que 1% des trèfles possédent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles.
   X = nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Exercice 2 (Jeux d'argent)
Un jeu est dit *équitable* losque l'espérance du gain relatif du joueur est nulle. Pour chacun des jeux suivants, déterminer si le jeu est équitable.

1. Le joueur lance 2 dès. S'il sort 7, il gagne 5 euros, sinon il perd 1 euro.
2. Le joueur mise sur rouge ou noir à la roulette au casino (composée de 18 rouges, 18 noirs et du zéro qui est vert). Pour une mise donnée, la casino paye deux fois la mise en cas de sortie de la bonne couleur (la mise est perdue dans tous les cas).
3. Toujours à la roulette, il joue un numéro plein : s'il gagne, la casino lui paye 36 fois sa mise en cas de sortie du numéro choisi.
4. Le joueur remplit une grille de loto qui coûte ϵ euros : il choisit 6 numéros entre 1 et 49. Si ses numéros sortent, il gagne un million d'euros.

Exercice 3 Une urne contient deux boules marquées 1, deux marquées 2 et une marquée 3. On prélève simultanément deux boules au hasard et on appelle X la somme des numéros marqués sur les deux boules. Déterminer la loi de X son espérance et son écart-type.

Exercice 4 On lance 4 dès équilibrés, on note X ="le nombre de numéros différents sortis". Déterminer la loi de X puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 5 (Plus grand numéro obtenu lors d'un tirage simultané)
On effectue un tirage simultané de n boules dans une urne composée de N boules numérotées de 1 à N. On note X le plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$.
3. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 6 (Loi hypergéométrique)

1. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue n tirages successifs d'une boule sans remise.
   On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.
2. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue un tirage simultané de n boules.
   On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.
3. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.
   On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.

Exercice 7 (Urne vidée de ses boules blanches)

On considère une urne de taille $N > 1$, contenant r boules blanches et $N - r$ boules noires ($0 < r \leq N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise, jusqu'à l'obtention de toutes les boules blanches, et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela.

1. Dans le cas $r = 1$, reconnaître la loi de X. Donner son espérance. Même question dans le cas $r = N$.
2. Le cas général : $1 < r < N$.
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Soit k l'une de ces valeurs. Vérifier que :
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$
3. Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}$.

Exercice 8 (n-ième succès lors de tirages sans remise)

Une urne contient $N \geq 1$ boules dont $r \geq 1$ sont rouges et les autres sont blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules. Soit $n \in [\![1, r]\!]$. On appelle X_n le rang d'apparition de la $n^{\text{ème}}$ boule rouge. Trouver la loi de X_n.
Faire le lien avec l'exercice précédent.

Exercice 9 (Une formule de calcul de l'espérance d'une VARD)

1. Soient $N \in \mathbb{N}$ et X une vard vérifiant : $X(\Omega) \subset [\![0, N]\!]$.
   Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X > k)$.
2. On considère une urne de N boules numérotées. On effectue un tirage simultané de n boules, et on note X le plus grand numéro obtenu. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 10 (Minimum et maximum lors de tirages simultanés)

On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N. On tire simultanément n jetons de l'urne ($n < N$) et on note X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Pour $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.

Exercice 11 (Expérience en deux étapes)

On dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ urnes numérotées de 1 à n : $U_1, U_2, \ldots, U_n$. L'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une urne, on note X le numéro de l'urne choisie, puis on tire une boule au hasard dans l'urne choisie, on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$, en déduire la loi de Y.
2. Déterminer l'espérance de Y.
3. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 12 (Fonction génératrice d'une VARD finie)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne X une variable discrète finie à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On appelle alors fonction génératrice de X la fonction $G_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$$

1. Montrer que G_X est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à n.
2. Donner l'expression de G_X lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1, n]\!]\right)$.
3. Si Y est une VARD finie à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, montrer que :

$$X \overset{(\mathscr{L})}{=} Y \Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = G_Y(t)$$

4. Etablir que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

5. Montrer que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$, et que $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2$.

Exercice 13 (Entropie d'une VARD finie)

Dans le cadre des variables discrètes finies, la notion d'entropie (de Shannon) s'introduit simplement. Elle donne une mesure de la quantité minimale d'information nécessaire pour "coder" le résultat d'une variable aléatoire X. C'est une notion très utilisée en théorie de l'information.

On se donne X une variable discrète finie à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on pose $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$. On appelle alors entropie de X le réel :

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k) = -\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \ln\left(\mathbb{P}(X = x)\right)$$

avec la convention $x \ln(x) = 0$ si $x = 0$.

1. (a) Montrer que si $x \geq 0$: $-x \ln(x) \leq 1 - x$.
   (b) Si $n = \text{ Card }\left(X(\Omega)\right)$, montrer que $0 \leq H(X) \leq \ln(n)$.
2. Montrer que $H(X) = 0$ si, et seulement si, X est constante.
3. On pose $n = \text{ Card }\left(X(\Omega)\right)$. Alors :

$$H(X) = \ln(n) \Longleftrightarrow X \hookrightarrow \mathscr{U}([[1; n]])$$

Chapitre 11

Introduction aux espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités sur les espace vectoriels

1.1 Espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

Définition 1 Espace vectoriel sur $\mathbb{K}$
Soit $\mathbb{E}$ un ensemble non vide. On dira que $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (= $\mathbb{K}$-ev), ou que $\mathbb{E}$ a une structure de $\mathbb{K}$-ev lorsque :

(i) $\mathbb{E}$ est muni d'une addition + qui est une application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^2 & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) & \longmapsto & \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \end{array}$$

vérifiant :
- Commutativité. $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{E}^2, \quad \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$
- Associativité. $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) \in \mathbb{E}^3, \quad (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$
- Élément neutre. Il existe un unique élément de E, noté $\overrightarrow{0_E}$, tel que : $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}, \quad \overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{x}$.
- Opposé. $\forall x \in \mathbb{E}$, il existe un unique élément de $\mathbb{E}$, noté $-\overrightarrow{x}$ et appelé opposé de $\overrightarrow{x}$, vérifiant : $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}, \quad \overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{x}) = (-\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$.

(ii) $\mathbb{E}$ est muni d'une multiplication par un scalaire . qui est une application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ (\lambda, \overrightarrow{x}) & \longmapsto & \lambda.\overrightarrow{x} \end{array}$$

vérifiant :
- $\forall (\lambda, \mu, \overrightarrow{x}) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{E}, \quad (\lambda + \mu).\overrightarrow{x} = \lambda.\overrightarrow{x} + \mu.\overrightarrow{x}$
- $\forall (\lambda, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2, \quad \lambda.(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda.\overrightarrow{x} + \lambda.\overrightarrow{y}$
- $\forall (\lambda, \mu, \overrightarrow{x}) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{E}, \quad \lambda.(\mu.\overrightarrow{x}) = (\lambda \times \mu).\overrightarrow{x} = \mu.(\lambda.\overrightarrow{x})$
- $1.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$

Dans la suite, l'opération $\overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{y})$ sera notée $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}$.

Les éléments de $\mathbb{E}$ sont appelés **vecteurs**, et ceux de $\mathbb{K}$ **scalaires**.

On peut remarquer qu'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ donne aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, en considérant la restriction à $\mathbb{R}$ de la multiplication par un scalaire.

Proposition 2 Règles de calcul
Si $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et $(\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{E}^2$, on a :

1. $\lambda(\vec{x}-\vec{y})=\lambda.\vec{x}-\lambda.\vec{y}$;
2. $\lambda.\vec{0_E}=\vec{0_E}$;
3. $(\lambda-\mu).\vec{x}=\lambda.\vec{x}-\mu.\vec{x}$;
4. $0.\vec{x}=\vec{0_E}$;
5. $(-\lambda).(-\vec{x})=\lambda.\vec{x}$;
6. Intégrité externe. $\lambda.\vec{x}=\vec{0_E}\iff\lambda=0$ ou $\vec{x}=\vec{0_E}$;
   $\lambda.\vec{x}=\mu.\vec{x}\iff\vec{x}=\vec{0_E}$ ou $\lambda=\mu$;
   $\lambda.\vec{x}=\lambda.\vec{y}\iff\lambda=0$ ou $\vec{x}=\vec{y}$.

Exemple **:** $\{0\}$ est un $\mathbb{R}$-ev et un $\mathbb{C}$-ev. Par contre $\emptyset$ n'en est pas un.

Exemple **:** $\boxed{\mathbb{K}^n}$ Un vecteur $\vec{x}\in\mathbb{K}^n$ est un n-uplet $(x_1,x_2,\dots,x_n)$.
Si $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ et $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on définit leur somme :

$$\vec{x}+\vec{y}=(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

Si $\lambda\in\mathbb{K}$ et $\vec{x}\in\mathbb{K}^n$ on définit :

$$\lambda.\vec{x}=\lambda.(x_1,\dots,x_n)=(\lambda\times x_1,\dots,\lambda\times x_n)$$

Alors $(\mathbb{K}^n,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Le vecteur nul est $\vec{0}_{\mathbb{K}^n}=(0,\dots,0)$.
En particulier pour $n=1$: $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev pour ses opérations naturelles. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev, et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev donc un $\mathbb{R}$-ev.
⚠ ATTENTION : $\mathbb{R}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-ev !

Exemple **:** $\boxed{\mathbb{F}^A}$ Soient A un ensemble quelconque et $\mathbb{F}$ un $\mathbb{K}$-ev. On rappelle que $\mathbb{F}^A$ désigne l'ensemble des fonctions $f:A\longrightarrow\mathbb{F}$ définies sur A à valeurs dans $\mathbb{F}$.
Pour f et g éléments de $\mathbb{F}^A$, on définit la fonction $f+g:A\longrightarrow\mathbb{F}$ par :

$$\forall x\in A,\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

et pour $\lambda\in\mathbb{K}$ et f élément de $\mathbb{F}^A$, on définit la fonction $\lambda.f:A\longrightarrow\mathbb{F}$ par :

$$\forall x\in A,\quad (\lambda.f)(x)=\lambda.f(x)$$

Alors $(\mathbb{F}^A,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Le vecteur nul $\vec{0}_{\mathbb{F}^A}$ est la fonction constante égale à $\vec{0_F}$.
En particulier :
- pour $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ et $A=\mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.)$ est un $\mathbb{R}$-ev ; (suites réelles)
- pour $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ et I intervalle de $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}^I,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-ev. (fonctions définies sur un intervalle I)

Exemple **:** $\boxed{\mathbb{K}[X]}$ On rappelle que $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Alors $(\mathbb{K}[X],+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Le vecteur nul $\vec{0}_{\mathbb{K}[X]}$ est la fonction constante égale à 0 sur $\mathbb{K}$.

Exemple **:** $\boxed{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$ On rappelle que $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de taille $n\times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Alors $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Le vecteur nul $\vec{0}_{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$ est la matrice nulle de taille $n\times p$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 3 Sous-espace vectoriel
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathbb{F}$ une partie de $\mathbb{E}$.
On dit que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ (noté sev de $\mathbb{E}$) lorsque :
(i) $\mathbb{F} \neq \emptyset$;
(ii) $\mathbb{F}$ stable pour « + » : $\forall\left(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2\right) \in \mathbb{F}^2,\ \overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2 \in \mathbb{F}$;
(iii) $\mathbb{F}$ stable pour « . » : $\forall\left(\lambda, \overrightarrow{x}\right) \in \mathbb{K} \times \mathbb{F},\ \lambda.\overrightarrow{x} \in \mathbb{F}$

Exemple **:** Un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ a toujours deux sev triviaux : $\{\overrightarrow{0_E}\}$ et $\mathbb{E}$.

Proposition 4 Propriété du vecteur nul
Si $\mathbb{F}$ est un sev d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$, alors $\overrightarrow{0_E} \in \mathbb{F}$.

Pour montrer que $\mathbb{F} \neq \emptyset$, on vérifie donc la plupart du temps que $\overrightarrow{0_E} \in \mathbb{F}$.
Exemple **:** $\emptyset$ n'est jamais un sev d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.

Théorème 5 Caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$
Soit $\mathbb{F}$ une partie d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$. Alors $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ si et seulement si :
(i) $\mathbb{F} \neq \emptyset$;
(ii) $\mathbb{F}$ stable par combinaison linéaire : $\forall\left(\lambda, \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2\right) \in \mathbb{K} \times \mathbb{F}^2,\ \lambda.\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2 \in \mathbb{F}$

Exemple **:** Dans $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{F}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle/ x^2 + y^2 = 1\right\}$, $\mathbb{F}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle/ x + y = 1\right\}$ et $\mathbb{Z}^2$ ne sont pas des sev de $\mathbb{R}^2$. Par contre $\mathbb{F}_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle/ x + y = 0\right\}$ en est un.

Exemple **:** $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple **:** $T_n^+(\mathbb{K})$, $T_n^-(\mathbb{K})$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

⚠ $Gl_n(\mathbb{K})$ n'est pas un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: il ne contient pas le vecteur nul et n'est pas non plus stable par multiplication !

Théorème 6 Un sev est un $\mathbb{K}$-ev
Si $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev et $\mathbb{F}$ un sev de $\mathbb{E}$, alors les restrictions à $\mathbb{F}$ des opérations « + » et « . » de $\mathbb{E}$, munissent $\mathbb{F}$ d'une structure de $\mathbb{K}$-ev.

En pratique, pour montrer qu'un ensemble $\mathbb{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (8 conditions), on cherche un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ contenant $\mathbb{F}$ (ie $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$), et on montre que $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ (seulement 2 conditions).

Exemple **:** $K_n[X]$ est un K-ev puisque c'est un sev de $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 7 Intersection de sev
Si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ est aussi un sev de $\mathbb{E}$.

⚠ ATTENTION : en général $\mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ n'est pas un sev de $\mathbb{E}$.

Exemple **:** On pose $\mathbb{F} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = x\}$ et $\mathbb{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = -x\}$. $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev de $\mathbb{R}^2$, mais $\mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ n'en est pas un.

Exemple **:** Si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ est aussi un sev de $\mathbb{E}$ si et seulement si $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{G}$ ou $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{F}$.

Exemple **:** $D_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Familles de vecteurs

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{E}$ désigne un $\mathbb{K}$-ev.

2.1 Combinaisons linéaires

Définition 8 Combinaison linéaire Soit $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille finie de p vecteurs de $\mathbb{E}$ (c'est-à-dire un p-uplet de vecteurs de $\mathbb{E}$).
On dit que $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ est combinaison linéaire (= CL) des vecteurs de $\mathscr{F}$ lorsqu'il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que :

$$\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \overrightarrow{u_k}$$

Exemple **:** Dans $\mathbb{R}^2$ avec une famille finie.
$(2,3)$ est CL de $(1,0)$ et $(1,1)$: $(2,3) = 3.(1,1) + (-1).(1,0)$.

Exemple **:** $\boxed{\text{Un exemple général à connaître dans } \mathbb{K}^n.}$
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $\overrightarrow{e_i} = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{i–ième position}}}{1}, 0, \dots, 0)$.
Alors tout $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ est CL de la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x} &= (x_1, \dots, x_n) \\
&= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_n) \\
&= x_1.(1, 0, \dots, 0) + x_2.(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n.(0, \dots, 0, 1) \\
&= x_1.\overrightarrow{e_1} + x_2.\overrightarrow{e_2} + \dots + x_n.\overrightarrow{e_n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k.\overrightarrow{e_k}
\end{aligned}$$

Exemple **:** $\boxed{\text{Un exemple général à connaître dans } \mathbb{K}_n[X].}$
Si $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$ est un élément de $\mathbb{K}_n[X]$, alors P est CL des polynômes 1, X, …, X^n. Ceci prouve que tout élément de $\mathbb{K}_n[X]$ est CL de la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Exemple **:** $\boxed{\text{Un exemple général à connaître dans } \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}).}$
Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on rappelle qu'on note E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, exceptés celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, qui

est égal à 1.
Les matrices E_{ij}, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, sont appelées **matrices élémentaires** de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Si $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, alors A est CL des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Théorème 9 CL et sev
Si $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{F}$, alors toute CL de ces vecteurs est encore un vecteur de $\mathbb{F}$.
En particulier, si $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{F}$, alors $\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, on a $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{u_k} \in \mathbb{F}$.

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Définition 10 Notation $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$
Soit $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$. On note $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{E}$ qui sont combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$:

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\overrightarrow{u_i} \Big/ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

et donc pour $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$:

$$\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \iff \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p \Big/ \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\overrightarrow{u_i}$$

Noter que si $\mathscr{F}$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$, on a $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbb{E}$.

On adopte aussi la convention : $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

Exemple **:** On a vu au paragraphe 2.1. que $\mathbb{K}^n = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$, avec $\overrightarrow{e_i} = (0,\dots,0,\underset{\substack{\downarrow \\ \text{i–ième position}}}{1},0,\dots,0)$, pour $i \in [\![1,n]\!]$.

Exemple **:** On a vu au paragraphe 2.1. que $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2,\dots,X^n)$.

Exemple **:** On a vu au paragraphe 2.1. que $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left((E_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}\right)$.

Théorème 11 Propriétés de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$
Soit $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

1. $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est un sev de $\mathbb{E}$ qui contient $\mathscr{F}$: $\mathscr{F} \subseteq \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$;
2. C'est le plus petit sev de $\mathbb{E}$ contenant $\mathscr{F}$:
   si $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ tel que $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{F}$, alors $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbb{F}$.

Important : ce résultat peut servir à montrer très rapidement qu'une partie $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ est un sev.

Exemple : $\mathbb{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x+2y=z\} = \text{Vect}\left[(1,0,1);(0,1,2)\right]$.

Corollaire 12 Inclusions de Vect
Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux familles finies de vecteurs de $\mathbb{E}$:
$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$ donne $\text{Vect}(\mathscr{F}) \subseteq \text{Vect}(\mathscr{G})$.

Corollaire 13 Règles de calcul sur les Vect
Soit $\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p},\overrightarrow{u_{p+1}}\right)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

1. Si $\overrightarrow{u_{p+1}}$ est CL de la famille $\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\right)$, alors on peut « l'enlever du Vect » : $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p},\overrightarrow{u_{p+1}}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\right)$
2. On peut additionner à un vecteur toute CL des autres :
   si $(\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^{p-1}$, alors $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_{p-1}},\overrightarrow{u_p}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_{p-1}},\overrightarrow{u_p}+\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i.\overrightarrow{u_i}\right)$
3. On peut multiplier un vecteur par un scalaire non nul :
   si $\alpha \neq 0$, alors $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_{p-1}},\overrightarrow{u_p}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_{p-1}},\alpha.\overrightarrow{u_p}\right)$
4. $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\right)$ ne dépend pas de l'ordre des vecteurs :
   si $\sigma : [\![1,p]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ est bijective, alors $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_{\sigma(1)}},\dots,\overrightarrow{u_{\sigma(p)}}\right)$
5. On peut « enlever le vecteur nul d'un Vect » :
   $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p},\overrightarrow{0_E}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\right)$

2.3 Familles génératrices

Définition 14 Famille génératrice d'un sev
Soit $\mathscr{F}$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.
On dit que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{E}$, ou que $\mathbb{E}$ est engendré par $\mathscr{F}$, lorsque $\mathbb{E} = \text{Vect}(\mathscr{F})$.

Comme on a $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{E}$, on peut dire que $\text{Vect}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbb{E}$. Donc $\mathscr{F}$ est génératrice de $\mathbb{E}$ si et seulement si $\mathbb{E} \subseteq \text{Vect}(\mathscr{F})$, ie tout vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ est CL des vecteurs de $\mathscr{F}$.

Rédaction : Soit $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\right)$ une famille finie de p vecteurs de $\mathbb{E}$.
Pour montrer qu'elle est génératrice de $\mathbb{E}$, on se fixe un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$, et on cherche des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_p$, tels que :

$$\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{u_k}$$

En considérant cette égalité comme une équation d'inconnue $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, on doit montrer qu'il existe au moins une solution.

Exemple : $\mathbb{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x+2y=z\}$ est engendré par $\left((1,0,1);(0,1,2)\right)$.

Exemple : $\boxed{\text{Famille génératrice de } \mathbb{K}^n}$ On a vu au paragraphe 2.2. que la famille $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$, avec $\overrightarrow{e_i} = (0,\dots,0,\underset{\substack{\downarrow \\ \text{i–ième position}}}{1},0,\dots,0)$, pour $i \in [\![1,n]\!]$.

Exemple : $\boxed{\text{Famille génératrice de } \mathbb{K}_n[X]}$ On a vu au paragraphe 2.2. que la famille $(1,X,X^2,\dots,X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple : $\boxed{\text{Famille génératrice de } \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})}$ On a vu au paragraphe 2.2. que la famille $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ est génératrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Théorème 15 Ajout de vecteurs dans une famille génératrice
Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux familles finies de vecteurs de $\mathbb{E}$. On suppose que :
(i) $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$;
(ii) $\mathscr{F}$ est génératrice de $\mathbb{E}$.
Alors $\mathscr{G}$ est aussi une famille génératrice de $\mathbb{E}$.

Exemple : $\mathbb{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x+2y=z\}$ est aussi engendré par $\big((1,0,1);(0,1,2);(1,1,3)\big)$.

Ainsi, toute sur-famille d'une famille génératrice de $\mathbb{E}$ est encore génératrice de $\mathbb{E}$.

En pratique ce résultat n'a que très peu d'intérêt. En effet, on préférera avoir des familles génératrices de taille minimale (nous verrons pourquoi dans un autre chapitre). Pour cela on utilisera le théorème suivant.

Théorème 16 Enlever des vecteurs dans une famille génératrice
Si $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_{p-1}},\overrightarrow{u_p})$ est génératrice de $\mathbb{E}$, et si $\overrightarrow{u_p}$ est CL de la famille $\widetilde{\mathscr{F}} = (\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_{p-1}})$, alors $\widetilde{\mathscr{F}}$ est encore génératrice de $\mathbb{E}$.

Ce résultat est énoncé dans le cas d'une famille finie, mais il est encore valable dans le cas d'une famille infinie.

On peut donc retenir que dans une famille génératrice de $\mathbb{E}$, si un vecteur est CL des autres, alors on peut l'ôter de la famille tout en gardant une famille génératrice de $\mathbb{E}$.

Exemple : Si $\mathbb{E} = \text{Vect}\big[(1,0);(1,-1);(0,1)\big]$ alors $\mathbb{E} = \text{Vect}\big[(1,0);(0,1)\big]$.

2.4 Familles libres

Définition 17 Famille libre
Soit $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})$ une famille finie de p vecteurs de $\mathbb{E}$ (c'est-à-dire un p-uplet de vecteurs de $\mathbb{E}$).

On dit que $\mathscr{F}$ est une famille libre, ou que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}$ sont linéairement indépendants, lorsque, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{0_E} \Longrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que $\mathscr{F}$ est liée, ou que les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont linéairement dépendants.

On adoptera la convention que $\emptyset$ est une famille libre de tout $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.

On peut remarquer que le caractère libre d'une famille de vecteurs $\mathscr{F}$, ne dépend du choix du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$. Par conséquent si $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{F}$ où $\mathbb{F}$ sev de $\mathbb{E}$, alors $\mathscr{F}$ est libre dans $\mathbb{F}$ si et seulement si elle est libre dans $\mathbb{E}$.

⚠ Ceci est faux pour la notion de famille génératrice qui est intrinsèquement liée au sous-espace vectoriel dans lequel on travaille.

<u>Rédaction</u> : Soit $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$ une famille finie de p vecteurs de $\mathbb{E}$.
Pour montrer qu'elle est libre, on se fixe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, tels que :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \overrightarrow{u_k} \overrightarrow{0_E}$$

En considérant cette égalité comme une équation d'inconnue $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, on doit montrer qu'elle a pour unique solution $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

***Exemple* :** Dans $\mathbb{R}^2$, $\Big((1,2);(1,3)\Big)$ est libre et $\Big((1,0);(1,1);(0,2)\Big)$ est liée.

***Exemple* :** $\boxed{\text{Dans } \mathbb{K}^n}$ La famille $\left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\right)$ est libre, avec $\overrightarrow{e_i} = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{i–ième position}}}{1}, 0, \dots, 0)$, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

***Exemple* :** $\boxed{\text{Dans } \mathbb{K}_n[X]}$ La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est libre.

***Exemple* :** $\boxed{\text{Dans } \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})}$ La famille $(E_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est libre.

Théorème 18 Famille libre à un vecteur
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{E}$. Alors :

$$\left(\overrightarrow{u}\right) \text{ est libre} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0_E}$$

Définition 19 Vecteurs colinéaires
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{E}$.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda . \overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \lambda . \overrightarrow{u}$, ou de manière équivalente lorsque $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0_E}$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda . \overrightarrow{v}$.

Théorème 20 Famille libre à deux vecteurs
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \text{ est libre} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non colinéaires}$$

⚠ ATTENTION : Ce critère est faux dès qu'on a plus de deux vecteurs. Par exemple pour trois vecteurs, le critère devient non coplanaires.

Exemple **:** Il devient évident que $\big((1,2);(1,3)\big)$ est libre !

Théorème 21 Caractérisation des familles liées
Soit $\mathscr{F} = (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors :

$$\mathscr{F} \text{ est liée} \iff \text{un des vecteurs de } \mathscr{F} \text{ est CL des autres}$$

Exemple **:** Il devient évident que $\big((1,0);(1,1);(0,2)\big)$ est liée !

Corollaire 22 Cas simples de familles liées
Toute famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ contenant le vecteur nul, ou deux vecteurs identiques, est liée.

Théorème 23 Enlever des vecteurs dans une famille libre
Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux familles finies de vecteurs de $\mathbb{E}$. On suppose que :
(i) $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$;
(ii) $\mathscr{G}$ est libre.
Alors $\mathscr{F}$ est libre.

Exemple **:** $\big((1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,0,1)\big)$ est libre.

On peut donc retenir que toute sous-famille d'une famille libre est libre, et donc par contraposée, toute sur-famille d'une famille liée est liée.

En pratique ce résultat n'a que très peu d'intérêt. En effet, on préférera avoir des familles libres de taille maximale (nous verrons pourquoi dans un autre chapitre). Pour cela on utilisera le théorème suivant.

Théorème 24 Ajout d'un vecteur dans une famille libre
Si $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$ est libre, alors :

$$\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}}\right) \text{ est libre} \iff \overrightarrow{u_{p+1}} \notin \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$$

et donc par contraposée :

$$\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}}\right) \text{ est liée} \iff \overrightarrow{u_{p+1}} \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right) \iff \overrightarrow{u_{p+1}} \text{ est CL de } \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$$

On peut donc retenir que si on a une famille libre de $\mathbb{E}$, alors on peut lui ajouter un vecteur qui n'est pas CL des vecteurs de la famille, tout en gardant une famille libre.

Exemple **:** Former une famille libre à trois vecteurs à partir de $\Big((1,2,0);(2,1,0)\Big)$.

2.5 Bases

Définition 25 Base d'un K-ev
Soit $\mathscr{B}$ famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$.
On dit que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{E}$ lorsque $\mathscr{B}$ est libre et génératrice de $\mathbb{E}$.

Proposition 26 Base de $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$
Soit $\mathscr{F}$ famille finies de vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors :

$$\mathscr{F} \text{ base de } \operatorname{Vect}(\mathscr{F}) \iff \mathscr{F} \text{ est libre}$$

Exemple **:** $\mathscr{B} = \Big((1,0,1);(0,1,2)\Big)$ est une base de $\mathbb{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y = z\right\}$.

Exemple **:** $\boxed{\text{Base canonique de } \mathbb{K}^n}$ On pose $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\right)$, avec $\overrightarrow{e_i} = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{i–ième position}}}{1}, 0, \dots, 0)$, pour $i \in [\![1,n]\!]$. On a vu au paragraphe 2.3. que $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$, et au paragraphe 2.4. qu'elle est libre. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

Exemple **:** $\boxed{\text{Base canonique de } \mathbb{K}_n[X]}$ On pose $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. On a vu au paragraphe 2.3. que $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, et au paragraphe 2.4. qu'elle est libre. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple **:** $\boxed{\text{Base canonique de } \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})}$ On pose $\mathscr{B} = (E_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$. On a vu au paragraphe 2.3. que $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, et au paragraphe 2.4. qu'elle est libre. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique** de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Théorème 27 Caractérisation des bases
Soit $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}\right)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors on a équivalence de :
(i) $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{E}$;
(ii) pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$, $\exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\varepsilon_k$.

Définition 28 Coordonnées dans une base
Soit $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}\right)$ une base de $\mathbb{E}$. Le théorème précédent donne que tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ est caractérisé par l'unique p-liste $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\varepsilon_k$.
Les scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont appelés coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}$. On le note :

$$\overrightarrow{x} = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^{\mathscr{B}}$$

Exemple : $\boxed{\text{Coordonnées dans la base canonique de } \mathbb{K}^n}$ Elles sont égales aux composantes du vecteur. Par exemple, si $\overrightarrow{x} = (2,1,3)$, alors ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont $(2,1,3)$.

Exemple : $\boxed{\text{Coordonnées dans la base canonique de } \mathbb{K}_n[X]}$ Elles sont égales aux coefficients de la fonction polynômes. Par exemple, $P = X^2 + 2X + 1$ a pour coordonnées $(1,2,1)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exemple : $\boxed{\text{Coordonnées dans la base canonique de } \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})}$ Elles sont égales aux coefficients de la matrice. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(1,-1,1,2,0,1)$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_{23}(\mathbb{R})$.

Exemple : Dans $\mathbb{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + 2y = z\right\}$. Une base de $\mathbb{F}$ est $\mathscr{B} = \Big((1,0,1);(0,1,2)\Big)$. Par exemple : $\overrightarrow{x} = (1,1,3) = (1,1)^{\mathscr{B}}$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $\left(1, X-1, (X-1)^2\right)$, quelles sont les coordonnées de $P = X^2 + 2X + 1$.

Exemple : Dans $\mathbb{E}$ muni d'une base $\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}\right)$, quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{\varepsilon_k}$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$?

3 Exercices

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, justifier si la partie considérée est un sous-espace vectoriel.

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 = 0\}$
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 0\}$
3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x - y = 0\}$
4. $D = \{(a+b, a-b, a);\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$
5. $E = \{(1+x, x);\ x \in \mathbb{R}\}$
6. $F = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Exercice 2 On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions numériques. Déterminer si les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

1. $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} /\ f \text{ continue}\}$
2. $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} /\ f \text{ paire}\}$
3. $C = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} /\ f \text{ impaire}\}$
4. $D = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} /\ f \text{ s'annule}\}$

Exercice 3 On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Les parties suivantes sont-elles de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. $A = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} /\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$
2. $B = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} /\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monotone}\}$
3. $C = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} /\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergente}\}$
4. $D = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} /\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ arithmétique}\}$
5. $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} /\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + \dfrac{1}{n+1} u_n\right\}$

Exercice 4 On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Les parties suivantes sont-elles de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$?

1. $A = \{P \in \mathbb{K}[X] /\ 0 \text{ est racine de } P\}$
2. $B = \{P \in \mathbb{K}[X] /\ 0 \text{ est racine double de } P\}$
3. $C = \{P \in \mathbb{K}[X] /\ 0 \text{ est racine au moins d'ordre 2 de } P\}$
4. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé : $D = \{P \in \mathbb{K}[X] /\ \deg(P) = n\}$

Exercice 5

1. Montrer que la partie $A = \left\{\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & -a-b \end{pmatrix} \Big/ (a,b) \in \mathbb{K}^2\right\}$ est un sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La partie $B_p = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \big/ A^p = 0_n\}$ est-elle un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?
   On pourra considérer $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$ $\mathbb{K}$-ev. Montrer que $\mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ si et seulement si $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ ou $\mathbb{G} \subset \mathbb{F}$.

Familles libres, génératrices

Exercice 7 Les familles suivantes sont-elles libres (si non, on donnera une combinaison linéaire nulle, dont les coefficients sont non tous nuls) ? génératrices de $\mathbb{R}^3$ (si non, on donnera un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne s'exprime pas en fonctions des vecteurs de la famille) ? Sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1 &= \Big((2,4,3),(1,5,7)\Big)\\
\mathscr{F}_2 &= \Big((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)\Big)\\
\mathscr{F}_3 &= \Big((1,1,0),(2,1,0),(0,1,1)\Big)
\end{aligned}$$

Exercice 8 Les sev de $\mathbb{K}^n$ peuvent être définie de 3 façons différentes :
• Par des équations cartésiennes : $A = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x-y+z=0 \text{ et } y-2t=0\big\}$.
• Par un paramétrage : $B = \big\{(2a-3b+c, a+2b-c, -b+c, a);\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\big\}$.
• Par la donnée d'une base (ou d'une famille génératrice) : $C = Vect\Big((1,2,-1,0),(0,1,3,-1)\Big)$.
Ecrire chacun de ces ensembles sous les trois formes possibles.

Exercice 9 Les famille suivantes sont-elles des familles libres de l'espace vectoriel indiqué ?

1. $\Big((X-1)^2,(X-2)^2,(X-3)^2\Big)$ dans $\mathbb{R}[X]$
2. $\Big(X^2+1, 2X, 2X^2+X\Big)$ dans $\mathbb{R}[X]$
3. $\Big(x \mapsto \cos(x), x \mapsto x\cos(x), x \mapsto \sin(x), x \mapsto x\sin(x)\Big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
4. $\Big((1)_{n\in\mathbb{N}}, (\cos^2 n)_{n\in\mathbb{N}}, (\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
5. $\Big((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
6. $\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 10 Donner une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

1. $\mathbb{E} = \big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n\big\}$
2. $\mathbb{F} = \big\{P \in \mathbb{K}[X] / \ 0 \text{ est racine de } P\big\}$
3. $\mathbb{G} = \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$

Exercice 11 On dit qu'une famille de polynômes $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ (où $n \in \mathbb{N}$) est <u>échelonnée</u> lorsque, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\deg(P_k) = k$.
Montrer que toute famille échelonnée de polynômes $(P_0, \dots, P_n)$ forme une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 12 Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $\big(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\big)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{E}$.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $\vec{\varepsilon}_k = \vec{e}_k + \vec{e}_{k+1}$.
Montrer que la famille $\big(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_{n-1}\big)$ est libre.

Chapitre 12

Séries numériques

Le but de ce chapitre est de définir, lorsque cela est possible, la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, et de l'utiliser dans des calculs.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1 Série numérique
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombre réels définie à partir d'un rang n_0. On lui associe une suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

La suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est appelée série de terme général u_n, et est notée $\sum_{n\geq n_0} u_n$.
Pour $n \geq n_0$ donné, le réel S_n est appelé somme partielle de rang n associée à la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$, et le réel u_n est appelé terme général de cette série.

⚠ ATTENTION ! Il ne faut pas confondre la série (qui est une suite de réels) et ses sommes partielles (qui sont des nombres réels).

Exemple **:** La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est appelée série harmonique.

Proposition 2 Les sommes partielles donnent le terme général
Si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est une série numérique, alors :

$$\forall n \geq n_0 + 1, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$$

Définition 3 Nature d'une série
On dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge lorsque la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, ie lorsque $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ existe et est finie.
Dans le cas contraire (la limite est infinie ou elle n'existe pas), on dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge.
Deux séries sont dites de même nature lorsqu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.
Déterminer la nature d'une série c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

Rédaction : Pour montrer que deux séries sont de même nature il faut donc montrer que :
$\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge $\iff \sum_{n\geq n_1} v_n$ converge.
Pour cela on montre que :
« $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n\geq n_1} v_n$ converge » et « $\sum_{n\geq n_1} v_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n\geq n_0} u_n$ converge ».
Ou par contraposée :
« $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n\geq n_1} v_n$ converge » et « $\sum_{n\geq n_1} u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n\geq n_0} v_n$ diverge ».
Ou encore :
« $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n\geq n_1} v_n$ diverge » et « $\sum_{n\geq n_1} v_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge ».

Proposition 4 Les premiers termes ne changent pas la nature de la série
Si $n_1 \geq n_0$, alors les deux séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_1} u_n$ sont de même nature.

Définition 5 Somme et reste d'une série convergente
On suppose que $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge et pour $n \geq n_0$, on note $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ sa somme partielle de rang n.

1. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est appelée somme de la série et est notée $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} S_n$.
2. Pour tout $n \geq n_0$, $R_n = S - S_n$ est appelé reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

Proposition 6 Propriétés du reste d'une série convergente
On suppose que $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge et pour $n \geq n_0$, on note R_n son reste d'ordre n.

1. Pour tout $n \geq n_0$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Au passage, on peut noter que la relation de Chasles est vraie pour les sommes de séries.
2. $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

⚠ ATTENTION aux notations :
- $\sum_{n\geq n_0} u_n$ désigne la série (donc une suite réelle) ;
- $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ désigne la somme partielle de rang n de la série (donc un nombre réel) ;

et pour une **série convergente** :
- $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ désigne la somme de la série (donc un nombre réel) ;
- $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série (donc un nombre réel).

Dans la somme de la série, la variable est **muette** :

$$S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{p=n_0}^{+\infty} u_p = \dots$$

par contre pour le reste d'ordre n il ne faut pas prendre n comme variable de la somme, cela n'a aucun sens : $\sum_{n=n+1}^{+\infty} u_n$ n'existe pas !

⚠ ATTENTION ! La somme d'une série convergente dépend des premiers termes. Si $n_1 > n_0$, la relation de Chasles donne :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n$$

Exemple **:** La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Exemple **:** La série géométrique $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge vers 2 (ce qui lève le fameux paradoxe de Xénon).

1.2 Propriétés des séries

Théorème 7 Dualité suite/série
Si $(v_n)_{n\geq n_0}$ est une suite réelle, on pose pour tout $n \geq n_0 + 1$: $u_n = v_n - v_{n-1}$. Alors :

$$(v_n)_{n\geq n_0} \text{ est convergente} \iff \sum_{n\geq n_0+1} u_n = \sum_{n\geq n_0+1} (v_n - v_{n-1}) \text{ est convergente}$$

Dans ce cas :

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (v_n - v_{n-1}) = \left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right) - v_{n_0}$$

L'implication $\Longrightarrow$ est une généralisation aux séries des sommes télescopiques, et sert dans de nombreux calculs.

Exemple **:** La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge vers 1.

La réciproque $\Longleftarrow$ donne une nouvelle méthode pour montrer qu'une suite converge sans calculer sa limite (l'autre étant le théorème de la limite monotone). Nous verrons des applications en TD.

Théorème 8 Condition nécessaire de convergence

1. Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série numérique convergente. Alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Par contraposée : si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse comme le montre la série harmonique.

Définition 9 Série grossièrement divergente
Une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$, telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ ou n'existe pas, est appelée série grossièrement divergente.

Exemple **:** Les séries $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ et $\sum_{n\geq 0} n!$ sont grossièrement divergentes.

Théorème 10 Linéarité de la convergence
Si les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les séries $\sum_{n\geq n_0} (u_n + v_n)$ et $\sum_{n\geq n_0} \lambda.u_n$ convergent aussi. De plus :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda.u_n = \lambda. \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

Corollaire 11 Espace vectoriel des séries convergentes
On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des séries numériques convergentes, définies à partir d'un même rang n_0. Alors $\mathscr{E}$ muni des opérations naturelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Corollaire 12 Addition de deux séries

1. On peut écrire :
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=n_0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=n_0}^{+\infty}v_n$$
dès qu'**au moinx deux séries convergent**.
2. Si l'une des séries $\sum_{n\geq n_0}u_n$ ou $\sum_{n\geq n_0}v_n$ converge et l'autre diverge, alors $\sum_{n\geq n_0}(u_n+v_n)$ diverge.
3. Si les deux séries $\sum_{n\geq n_0}u_n$ et $\sum_{n\geq n_0}v_n$ divergent, alors on ne peut rien dire de général sur $\sum_{n\geq n_0}(u_n+v_n)$ (on a une forme indéterminée).

Corollaire 13 Multiplication d'une série par une constante
Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$, les séries $\sum_{n\geq n_0}u_n$ et $\sum_{n\geq n_0}\lambda.u_n$ sont de même nature.

Si on multiplie $\sum_{n\geq n_0}u_n$ par $\lambda=0$, on obtient la série nulle, qui converge vers 0. Ce cas n'est donc pas particulièrement intéressant...

2 Séries à termes positifs

En multipliant une série à termes négatifs par -1, on obtient une série à termes positifs, et ces deux séries sont de même nature. Tout ce qui suit concerne donc aussi les séries à termes négatifs, et plus généralement **les séries dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang** (car la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes).

2.1 Règles de comparaison

Soit $(S_n)_{n\geq n_0}$ une suite croissante à partir d'un rang n_0. On rappelle que d'après le théorème de la limite monotone, on a seulement deux alternatives possibles :
• $(S_n)_{n\geq n_0}$ converge vers un réel ℓ vérifiant : $\forall n\geq n_0$, $S_n\leq\ell$;
• $(S_n)_{n\geq n_0}$ diverge vers $+\infty$.

Définition 14 Série à termes positifs
On dit que la série $\sum_{n\geq n_0}u_n$ est à termes positifs lorsque : $\forall n\geq n_0$,$u_n\geq 0$.

Théorème 15 Nature d'une série à termes positifs

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série à termes positifs. Pour $n \geq n_0$, on note $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ sa somme partielle de rang n. Alors :

1. $(S_n)_{n\geq n_0}$ est croissante.
2. $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge $\iff$ $(S_n)_{n\geq n_0}$ est majorée. Dans ce cas si M est un majorant de $(S_n)_{n\geq n_0}$:
$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq M$$
3. Si $(S_n)_{n\geq n_0}$ non majorée, alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge et $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Si $(S_n)_{n\geq n_0}$ non majorée, alors on peut poser $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = +\infty$. Pour une série à termes positifs, la notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ a donc toujours un sens dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Par exemple : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

⚠ ATTENTION : par contre la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ n' a aucun sens (la limite n'existe pas) !

Théorème 16 Théorème de comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$.

Alors : $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, et dans ce cas $0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

Donc par contraposée : $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq n_0} v_n$ diverge.

Rédaction : On rédige de la manière suivante : on a $\forall n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge, donc d'après le théorème comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs, $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

⚠ ATTENTION, la rédaction suivante est fausse :

on a $\forall n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$, donc $0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge, donc d'après le théorème comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs, $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

En effet, on ne peut pas utiliser la notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ dans un calcul tant que la convergence n'a pas été justifiée.

Exemple **:** $\forall n \geq 2$, $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge, donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse, ie si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, alors on ne peut rien dire sur

la nature de $\sum_{n\geq n_0} v_n$. On peut considérer le contre-exemple suivant : $\forall n \geq 2, 0 \leq \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n}$ mais $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge.
Dans le théorème de comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs, on ne peut donc pas dire que les deux séries sont de même nature.

⚠ ATTENTION ! Ce théorème n'est vrai que pour des séries à termes positifs (ou de signe constant) ! Nous verrons un contre-exemple en TD (il n'est pas simple d'en construire un).

Corollaire 17 Théorème de comparaison par équivalents pour des séries à termes positifs
Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \geq 0$ a.p.c.r..
Alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ sont de même nature.

Le résultat est donc plus fort que pour la comparaison par inégalité, puisque les deux séries sont de même nature

⚠ ATTENTION : par contre, en cas de convergence, les sommes des deux séries ne sont pas égales !

⚠ ATTENTION ! Ce théorème n'est vrai que pour des séries à termes positifs (ou de signe constant). Nous verrons un contre-exemple en TD.

Exemple : $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge et $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

Corollaire 18 Théorème de comparaison par « petit o » pour des séries à termes positifs
Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ a.p.c.r., et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
Alors : $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.
Donc par contraposée : $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n\geq n_0} v_n$ diverge.

⚠ ATTENTION : cette fois les deux séries ne sont pas de même nature.

⚠ ATTENTION ! Ce théorème n'est vrai que pour des séries à termes positifs (ou de signe constant).

Exemple : $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Exemple : $e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}$ converge.

Ces résultats sont très utiles pour étudier la nature d'une série. Par contre, on peut remarquer qu'ils ne donnent aucune information sur la valeur de sa somme en cas de convergence.

2.2 Convergence absolue

Définition 19 Convergence absolue
On dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge absolument lorsque la série $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$ converge.

Dans le cas d'une série à termes positifs (ou de signe constant), la convergence absolue coïncide avec la convergence. Pour les séries dont le terme général change de signe, l'intérêt de cette notion repose sur le théorème suivant.

Théorème 20 La convergence absolue implique la convergence
Si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge absolument alors elle converge.

Démonstration : On remarque que, pour tout $n \geq n_0$: $u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$. On conclut grâce au théorème de comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs, et par linéarité de la convergence.

CQFD □

Exemple : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

Exemple : Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $b \in]0,1[$, la fonction de Weierstrass $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos((a^n \pi x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

On peut donc dans certains cas se ramener à l'étude de $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$. On travaille alors avec une série à termes positifs, et tous les résultats du paragraphe précédent s'appliquent.

Proposition 21 Propriétés des séries absolument convergentes
On se donne $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ deux séries absolument convergentes.

1. Inégalité triangulaire. On a :
$$\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$$
2. Linéarité de l'absolue convergence. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les séries $\sum_{n\geq n_0} (u_n + v_n)$ et $\sum_{n\geq n_0} \lambda . u_n$ sont aussi absolument convergentes.

Définition 22 Série semi-convergente
Une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est dite semi-convergente lorsqu'elle est convergente, mais non absolument convergente, ie que $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge et $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$ diverge.

Exemple **:** La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente (c'est loi d'être évident ; sa somme vaut $-\ln(2)$).

Les séries semi-convergentes sont « pathologiques ». On a en particulier le résultat suivant, du à Riemann.

Théorème 23 Commutativité des termes dans un série convergente
Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série convergente.

1. Si elle est absolument convergente, alors on peut commuter ses termes sans changer la valeur de sa somme. Autrement dit, pour tout bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ on a :
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$
2. Si elle est semi-convergente, alors toute commutation des termes peut changer la valeur de la somme. On peut même montrer que pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ on a :
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ell$$
C'est le théorème de réarrangement de Riemann.

Ce théorème est hors-programme ! Mais il faut retenir que pour une série **absolument convergente**, l'ordre des termes n'intervient pas dans le calcul de la somme. Ce résultat aura son importance dans le chapitre sur les variables aléatoires discrètes.

3 Séries de référence

3.1 Séries de Riemann

Théorème 24 Séries de référence de Riemann
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Longleftrightarrow \alpha > 1$$
Dans ce cas la convergence est absolue, puisque la série est à termes positifs.

Démonstration : Pour $\alpha \leq 0$, la série est grossièrement divergente. Pour $\alpha > 0$, on utilise une comparaison à une intégrale.

CQFD □

Dans le cas $\alpha > 1$, on ne connaît pas la valeur de $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, sauf dans des cas particuliers. La fonction ζ est appelée fonction de Riemann, et elle est reliée à de nombreux problèmes. Il est bien de connaître la valeur suivante :
$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Corollaire 25 Règles du $n^\alpha u_n$ pour des séries à termes positifs
Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série à termes positifs.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge (absolument).
2. S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge.

En pratique, il est conseillé de redémontrer ce critère à chaque fois.

Exemple **:** La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln^3(n)}{n^2}$ est convergente (absolument).

3.2 Séries géométriques et leurs dérivées

Théorème 26 Séries géométriques
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum_{n\geq 0} x^n \text{ converge} \iff |x| < 1$$

Dans ce cas la convergence est absolue et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{n=p}^{+\infty} x^n = \frac{x^p}{1-x}$$

Ces formules sont à connaître parfaitement.

Théorème 27 Formule du binôme négatif
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{n\geq r} \binom{n}{r} x^n \text{ converge} \iff |x| < 1$$

Dans ce cas la convergence est absolue et on a :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$

<u>Démonstration</u> **:** On pose $S(N,r) = \sum_{n=r}^{N} \binom{n}{r} x^n$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq r$.

Pour tout $N \geq r+1$, on peut vérifier que :

$$(1-x)S(N,r+1) = -\binom{N}{r+1} x^{N+1} + xS(N-1,r)$$

Par récurrence sur r on peut donc montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} S(N,r) = \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

CQFD □

Cette formule est utilisée en pratique sous la forme suivante.

Corollaire 28 Dérivées de la série géométrique
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{n\geq p} n(n-1)\times\cdots\times(n-p+1)x^{n-p} \text{ converge} \iff |x|<1$$

Dans ce cas la convergence est absolue et on a :

$$\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\times\cdots\times(n-p+1)x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\times\cdots\times(n-p+1)x^{n-p} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

De manière mnémotechnique, on peut retenir que :

$$\text{« } \sum_{n=0}^{+\infty} \text{ dérivée } p \text{ fois de } x^n = \text{ dérivée } p \text{ fois de } \frac{1}{1-x} \text{ »}$$

Les formules les plus souvent utilisées sont les suivantes, valables pour $|x|<1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

et en ajoutant $x \neq 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Exemple **:** Nature et calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

3.3 Séries exponentielles

Théorème 29 Séries exponentielles
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge absolument (et donc converge). De plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

En particulier : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = \mathrm{e}$ (la constante de Néper).

Exemple **:** Nature et calcul de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n-1}{n!}$.

3.4 Méthodologie pour étudier la nature d'une série

On souhaite déterminer la nature de $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

• Si l'énoncé demande explicitement de montrer que la série converge et de calculer sa somme il faut transformer l'expression des sommes partielles $\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ en faisant apparaître par télescopage, changement d'indice, Chasles ou linéarité des sommes partielles de séries de références. On calcule ensuite $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n$ et il faut trouver une limite finie (ce qui prouve la convergence de la série). La somme de la série est alors égale à cette limite.
• Si l'énoncé demande la nature de la série, on procède par ordre décroissant de priorité :
⋆ si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ la série diverge grossièrement ;
⋆ si u_n n'est pas de signe constant, étudier la nature de $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$;
⋆ chercher un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$;
⋆ essayer la règle du $n^\alpha u_n$;
⋆ encadrer u_n ;
⋆ essayer de calculer $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n$, en faisant éventuellement apparaître des séries de référence.

4 Produit de séries

Terminons par une petite explication sur la pire bêtise du chapitre.

⚠ ATTENTION ! La formule suivante est totalement fausse :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times v_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

On a par contre le résultat suivant qui n'est pas au programme.

Théorème 30 Produit de Cauchy
Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} u_n \times v_{n-k}$$

Alors la série $\sum_{n\geq 0} c_n$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

5 Exercices

Exercice 1 Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$
2. $u_n = \frac{n^2-5}{n(2n^+1)}$
3. $u_n = \frac{n-2}{2^n-1}$
4. $u_n = \frac{\sqrt[n]{2}-1}{2n+3}$
5. $u_n = n\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$
6. $u_n = \frac{n}{n+1}$
7. $u_n = \frac{\cos(n!)}{n^3+\cos(n!)}$
8. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Exercice 2 Montrer la convergence de la série de terme général u_n puis calculer sa somme :

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
2. $u_n = \frac{6}{5^{n+2}}$
3. $u_n = \frac{2n(n+1)}{3^n}$
4. $u_n = (-1)^n \frac{n^2+3}{5^n}$
5. $u_n = (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)!}$
6. $u_n = \frac{n^2+n+1}{n!}$
7. $u_n = \ln\left(\frac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right)$
8. $u_n = \frac{\binom{n}{k}}{n!}$, $k \in \mathbb{N}^*$ fixé

Exercice 3 Étudier la convergence absolue et la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
2. $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$
3. $u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$
4. $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$

Exercice 4 Étudier la nature de la série de terme général u_n en fonction des paramètres indiqués :

1. $u_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 5

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = S_n - \ln(n)$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.
   (a) Montrer que $\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

Exercice 6 On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^n}$.

1. Montrer que cette série converge.
2. On note S la somme de la série, et S_n sa somme partielle de rang n. Vérifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |S - S_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$$
3. Écrire un programme Scilab qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

Exercice 7

1. Étudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.
2. Établir la convergence de la suite $(P_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$.

Exercice 8 (Critère spécial des séries alternées) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs, convergente vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

1. (a) Monter que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ est convergente.
   (c) Montrer que si $\in \mathbb{N}$: $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k\right| \leq a_n$
2. Étudier la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.
   En déduire un contre-exemple ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ sont de nature différente (considérer $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$...).

Exercice 9 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

Exercice 10 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \sin(x) - x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis montrer que (u_n) est strictement positive et convergente vers 0^+.
2. Dans les questions suivantes, on admettra que : $\sin(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$.
   (a) À l'aide de l'étude la série $\sum_{n\geqslant 0} u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n^3$ converge.
   (b) À l'aide de l'étude la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ diverge.

Exercice 11 (Exemple de série de fonctions ex1.15 Analyse ESCP 2012) Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ la somme partielle de rang n de la série de terme général $u_k(x)$. En considérant les sommes partielles de rangs pairs et celles de rangs impairs, montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge pour tout réel x.
   On notera $u(x)$ la somme de cette série.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.
   Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| \leq \ln(1 + \frac{1}{n+1})$.
3. Montrer que la série de terme général $(-1)^n \ln(1 + \frac{1}{n})$ est convergente. On notera s sa somme.

4. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

   On pourra considérer $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$, et utiliser le fait que :

$$|u(x)-s| \leq |u(x)-S_n(x)| + |S_n(x)-s_n| + |s_n - s|$$

5. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $s_{2n} = \ln\left(\dfrac{(2n!)^2}{2^{4n}(n!)^4}(2n+1)\right)$ et en utilisant l'équivalence de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.

Exercice 12 (Critère de d'Alembert) 1. On se donne une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positifs.

On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ avec $\ell \in \overline{R}^+ = [0,+\infty]$.

(a) Cas où $\boxed{\ell < 1.}$

Montrer qu'à partir d'un certain rang : $a_{n+1} \leq \dfrac{1+\ell}{2} a_n$.

En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est convergente.

(b) Cas où $\boxed{\ell > 1.}$

Avec la même méthode que précédemment, montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est divergente.

(c) Cas où $\boxed{\ell = 1.}$

À l'aide des séries de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, construire un exemple où $\ell = 1$ et la série diverge, et un exemple ou $\ell = 1$ et la série converge.

2. **Applications.**

(a) Retrouver le résultat du cours suivant : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge absolument.

(b) Étudier la nature de la série : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dbinom{2n}{n}$.

Exercice 13 (Un calcul de somme) On admettra dans cet exercice que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente.

2. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ et $T_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^2}$.

(a) Établir que si $N \geq 1$:

$$S_{2N} = \frac{1}{4}T_N - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad T_{2N} = \frac{1}{4}T_N + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

(b) En déduire que pour $N \geq 1$: $S_{2N} = \dfrac{1}{2}T_N - T_{2N}$.

(c) Conclure que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

Chapitre 13

Espaces probabilisés quelconques

1 Vocabulaire et axiomatique

1.1 L'univers

On considère une expérience aléatoire, et note Ω **l'univers** associé. On rappelle que les éléments $\omega \in \Omega$ sont appelés **observations** ou **réalisations** de l'expérience aléatoire.

Dans le chapitre 6, nous avons vu différents exemples d'univers finis. Nous allons lever cette restriction de finitude. On peut d'ores et déjà donner les exemples suivant.

Exemple **:** On lance une infinité de fois une pièce : $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ ou $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Un élément $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$ est une suite réelle qui représente la liste des résultats obtenus aux lancers, le terme de rang n (ie ω_n) représentant le résultat du n-ième lancer. Par exemple n'obtenir que des « pile » se note $\omega = (1,1,1,\dots)$.

Exemple **:** Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
On effectue une infinité de tirages successifs **avec remise** d'une boule, dans une urne de N boules : $\Omega = [\![1,p]\!]^{\mathbb{N}}$. Ceci sous-entend qu'on a numéroté les p boules de 1 à p ; un élément $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle qui représente la liste des numéros tirés, la terme de rang n (ie ω_n) représente le numéro obtenu lors du du n-ième tirage.

1.2 La tribu des évènements

Intuitivement, un évènement A est défini par une phrase qui peut être vraie ou fausse selon le résultat de l'expérience aléatoire. On a vu au chapitre 6 qu'un évènement A est nécessairement **une partie de** Ω, ie que $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

Si on note $\mathscr{F}$ l'**ensemble de tous les évènements** qu'on peut associer à l'expérience aléatoire, alors $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$. L'ensemble $\mathscr{F}$ est une **tribu**, au sens suivant.

Définition 1 Tribu d'évènements
Soit $\mathscr{F}$ une collection de parties de Ω, ie $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$. On dit que $\mathscr{F}$ est une tribu d'évènements lorsque :
(i) $\Omega \in \mathscr{F}$;
(ii) $\mathscr{F}$ est stable par passage au complémentaire :

$$\forall A \in \mathscr{F}, \quad \overline{A} \in \mathscr{F}$$

(ii) $\mathscr{F}$ est stable par union dénombrable :

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}, \quad \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{F}$$

Précisons quelques notations :
• $\mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites d'évènements, donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ signifie simplement que $A_n \in \mathscr{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
• $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est égal à $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Donnons maintenant les propriétés d'une tribu d'évènements.

Théorème 2 Propriétés d'une tribu d'évènements
Soit $\mathscr{F}$ une tribu d'évènements. Alors :
(iv) $\emptyset \in \mathscr{F}$;
(v) $\mathscr{F}$ est stable par union finie :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall (A_1, \dots, A_N) \in \mathscr{F}^N, \quad \bigcup_{k=1}^{N} A_k \in \mathscr{F}$$

(vi) $\mathscr{F}$ est stable par intersection dénombrable :

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}, \quad \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{F}$$

(vii) $\mathscr{F}$ est stable par intersection finie :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall (A_1, \dots, A_N) \in \mathscr{F}^N, \quad \bigcap_{k=1}^{N} A_k \in \mathscr{F}$$

Exemple **:** Pour tout univers Ω, on a les exemples triviaux de tribus suivants : $\{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathscr{P}(\Omega)$.

En pratique si Ω est fini ou dénombrable (ie en bijection avec $\mathbb{N}$), on choisira $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Dans les autres cas (univers infinis non dénombrables, par exemple $\Omega = \mathbb{R}$), on ne précisera pas la tribu $\mathscr{F}$ par souci de simplicité (et parce que le programme d'ECS ne permet pas de la décrire rigoureusement).

Définition 3 Espace probabilisable
Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathscr{F})$ où Ω est l'univers et $\mathscr{F}$ est une tribu d'évènements.

Exemple **:** Sur $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ on peut choisir comme tribu :
• $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ si on s'intéresse au chiffre obtenu en lançant un dé ;
• $\mathscr{F} = \{\emptyset; \{2,4,6\}; \{1,3,5\}, \Omega\}$ si on s'intéresse seulement à la parité du chiffre obtenu en lançant un dé.
Le choix de la tribu dépend donc de l'expérience à modéliser.

Les propriétés suivantes ont été vues au chapitre 6, dans le cas de familles finies d'évènements $(A_1, A_2, \dots, A_N)$.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille dénombrable d'évènements (= suite d'évènements) :

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} \qquad \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$$

$$B \cap \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n) \qquad B \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (B \cup A_n)$$

Définition 4 Famille dénombrable d'évènements deux à deux incompatibles
Les évènements de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dits deux à deux incompatibles lorsque :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

1.3 Systèmes complets d'évènements dénombrables

On se donne un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{F})$.

Définition 5 Système complet d'évènements dénombrable
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de Ω. On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements (= s.c.e.) dénombrable lorsque :
(i) les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

(ii) $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega$
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \neq \emptyset$

Intuitivement, un s.c.e. correspond à une disjonction des cas, suivant le résultat de l'expérience aléatoire.

Exemple **:** On lance une infinité de fois une pièce de monnaie. On note P_∞ = « on obtient une infinité de piles », et pour $n \in \mathbb{N}$, P_n = « on obtient exactement n piles ». Alors la famille $(P_\infty, P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots)$ est un s.c.e. dénombrable.

Proposition 6 Décomposition d'un évènement sur un s.c.e.
Tout évènement se décompose sur un s.c.e. dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en une union d'évènements deux à deux incompatibles :

$$\forall B \in \mathscr{F}, \quad B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n)$$

et les $\left(B \cap A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles.

On rappelle qu'on avait le même résultat avec un s.c.e. fini.
Un s.c.e. permet aussi de définir une tribu.

Théorème 7 Tribu engendré par un s.c.e.
Si $(A_i)_{i\in I}$ est un s.c.e. (fini ou dénombrable), il existe une unique tribu sur Ω qui est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) qui contient tous les A_i, $i \in I$.

Ce théorème justifie la définition suivante.

Définition 8 Tribu engendré par un s.c.e.
Si $(A_i)_{i\in I}$ est un s.c.e. (fini ou dénombrable), la plus petite tribu contenant les A_i, $i \in I$, est appelée tribu engendrée par les s.c.e. $(A_i)_{i\in I}$.

Si à la fin de l'expérience, on a seulement l'information qu'un des évènements du s.c.e. s'est réalisé, la tribu engendrée par ce s.c.e. représente l'ensemble des évènements pour lesquels on pourra dire s'ils sont réalisés ou non.

Exemple **:** Si on lance un dé à 6 faces et considère le s.c.e. $\left(A, \overline{A}\right)$ où $A = \{2;4;5\}$ = « obtenir un chiffre pair », alors la tribu engendrée est $\mathscr{F} = \left\{\emptyset; \{2,4,6\}; \{1,3,5\}, \Omega\right\}$.

1.4 Probabilités sur un espace probabilisé quelconque

Définition 9 Probabilité
Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ toute application $\mathbb{P} : \mathscr{F} \longrightarrow [0,1]$ telle que :
(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
(ii) $\mathbb{P}$ est σ-additive :

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}, \quad \text{les } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont 2 à 2 incompatibles} \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Si A est un évènement, alors le réel $\mathbb{P}(A)$ est appelé probabilité de l'évènement A.

Dans le point (ii), il est sous-entendu que : si les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ converge.

Le σ devant la propriété de σ-additivité signifie qu'on prend une famille dénombrable, et qu'on obtient la somme d'une série.

Donnons un exemple de calcul de la probabilité d'un évènement du type $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Exemple **:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne composée de n boules noires, 1 boule rouge et 1 boule verte (donc $n+2$ boules au total). On effectue une infinité de tirages successifs d'une boule avec remise.
Montrer que la probabilité de l'évènement E = « au moment où on obtient la boule rouge pour la première fois, la boule verte n'a jamais été obtenue » est égale à $\frac{1}{2}$.

Définition 10 Espace probabilisé
Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ où Ω est l'univers, $\mathscr{F}$ est la tribu des évènements et $\mathbb{P}$ est une probabilité définie sur $\mathscr{F}$.

Théorème 11 Propriétés d'une probabilité
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors :
(iii) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
(iv) $\mathbb{P}$ est additive :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{F}^n, \text{les } (A_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \text{ 2 à 2 incompatibles} \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

On se donne deux évènements A et B :
(v) $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
(vi) $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et donc si $B \subseteq A$, alors $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$;
(vii) si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
(viii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

L'inégalité de Boole et la **formule du crible de Poincaré** sont encore valides (cf chap 6).

Nous avons au chapitre 6 comment définir simplement une probabilité sur un univers **fini**. Donnons la généralisation de ce résultat au cas d'un univers **infini dénombrable** (nous ne traiterons pas dans ce chapitre le cas d'un univers infini non dénombrable).
On considère donc un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{F})$ où Ω est dénombrable, ie $\Omega = \{\omega_n / n \in \mathbb{N}\}$. Dans ce cas, on choisit $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ (toute partie de Ω est un évènement).

Théorème 12 Probabilité sur un univers infini dénombrable

1. Soit $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \mathbb{P}\big(\{\omega_n\}\big)$. Alors les réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $[0,1]$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n$ converge et vérifie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
2. Réciproque. On se donne une suite de réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
   • ils sont positifs ;
   • la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
   Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}\big(\{\omega_n\}\big)$.
   Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in [0,1]$.

C'est le deuxième point que nous utiliserons pour définir une probabilité dans le cas d'un univers infini dénombrable. Cette probabilité $\mathbb{P}$ vérifie :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \omega_n \in A}} p_n$$

le nombre de termes de la somme pouvant éventuellement être infinie. Par exemple, si $A = \{\omega_0, \omega_2, \omega_4, \omega_6, \ldots, \omega_{2n}, \ldots\}$, alors : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_{2n}$.

Exemple **:** On peut poser : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Quelle est la probabilité de choisir un entier pair ?

Théorème 13 L'équiprobabilité n'existe pas dans le cas dénombrable
Lorsque Ω est dénombrable, on ne peut pas définir de probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

1.5 Propriétés de continuité monotone pour une probabilité

La propriété de σ-additivité donne le théorème suivant.

Théorème 14 Théorème de continuité monotone : cas d'une suite croissante/décroissante pour l'inclusion
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements, ie : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subseteq A_{n+1}$. Alors :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$
2. On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements, ie : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subseteq A_n$. Alors :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Exemple **:** On lance une infinité de fois une pièce de monnaie.
Alors $\mathbb{P}$(« on obtient que des faces ») = 0, et donc $\mathbb{P}$(« on obtient au moins un pile ») = 1.

On peut se passer de l'hypothèse de monotonie.

Corollaire 15 Théorème de continuité monotone
Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

Ce théorème permet, entre autres, de calculer $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$ sans l'hypothèse d'incompatibilité.

1.6 Évènements négligeables et presque sûrs

Définition 16 Évènement négligeable
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A un évènement. On dit que A est négligeable pour $\mathbb{P}$, ou que A est $\mathbb{P}$-négligeable, ou que A est quasi-impossible, lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$.

⚠ ATTENTION : A $\mathbb{P}$-négligeable ne signifie pas que $A = \emptyset$! Par contre l'évènement impossible $\emptyset$ est $\mathbb{P}$-négligeable pour toutes les probabilités $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$.

Exemple **:** Dans le jeu de pile ou face infini, l'évènement « on obtient que des faces » est négligeable pour la probabilité uniforme (ie si la pièce est équilibrée).

Définition 17 Évènement presque sûr
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A un évènement. On dit que A est presque sûre pour $\mathbb{P}$, ou que A est vrai $\mathbb{P}$-presque sûrement, ou que A est quasi-certain, lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$. On le note : A est vrai $\mathbb{P}$-p.s..

⚠ ATTENTION : A vrai $\mathbb{P}$-p.s. ne signifie pas que $A = \Omega$! Par contre l'évènement certain Ω est vrai $\mathbb{P}$-p.s. pour toutes les probabilités $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$.

Exemple **:** Dans le jeu de pile ou face infini, l'évènement « on obtient au moins un pile » est vrai p.s..

⚠ ATTENTION : ces notions dépendent du choix de $\mathbb{P}$!

1.7 Probabilités conditionnelles

La définition est la même que dans le cas d'un univers fini.

Définition 18 Probabilité conditionnelle
Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, le réel $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. $\mathbb{P}(A|B)$ est aussi notée $\mathbb{P}_B(A)$.

Intuitivement, $\mathbb{P}_B(A)$ représente le calcul de la probabilité de A, du point de vue d'un observateur qui observe l'expérience aléatoire seulement à partir du moment où B s'est déjà réalisé.

Exemple **:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne composée de n boules noires, 1 boule rouge et 1 boule verte (donc $n+2$ boules au total). On effectue une infinité de tirages successifs d'une boule avec remise.
On a vu que la probabilité de l'évènement E = « au moment où on obtient la boule rouge pour la première fois, la boule verte n'a jamais été obtenue » est égale à $\dfrac{1}{2}$ (le calcul utilisait la propriété de σ-additivité de $\mathbb{P}$). Retrouver ce résultat par analyse à un pas.

$\mathbb{P}_B$ définit une nouvelle probabilité sur Ω, comme l'énonce le théorème suivant.

Théorème 19 Propriétés de $\mathbb{P}_B$
Soit B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

1. Pour tout $A \in \mathscr{F}$, on a : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$.
2. $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.

La formule des probabilités composées est encore valides, sous la même forme (⚠pas de produit infini !).

Théorème 20 Formule des probabilités composées / Formule du conditionnement multiple
Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ des évènements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k}(A_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right)\end{aligned}$$

avec la convention que, pour $i = 1$: $\mathbb{P}\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)$.

La formule des probabilités totales se généralise au cas d'un s.c.e. dénombrable.

Théorème 21 Formule des probabilités totales
On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un s.c.e. dénombrable.
Alors, pour tout $B \in \mathscr{F}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$ converge et :

$$\forall B \in \mathscr{F}, \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$$

Complément : On dit que qu'une famille d'évènements $(A_n)_{n=0}^{+\infty}$ est un **système quasi-complet d'évènements dénombrable** lorsque :
(i) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$
(ii) $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) \neq 0$. La différence avec un s.c.e. dénombrable est que :
⋆ l'évènement $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ n'est pas certain mais seulement presque sûr ;
⋆ l'évènement A_n n'est pas impossible mais négligeable.
Pour ces valeurs $\mathbb{P}_{A_n}(B)$ n'existe pas ...mais on a tout de même la formule suivante :

$$\forall B \in \mathscr{F}, \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

Exemple : On suppose que le nombre d'actions mises en vente en une journée est $n \in \mathbb{N}$ avec probabilité $p_n = \mathrm{e}^{-2}\dfrac{2^n}{n!}$. On suppose aussi que chaque action trouve un acheteur avec probabilité $\dfrac{1}{3}$, indépendamment du devenir des autres actions. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité q_k de vendre k actions dans la journée.

La formule de Bayes se généralise elle aussi au cas d'un s.c.e. dénombrable, mais ce n'est pas au programme ! On se contentera de l'appliquer avec des s.c.e. finis.

1.8 Indépendance mutuelle d'une famille dénombrable d'évènements

Rappel : on dit que $A \perp\!\!\!\perp B$ lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Exemple : Quels sont les évènements A tels que $A \perp\!\!\!\perp A$?

On se donne une famille dénombrable d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 22 Indépendance deux à deux
On dit que les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux indépendants lorsque :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad n \neq p \Longrightarrow A_n \perp\!\!\!\perp A_p$$

Définition 23 Indépendance mutuelle
On dit que les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants lorsque :

$$\forall J \subseteq \mathbb{N}, \quad J \text{ finie} \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in J} A_n\right) = \prod_{n\in J} \mathbb{P}(A_n)$$

⚠ On ne peut pas dire que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \prod_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (pas de produit infini).

Proposition 24 Lien entre indépendance mutuelle et indépendance deux à deux
Si les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont aussi deux à deux indépendants.

⚠Comme on l'a vu au chapitre 6, la réciproque est fausse.

En pratique, on utilise l'indépendance mutuelle.

Le **lemme des coalitions** reste valide (cf chapitre 6).

Exemple **:** On lance une infinité de fois une pièce de monnaie. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'évènement « obtenir P au n-ième lancer ». Alors les évènements $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants.

Exemple **:** On effectue une infinité de tirages successifs d'une boule avec remise , dans une urne constituée de boules blanches et de boules noires. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement « obtenir une blanche au n-ième tirage ». Alors les évènements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants.

2 Variables aléatoires réelles

2.1 Variables aléatoires réelles

On se donne un espace probabilisable quelconque $(\Omega, \mathscr{F})$.

Définition 25 Variable aléatoire réelle
On appelle variable aléatoire réelle (VAR) sur $(\Omega, \mathscr{F})$ toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad X^{-1}\big(]-\infty, x]\big) = \big\{\omega \in \Omega \big/ X(\omega) \leq x\big\} \in \mathscr{F}$$

En première année d'ECS, on admettra toujours que X est une variable aléatoire réelle.

<u>Notation</u> : Si X est une VAR et A une partie de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on admettra que :

$$X^{-1}(A) = \big\{\omega \in \Omega \big/ X(\omega) \in A\big\}$$

est un élément de $\mathscr{F}$, ie que $X^{-1}(A)$ est un évènement. Cet évènement sera noté plus simplement $[X \in A]$. On a donc :

$$[X \in A] = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$$

On peut donc calculer $\mathbb{P}\big([X \in A]\big)$.
Pour simplifier les notations on notera $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\big([X \in A]\big)$.

Cas particuliers :
• Si $A = \{a\}$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $[X \in \{a\}]$ est noté plus simplement $[X = a]$.
• Si $A =]-\infty, a]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $\big[X \in]-\infty, a]\big]$ est noté plus simplement $[X \leq a]$.
• Si $A = [a, b[$ où $(a, b) \in \big(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\big)^2$, alors $\big[X \in [a, b[\big]$ est noté plus simplement $[a \leq X < b]$ etc...

Les évènements du type $[X \leq x]$ permettent d'en exprimer d'autres.

Exemple **:** $[a < X \leq b] = [X \leq b] \cap \overline{[X \leq a]} = [X \leq b] \setminus [X \leq a]$.

Exemple **:** $[X = x] = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[x - \frac{1}{n} < X \leq x\right]$.

2.2 Loi et fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

Définition 26 Fonction de répartition d'une VAR
On appelle fonction de répartition de X la fonction

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leq t) \end{array}$$

Théorème 27 Propriétés d'une fonction de répartition

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. On a $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.
3. F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
4. On a $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t)$
   et $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b \Longrightarrow \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Démonstration :

1. Si $t_1 \leq t_2$, alors $[X \leq t_1] \subseteq [X \leq t_2]$.
2. Les limites existent car F_X croissante.
   Pour le calcul, on considère les suites d'évènements $\big([X \leq n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\big([X \leq -n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, $F_X(t_0^+) = \lim\limits_{x \to t_0^+} F_X(x)$ existe car F_X croissante.
   Pour le calcul, on considère la suite d'évènement $\left(\left[X \leq t_0 + \dfrac{1}{n}\right]\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Remarquer que $[a < X \leq b] = [X \leq b] \setminus [x < a]$.

CQFD □

Donnons ensuite la définition de la loi de probabilité d'une VAR X.

Définition 28 Loi d'une VAR
On appelle loi d'une VAR X l'application $\mathbb{P}^X$ définie par :

$$\forall I \text{ intervalle de } \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}^X(I) = \mathbb{P}(X \in I)$$

Le résultat suivant (admis) justifie l'utilisation de la fonction de répartition.

Théorème 29 La fonction de répartition caractérise la loi
$\mathbb{P}^X$ est entièrement déterminée par la donnée de F_x.
En particulier, deux VAR qui ont la même fonction de répartition ont la même loi.

Intuitivement, l'idée est ce qu'une propriété vraie pour tous les intervalles du type $]-\infty, x]$ ($x \in \mathbb{R}$), et qui est stable par les opérations d'union et de complémentaire, devient vraie pour tous les intervalles de $\mathbb{R}$.

On peut définir une VAR directement à partir de sa fonction de répartition, grâce au résultat suivant.

Théorème 30 Existence d'une VAR de fonction de répartition donnée
On se donne une fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

1. F est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. On a $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1$.
3. F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et une VAR X sur $(\Omega, \mathscr{F})$ tels que F est la fonction de répartition de X.

3 Exercices

Exercice 1 On considère une infinité d'urnes. On en choisit une au hasard de telle sorte que la probabilité de choisir l'une numéro n soit égale à $\frac{1}{2^n}$ (avec $n \geq 1$). L'urne numéro n est composée de 2^n boules dont une seule blanche. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Exercice 2 Un enfant lance un galet pour faire des ricochets sur l'eau. On suppose que la probabilité que le galet ricoche pour la $n^{\text{ème}}$ fois, sachant qu'il a ricoché les $n-1$ coups d'avant, est égale à $\frac{1}{n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité p_n que le galet coule après n ricochets ?
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

Exercice 3 Sur un réseau informatique des ordinateurs se transmettent une information de manières indépendantes. On suppose qu'à chaque transmission l'information est transmise correctement avec la même probabilité $p \in [0,1]$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n que l'information soit transmise correctement n fois consécutives.
2. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

Exercice 4 On considère une suite lancers indépendants d'une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p et la probabilité d'obtenir "face" est $q = 1-p$ ($p \in]0,1[$). "pile" (resp. "face") sera noté en abrégé P (resp. F).

1. Soit $n \geqslant 1$. On considère l'événement A_n : "La séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $(n-1)$ et n." Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité de l'événement A : "La séquence PF apparaît au moins une fois".
3. Soit B l'événement : "La séquence PP apparaît sans qu'il n'y ait eu de séquence PF auparavant". Calculer $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 5 On admettra que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ converge, et que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

On dispose d'une urne contenant initialement une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée.
On effectue des lancers successifs et indépendants de la pièce :
• si on obtient « pile » alors on tire une boule au hasard dans l'urne et on arrête les lancers ;
• si on obtient « face » alors on ajoute une boule noire dans l'urne et on continue les lancers.

1. Expliquer pourquoi cette expérience se termine presque sûrement au bout d'un nombre fini de lancers.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Exercice 6 (Lemme de Borel-Cantelli) Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. On note B l'événement $\bigcap_{n\geq 1}\big(\bigcup_{k\geq n} A_k\big)$.

On rappelle que cet événement est en fait :

$$B = \{\omega \in \Omega / \ \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}$$

1. On suppose que la série $\sum_k \mathbb{P}(A_k)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.
2. On suppose que les événements (A_n) sont indépendants et que la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ est divergente.
   (a) Montrer que l'événement $\overline{B}$ est égal à $\bigcup_{n\geq 1}\big(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}\big)$, où $\overline{M}$ désigne l'événement contraire de l'événement M.
   (b) Exprimer $\mathbb{P}\big(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\big)$ en fonction des p_k.
   (c) Montrer que la série $\sum_k \ln(1 - p_k)$ est divergente.
   (d) En déduire que $\mathbb{P}(B) = 1$.
3. Un singe tape aléatoirement sur les touches d'une machine à écrire. Montrer qu'avec probabilité 1, il écrira une infinité de fois l'intégralité de n'importe quel livre.
4. Soit α un réel strictement positif et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout n, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n^\alpha}$.
   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$.
   (b) On suppose que $0 < \alpha < 1$. Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n / \ X_n = 1\}$ contient une infinité d'éléments.
   (c) On suppose que $\alpha > 1$. Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n \mid X_n = 1\}$ est fini.

Chapitre 14

Variables aléatoires discrètes

1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Définitions

Définition 1 Variable aléatoire discrète infinie
On appelle variable aléatoire discrète finie (VARD finie) toute VAR X telle que l'ensemble $X(\Omega)$ est fini.
On appelle variable aléatoire discrète infinie (VARD infinie) toute VAR X telle que l'ensemble $X(\Omega)$ est dénombrable (ie en bijection avec $\mathbb{N}$).

Sans préciser si elle est finie ou infinie, on parlera de variable aléatoire discrète (VARD en abrégé).

Notations :
Pour une VARD finie l'ensemble $X(\Omega)$ est noté $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_N\}$, où $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$.
Pour une VARD infinie l'ensemble $X(\Omega)$ est noté $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$, où la suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Exemple **:** On lance une infinité de fois une pièce : $\Omega = \{0;1\}^{\mathbb{N}}$.
On note X = Rang d'apparition du premier pile. Alors X est une VARD infini et $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ (on dit que $X = +\infty$ lorsqu'on obtient toujours des Faces depuis le premier lancer).

Théorème 2 Quasi-système complet d'évènements dénombrable associé à une VARD
Si X est une VARD finie alors la famille $\big([X = x_k]\big)_{1\leq k\leq N}$ est un quasi-s.c.e..
Si X est une VARD infinie alors la famille $\big([X = x_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un quasi-s.c.e. dénombrable.

En général ce n'est pas un s.c.e. car on peut avoir $\mathbb{P}(X = x_k) = 0$ pour certaines valeurs de k.

Définition 3 Tribu engendrée par une VARD
On appelle tribu engendrée par la VARD X, notée $\sigma(X)$, la tribu engendrée par le s.c.e. $\big([X = x]\big)_{x\in X(\Omega)}$.

Intuitivement $\sigma(X)$ correspond à tous les évènements qui donnent de l'information sur X.

Théorème 4 Caractérisation de la loi de probabilité d'une VARD
Si X est une VARD sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, la loi de probabilité de X est caractérisée par la donnée des valeurs de $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

C'est-à-dire qu'au lieu calculer les $\mathbb{P}(X \in I)$ pour tous les intervalles de $\mathbb{R}$, on est ramené à calculer ces probabilités seulement pour les singletons.

⚠ ATTENTION ! Avant de déterminer la loi de X, il est *indispensable* de déterminer en premier $X(\Omega)$, c'est-à-dire les valeurs prises par la VARD X.

Définition 5 Égalité en loi
Si X et Y sont deux VARD, définies chacune sur un espace probabilisé, on dit que X et Y sont égales en loi lorsque $\mathscr{L}_X = \mathscr{L}_Y$.
On le note $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$.

Proposition 6 Propriétés élémentaires d'une loi de probabilité
Soit X une VARD. On a alors :
(i) $\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = x) \in [0, 1]$;
(ii) $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

Si X est une VARD infinie telle que $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ alors $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = x_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 1$$

et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 0$.

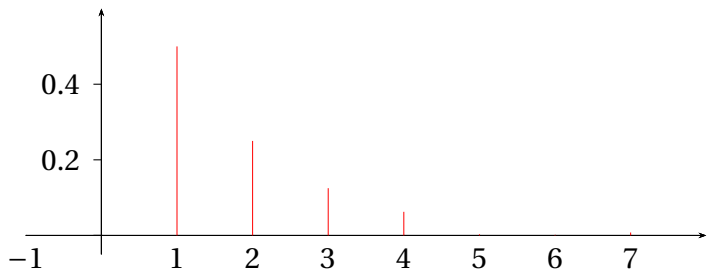
Exemple **:** On lance une infinité de fois une pièce et on note X = Rang du lancer où on obtient le premier Pile. Alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k} \qquad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = +\infty) = 0$$

Sur cet exemple on peut considérer, par abus de notation, que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

⚠ ATTENTION : $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$ ne signifie pas que $[X = +\infty] = \emptyset$, mais seulement que cet évènement est $\mathbb{P}$-négligeable !

On obtient le diagramme en bâtons :



Théorème 7 Construction d'une VARD infinie ayant une loi de probabilité donnée
On se donne une suite de réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
• $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \geq 0$;
• $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
Alors pour toute suite de réels strictement croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ telle que :
$X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$.
Et donc pour tout $n \in \mathbb{N},\ p_n \in [0,1]$.

Il n'y a unicité, ni de $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, ni de la VARD X.

Exemple **:** Il existe une VARD infinie X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et de loi donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{3}{4^k}$$

1.2 L'expérience a-t-elle une fin ?

Dans certaines situations, on note X = Nombre de répétitions d'une expérience aléatoire jusqu'à obtenir une certaine condition. On alors $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, l'évènement $[X = +\infty]$ correspondant au cas où la condition souhaitée n'est jamais vérifiée.

On cherche alors à calculer :
• $\mathbb{P}(X = +\infty)$ qui correspond à la probabilité qu'on répète indéfiniment l'expérience ;
• $\mathbb{P}(X < +\infty)$ qui correspond à la probabilité qu'on ne répète l'expérience qu'un nombre fini de fois.
Ces deux quantités étant reliés par la formule :

$$\mathbb{P}(X < +\infty) + \mathbb{P}(X = +\infty) = 1$$

Définition 8 Expérience ne se répétant qu'un nombre fini de fois presque sûrement
On dit que l'expérience ne se répète presque sûrement qu'un nombre fini de fois, ou que l'expérience s'arrête presque sûrement au bout d'un nombre fini de tours, lorsque :
$\mathbb{P}(X < +\infty) = 1$ ou de manière équivalent $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.

On dispose de deux méthodes pour déterminer ces quantités. Commençons par éliminer ce qu'il ne faut pas faire !

⚠ ATTENTION : on ne peut pas dire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = +\infty)$! En effet on a toujours $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 0$ puisque la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X = n)$ converge...

<u>Première méthode</u> : utiliser la loi de X et la σ-additivité de $\mathbb{P}$. On suppose qu'on a calculé $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On remarque alors que :

$$[X < +\infty] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X = n]$$

et comme les évènements situés dans l'union sont deux à deux incompatibles :

$$\mathbb{P}(X < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \qquad (1)$$

⚠ ATTENTION : dans l'union $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X = n]$ figurent tous les évènements $[X = n]$ pour $n \in \mathbb{N}$, mais ne figure pas l'évènement $[X = +\infty]$. On a pourtant l'impression que l'indice n peut prendre la valeur $+\infty$, mais ce n'est pas le cas...

Une autre façon de le voir est de partir du fait que la famille $\big([X = n]\big)_{n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$ est un s.c.e., ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = +\infty) = 1$$

et donc :

$$\mathbb{P}(X = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \qquad (2)$$

Les deux formules sont les mêmes puisque $\mathbb{P}(X < +\infty) + \mathbb{P}(X = +\infty) = 1$.

***Exemple* :** Deux joueurs A et B jouent à Pile ou Face. Le joueur A gagne si le premier Pile survient à un lancer de rang pair, et le joueur B gagne si le premier Pile survient à un lancer de rang impair. Par exemple pour les lancer « FFP » c'est le joueur B qui gagne, et pour les lancer « FFFFFP » c'est le joueur A qui gagne.
Ce jeu se termine presque sûrement en un nombre fini de tours.

<u>Deuxième méthode</u> : utiliser la fonction de répartition de X et le théorème de continuité monotone. On suppose qu'on a calculé $\mathbb{P}(X \leq n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On remarque alors que la suite d'évènements $\big([X \leq n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et donc, d'après le théorème de continuité monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leq n]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \leq n)$$

or $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leq n] = [X < +\infty]$ donc :

$$\mathbb{P}\left(X < +\infty\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \leq n) \qquad (3)$$

Une formule semblable est obtenue en remarquant alors que la suite d'évènements $\big([X \geq n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion et donc, d'après le théorème de continuité monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} [X \geq n]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

or $\bigcap_{n=0}^{+\infty} [X \geq n] = [X = +\infty]$ donc :

$$\mathbb{P}\left(X = +\infty\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) \qquad (4)$$

En fait les formule (1), (2), (3) et (4) sont les mêmes, mais nous ne rentrons pas dans le détail par souci de concision...

***Exemple* :** On considère une urne de N boules, composée d'une boule noire et de $N-1$ blanches. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise. On arrête les tirages

dès qu'on a obtenu une boule noire.
Cette expérience se termine presque sûrement en un nombre fini de tours.

Abus de notation : Lorsque $\mathbb{P}(X < +\infty) = 0$, on considèrera que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$.

Exemple **:** Nous allons construire un exemple d'expérience qui peut durer indéfiniment avec une probabilité strictement positive.
On considère une urne contenant initialement une seule boule, celle-ci étant de couleur noire.
On ajoute ensuite une boule blanche, et on tire une boule. Si elle est noire on arrête, sinon on continue selon le processus suivant :
• *avant le k-ième tirage, on remet la boule blanche tirée dans l'urne, on ajoute encore k boules blanches supplémentaires, et on tire alors une nouvelle boule.*
Les tirages ne s'arrêtent que lorsqu'on a obtenu une boule noire.
On note X le nombre de tirages effectués. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
Au moment d'effectuer le k-ième tirage, l'urne contient $S_k = 1 + 2 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ boules blanches ; cette formule étant aussi vraie pour $k = 1$.
On a donc $\mathbb{P}(X \geq n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{S_k + 1}$.
Et donc $\mathbb{P}(X = +\infty) = \exp\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{n^2+n+2}\right)\right]$.
On a $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$ puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 - \frac{2}{n^2+n+2}\right)$ est convergente.

1.3 Fonction de répartition d'une VARD

Théorème 9 Loi d'une VARD et point de discontinuité de sa fonction de répartition
Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a : $F_X(t_0^-) = \lim\limits_{x \to t_0^-} F_X(x) = \mathbb{P}(X < t_0) = F_X(t_0) - \mathbb{P}(X = t_0)$. Et donc :

$$F_x \text{ est continue en } t_0 \iff \mathbb{P}(X = t_0) = 0$$

En particulier si $t_0 \notin X(\Omega)$, alors F_X est continue en t_0. Les points de discontinuité de F_x sont donc inclus dans $X(\Omega)$.

Abus de notation : En supprimant de $X(\Omega)$ les valeurs prises avec probabilité 0, on peut même considérer que $X(\Omega)$ est exactement égal à l'ensemble des points de discontinuité de F_X.

Démonstration : On considère la suite d'évènement $\left(\left[X \leq t_0 - \dfrac{1}{n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

CQFD □

Corollaire 10 La fonction de répartition caractérise la loi
Si X est une VARD telle que $\mathbb{P}(X < +\infty) = 1$, alors $X(\Omega)$ = ensemble des points de discontinuité de F_X et :

$$\forall t \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = t) = F_X(t) - F_x(t^-) = \text{ saut de discontinuité de } F_X \text{ au point } t$$

Ce résultat est fondamental : il indique que pour définir la loi d'une VARD il suffit de donner sa fonction de répartition.

Théorème 11 Calcul de la fonction de répartition d'une VARD
La fonction de répartition d'une VARD X est constante par morceaux.

1. Cas d'une VARD finie : $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_x(t) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \text{tq } x_k \leq t}} \mathbb{P}(X = x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x_1 \\ \mathbb{P}(X = x_1) & \text{si } x_1 \leq t < x_2 \\ \mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) & \text{si } x_2 \leq t < x_3 \\ \mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) + \mathbb{P}(X = x_3) & \text{si } x_3 \leq t < x_4 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_1) + \dots + \mathbb{P}(X = x_{n-1}) & \text{si } x_{n-1} \leq t < x_n \\ 1 & \text{si } x_n \leq t \end{cases}$$

2. Cas d'une VARD infinie : $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_x(t) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ \text{tq } x_k \leq t}} \mathbb{P}(X = x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x_0 \\ \vdots & \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } x_k \leq t < x_{k+1} \text{pour un } k \in \mathbb{N} \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

On peut retenir que $[X \leq x_k] = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} [X = x_i]$ et donc :

$$F_x(x_k) = \mathbb{P}(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) + \dots + \mathbb{P}(X = x_k)$$

Cas particulier où $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$: Dans ce cas on utilise les formules suivantes (à savoir redémontrer), valables pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)$$

et :

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = j) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}(X = j)$$

***Exemple* :** Dans une urne de n boules numérotées, on effectue des tirages d'une boule avec remise.

On note X = nombre de tirages nécessaires pour obtenir un numéro strictement supérieur au précédent, avec la convention que $X = +\infty$ si ceci ne se produit jamais.
Donner la loi de X.

1.4 Transfert de loi

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

On considère une VARD $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et une fonction $f : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $X(\Omega) \subseteq \mathscr{D}_f$. On a alors le schéma de composition :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "f \circ X"'] & \end{tikzcd}$$

On admettra que l'application $Y = f \circ X$ est aussi une VARD sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On la note plus simplement $Y = f(X)$.

Connaissant la loi de X et l'expression de la fonction f, nous souhaiterions déterminer la loi de la VARD $Y = f(X)$: c'est ce qu'on appelle un **transfert de loi** (la loi de X est transférée par la fonction f).

Valeurs prises par Y : • Si X est une VARD infinie telle que $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$, alors $Y(\Omega) = \{f(x_n) / n \in \mathbb{N}\}$. On peut aussi noter $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ avec $y_1 < y_2 < \cdots < y_p$, ou $Y(\Omega) = \{y_n / n \in \mathbb{N}\}$, selon les cas (nombre fini ou dénombrable de valeurs).

Exemple **:** $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y = 2X$ donne $Y(\Omega) = \{2n / n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exemple **:** $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ entier pair} \\ 1 & \text{si } X \text{ entier impair} \end{cases}$ donne $Y(\Omega) = \{0, 1\}$.

On peut maintenant s'intéresser à la loi de Y. Pour cela il est important de comprendre le point suivant : si on prend $y \in Y(\Omega)$ une valeur prise par la VARD Y, alors, par définition, y a un antécédent par f dans $X(\Omega)$: $\exists x \in X(\Omega)$ tel que $y = f(x)$. Et comme f est en général non injective, il y a plusieurs valeurs de x possibles, voire même une infinité !

Exemple **:** Sur l'exemple précédent, 1 a une infinité d'antécédents : tous les entiers impairs.

Théorème 12 Formule de transfert de loi
La loi de $Y = f(X)$ est donnée par :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x)$$

On somme sur tous les antécédents de y.

Exemple **:** Si X est une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{2^k}$, et si $Y = 2X$, alors $Y(\Omega) = \{2k / k \in \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = 2k) = \frac{1}{2^k}$$

Exemple **:** Si X est une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{2^k}$, et si $Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ entier pair} \\ 1 & \text{si } X \text{ entier impair} \end{cases}$, alors $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et :

k	0	1
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

2 Espérance mathématique d'une VARD

2.1 Espérance mathématique d'une VARD

Définition 13 Espérance mathématique d'une VARD

1. Si X est une VARD finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors on appelle espérance de X le réel :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times \mathbb{P}(X = x_k)$$
2. Si X est une VARD infinie telle que $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$, alors on dit que $\mathbb{E}(X)$ existe lorsque la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on appelle espérance de X le réel :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$$
Si X est une VARD infinie telle que $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$, on dit que $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas.

Pour une VARD infinie, il faut donc montrer que l'espérance existe avant de la calculer. Pour cela, on doit vérifier que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument, ce qui assure que sa somme ne dépendent de l'ordre des termes. On doit donc montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \times \mathbb{P}(X = x_n)$ converge, puis calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$. Dans la majorité des cas, la VARD X sera à valeurs positives, et le calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$ prouvera la convergence de la série et, comme elle est à termes positifs, le calcul prouvera en fait la convergence absolue de la série et donc l'existence de l'espérance de X.

Remarquons que la définition impose que : $\mathbb{E}(X)$ existe $\Longrightarrow \mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.

On a la formule « universelle » suivante, valable si X est une VARD finie ou infinie :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x)$$

Exemple **:** Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$.
Alors X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 2$.

Exemple **:** Soit X une VARD telle que : $X(\Omega) = \left\{2^n \,/\, n \in \mathbb{N}\right\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = 2^n) = \dfrac{1}{2^n}$.
Alors X n'admet pas d'espérance.

On reprend les notations du paragraphe sur le transfert de loi :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "f \circ X"'] & \end{tikzcd}$$

On a vu que la loi de la VARD $Y = f(X)$ se calcule par la formule :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x)$$

On veut cette fois calculer son espérance (si elle existe). Sous réserve de convergence absolue de la série :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \times \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left[y \times \left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x) \right) \right]$$

On peut voir que le calcul est compliqué. On va donc essayer d'avoir une formule simple, donnant $\mathbb{E}(Y)$ connaissant la loi de X, et **sans avoir à calculer la loi de Y.**

Théorème 14 Théorème de transfert
Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \to \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) \subseteq \mathscr{D}_f$.

1. Cas d'une VARD finie : Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ alors $Y = f(X)$ est aussi une VARD finie, donc admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

2. Cas d'une VARD infinie : Si $X(\Omega) = \{x_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) \text{ existe} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{n \geq 0} f(x_n) \times \mathbb{P}(X = x_n) \text{ converge absolument} \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{n \geq 0} \left| f(x_n) \right| \times \mathbb{P}(X = x_n) \text{ converge} \end{aligned}$$

et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \times \mathbb{P}(X = x_n)$$

On a l'énoncé « universel » suivant :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) \text{ existe} \Longleftrightarrow \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X = x) \text{ converge absolument}$$

et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X = x)$$

Exemple **:** Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telle que : $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{3}{4^n}$.
Alors $\mathbb{E}\big(2^X\big)$ existe et $\mathbb{E}\big(2^X\big) = 3$.

Corollaire 15 Linéarité de l'espérance (version 1)
Soit X une VARD telle que $\mathbb{E}(X)$ existe. Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{E}(aX + b)$ existe et :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

En particulier si $a = 0$, on a pour tout $b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{E}(b) = b$. Et donc pour $b = \mathbb{E}(X)$, on obtient $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X)\big) = \mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big) = 0$.

Définition 16 VARD centrée

1. On appelle VARD centrée une VARD X, admettant une espérance, et telle que $\mathbb{E}(X) = 0$.
2. Si X est une VARD admettant une espérance, on appelle VARD centrée associée à X la VARD $Y = X - \mathbb{E}(X)$.

2.2 Moments d'une VARD

Définition 17 Moments d'une VARD
Soient X une VARD et $r \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un moment d'ordre r lorsque $\mathbb{E}\big(X^r\big)$ existe.
Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r de X le réel :

$$m_r(X) = \mathbb{E}\big(X^r\big)$$

Pour $r = 1$, on retrouve l'espérance de X.

Si X est une VARD **finie** telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors X **admet des moments de tout ordre** et d'après le théorème de transfert :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad m_r(X) = \mathbb{E}\big(X^r\big) = \sum_{k=1}^{n} x_k^r \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

Si X est une VARD infinie telle que $X(\Omega) = \{x_n / \, n \in \mathbb{N}\}$, le théorème de transfert donne que :

$$\mathbb{E}\big(X^r\big) \text{ existe} \iff \sum_{n \geq 0} |x_n|^r \times \mathbb{P}(X = x_n) \text{ converge}$$

et dans ce cas :

$$m_r(X) = \mathbb{E}\big(X^r\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^r \times \mathbb{P}(X = x_n)$$

Ainsi pour calculer les moments d'une VARD X, il suffit de connaître la loi de X. Il n'est pas nécessaire de déterminer la loi des VARD X^r pour $r \in \mathbb{N}$.

Théorème 18 Existence de moments d'ordre inférieur
Soit X une VARD qui admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$. Alors X admet des moments à tout ordre $s \in [\![0, r]\!]$.

Démonstration : Seul le cas d'une VARD infinie pose problème. Pour $s \in [\![0, r]\!]$, il suffit d'utiliser l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x|^s \leq \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ |x|^r & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \leq 1 + |x|^r$$

CQFD □

Théorème 19 Existence du moment centré d'ordre r
Si X est une VARD qui admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$, alors la VARD centrée $X - \mathbb{E}(X)$ admet elle-aussi un moment d'ordre r égal à $\mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^r\right]$.

Démonstration : Utiliser la formule du binôme pour montrer que :

$$\forall (x, b) \in \mathbb{R}^2, \quad |x - b|^r \leq \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} |b|^{r-k} |x|^k$$

CQFD □

Définition 20 Moment centré d'ordre r d'une VARD
Si X est une VARD admettant un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$, on appelle moment centré d'ordre r le réel :

$$\mu_r(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^r\right]$$

2.3 Variance d'une VARD

Définition 21 Variance d'une VARD
Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2. On appelle variance de X, notée $V(X)$ ou $\mathrm{Var}(X)$, son moment centré d'ordre 2 :

$$V(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right]$$

Donc $V(X)$ existe si $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe.

Si X est une VARD finie, X admet une variance.

La variance sert à mesurer la dispersion quadratique de X autour de sa valeur moyenne (= son espérance).

Théorème 22 Règles de calcul de la variance
Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2.

1. $V(X) \geq 0$;
2. $V(X) = 0 \iff X$ est presque sûrement constante.
   Dans ce cas : $X = \mathbb{E}(X)$ p.s..
3. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet un moment d'ordre 2 et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Théorème 23 Formule de Koenig-Huyghens
Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$V(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

Puisque $V(X) \geq 0$, on a $\mathbb{E}\left(X^2\right) \geq \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$. Plus généralement, on peut montrer que si φ est une fonction numérique convexe, alors $\mathbb{E}\left(\varphi(X)\right) \geq \varphi\left(\mathbb{E}(X)\right)$ (inégalité de Jensen), mais c'est une autre histoire...
C'est cette formule qu'on utilise en pratique pour calculer la variance d'une VARD.

Exemple **:** Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$.
Alors X admet une variance et $V(X) = 2$.

Définition 24 Écart-type d'une VARD
Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2. On appelle écart-type de X le réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Contrairement à la variance, l'écart-type possède la même unité que X, et s'interprète donc mieux en pratique. Il sert à mesurer la dispersion de X autour de sa valeur moyenne.

Définition 25 VARD centrée réduite Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2, non presque sûrement constante.

1. On dit que X est une VARD centrée réduite lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$ et $V(X) = 1$.
2. On appelle VARD centrée réduite associée à X la VARD : $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$.

En effet si $Y = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$, alors Y est une VARD centrée réduite.

3 Lois usuelles

Dans tout ce paragraphe X est une VARD définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

3.1 Loi géométrique

Définition 26 VARD de loi géométrique
On dit que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1} \qquad \text{où} \quad q = 1 - p$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

X est donc une VARD infinie.

Dans certains cas, on considère une variante : la loi géométrique décalée sur $\mathbb{N}$, notée $\mathscr{G}_0(p)$.
On dit que $Y \hookrightarrow \mathscr{G}_0(p)$ lorsque $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

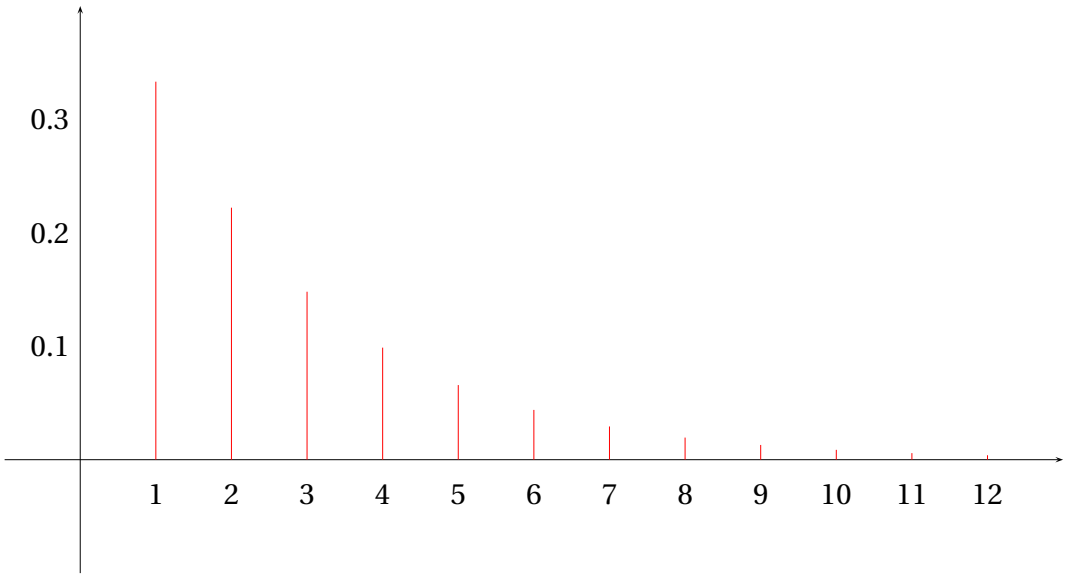
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k) = pq^k$$

Ces deux lois sont reliées de la façon suivante.

Proposition 27 Lien entre loi géométrique et loi géométrique décalée
Soi Y une VARD et $X = Y + 1$. Alors :

$$Y \hookrightarrow \mathscr{G}_0(p) \Longleftrightarrow X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$$

Pour $\mathscr{G}\left(\frac{1}{3}\right)$, on obtient le diagramme en bâtons :



Théorème 28 Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{G}(p)$
Soit X une VARD de loi $\mathscr{G}(p)$. Alors X admet des moments de tous les ordres.
En particulier :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Exercice 1 Que dire des moments de la loi $\mathscr{G}_0(p)$?

On utilise aussi souvent la fonction de répartition d'une loi géométrique.

Théorème 29 Fonction de répartition d'une VARD de loi $\mathscr{G}(p)$

1. Soit X une VARD de loi $\mathscr{G}(p)$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - q^k \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \geq k) = q^{k-1}$$

2. Réciproquement, si X est une VARD telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - q^k$$

alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, où $q = 1 - p$.

Modélisation : On considère une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : succès avec probabilité p ou échec avec probabilité $q = 1 - p$.
On effectue une infinité de répétitions indépendantes de cette même expérience.
On note X = Rang du premier succès obtenu.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

⚠ Plus généralement, on peut fixer $n \in \mathbb{N}^*$, et considérer X_n = Rang du n-ième succès. Pour $n = 1$, $X_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, et pour $n \geq 2$, X_n suit une loi appelée loi binomiale négative... mais ce n'est pas au programme !

Exemple **:** On dispose d'une pièce de monnaie truquée, de telle sorte qu'elle donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$.
On la lance une infinité de fois cette pièce, de manières indépendantes.
On note X = Rang du premier Pile obtenu.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Terminons par une autre propriété de modélisation des lois géométriques.

Théorème 30 Absence de mémoire de la loi géométrique
Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

Réciproquement, si X est une VARD telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire, alors X est suit une loi géométrique de paramètre $p = \mathbb{P}(X = 1)$ (mais ce n'est pas au programme).

On peut retenir que la loi géométrique est la loi d'attente du premier succès dans un processus sans mémoire.

3.2 Loi de Poisson

La loi de Poisson est la « loi des évènements rares » :
• Nombre de clients dans une file d'attente ;
• Nombre de particules rayonnées par un élément radioactif sur une période ;
• Nombre de soldats tués par des coups de pieds de chevaux dans l'armée prussienne entre 1875 et 1894.

Elle a été introduite par Siméon Denis Poisson en 1837 pour modéliser les erreurs de jugements dans un procès.

La modélisation est hors-programme : l'énoncé précisera toujours quelles sont les VARD qui suivent une loi de Poisson.

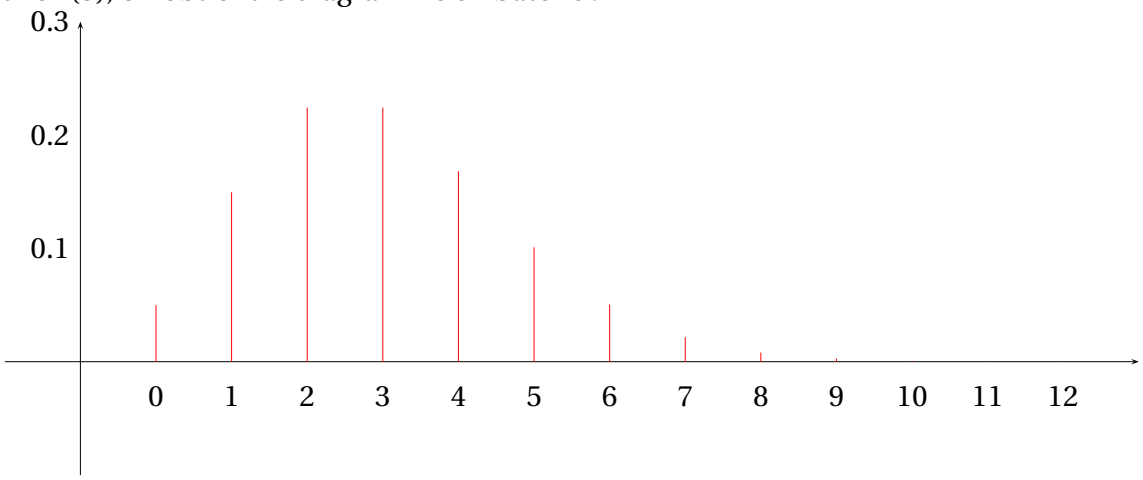
Définition 31 VARD de loi de Poisson
On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

X est donc une VARD infinie.

Pour $\mathscr{P}(3)$, on obtient le diagramme en bâtons :



Théorème 32 Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{P}(\lambda)$
Soit X une VARD de loi $\mathscr{P}(\lambda)$. Alors X admet des moments de tous les ordres.
En particulier :

$$\mathbb{E}(X) = V(X) = \lambda$$

4 Exercices

Exercice 2 (Lois usuelles) Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. Un employé de télémarketing appelle des clients pour leur vendre un volet roulant électrique. La probabilité qu'un client achète un volet est de $\frac{1}{100}$, et on suppose que sa liste de client est infinie.
   X = nombre de clients qu'elle doit appeler pour vendre le premier volet.
2. Chaque jour le cours d'une action monte avec probabilité $\frac{1}{3}$.
   X = nombre de jours consécutifs avant d'oberserver la première baisse.
3. Un concierge dispose d'un trousseau de n clefs, et ne sait plus laquelle ouvre sa porte. Il les essaie une par une en mettant de côté celles qui n'ouvrent pas la porte.
   X = nombre d'essais avant d'ouvrir la porte.
4. Le même concierge rentre chez lui après une soirée un peu trop alcoolisée. Cette fois il ne met plus de côté les clefs déjà essayées.
   X = nombre d'essais avant d'ouvrir la porte.

Exercice 3 (Rupture de stock)

Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une vard X de loi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}$$

où $p > 0$ est le prix d'une campagne publicitaire de l'année précédente.

1. Vérifier que X suit bien une loi de probabilité.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X (si elles existent).
3. Connaissant son stock s, déterminer la probabilité de rupture de stock.

Exercice 4 (n-ième succès lors de tirages avec remise : loi binômiale négative) On effectue des lancers indépendants d'un dé cubique non équilibré. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé on note X_n le temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ as. Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance (si elles existent).

Exercice 5 (Une formule de calcul de l'espérance d'une VARD) Soit X une vard vérifiant : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$.
2. On suppose que X admet une espérance.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant n\mathbb{P}(X > n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$.
   (b) En déduire que la série de terme général $\mathbb{P}(X > n)$ converge et que sa somme vaut $\mathbb{E}(X)$.
3. Réciproquement : on suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge. Montrer qu'alors la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(X = k)$ converge et que X admet une espérance.
4. Énoncer le théorème ainsi établi.

5. On effectue des tirages d'une boule avec remise dans une urne de n boules numérotées. On arrête les tirages lorsque le numéro de la boule tirée est supérieur ou égal au numéro de la boule obtenue au précédent tirage. On note X le nombre de tirages effectués.
   (a) Déterminer $X(\Omega)$.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 6

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. On note Y la variable aléatoire égale à 0 si X est paire et 1 sinon. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

Exercice 7 (Loi de Poisson composée) Un élément chimique émet des électrons pendant une période T. Le nombre d'électrons émis est une variable aléatoire Y qui suit une loi de POISSON de paramètre λ. Chaque électron a une probabilité p d'avoir un effet biologique (on dira qu'il est efficace). Soit Z la variable aléatoire égale au nombre d'électrons efficaces émis pendant une période T.

1. Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}([Y = i] \cap [Z = j])$.
2. Déterminez la loi de Z. Calculez son espérance.

Exercice 8 (Calcul d'espérance par analyse à un pas) On reprend l'exemple de la ruine du joueur.
Un joueur joue à un jeu d'argent contre le casino. On suppose qu'initialement la fortune du casino de est b, avec $b \in \mathbb{N}$.
Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$.
A chaque répétition du jeu on suppose que le joueur gagne 1 euros avec probabilité p ou perd 1 euros avec probabilité $q = 1 - p$.
On note X_a la variable aléatoire égale au nombre de tours de jeu avant que le joueur ou le casino soit ruiné, lors d'une partie où le joueur commence avec une fortune initiale de a euros.
Si ceci ne se produit jamais, on pose $X_a = -1$. On rappelle qu'on a démontré que $\mathbb{P}(X_a = -1)$ (et que c'est le toujours le joueur qui est ruiné si $p \leq q$).
On admet que X_a admet une espérance qu'on note $\mathbb{E}(X_a)$. On a $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{a+b}) = 0$.

1. Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, a+b-1]\!]$, montrer que :
$$\mathbb{P}(X_k = j) = q\mathbb{P}(X_{k-1} = j-1) + p\mathbb{P}(X_{k+1} = j-1)$$
   En déduire que $\mathbb{E}(X_k) = 1 + q\mathbb{E}(X_{k-1}) + p\mathbb{E}(X_{k+1})$.
2. Pour $p = q$.
   (a) Montrer l'existence d'un réel α tel que la variable $Y_k = X_k + \alpha k^2$ ait une espérance qui vérifie :
$$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{E}(Y_k) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{k+1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{k-1})$$
   (b) En utilisant la partie I montrer que $\mathbb{E}(X_a) = ab$. Calculer $\lim_{b \to +\infty} \mathbb{E}(X_a)$. Interprétation ?

3. Pour $p \neq q$.
   (a) Montrer l'existence d'un réel β tel que la variable $Z_k = X_k + \beta k$ ait une espérance qui vérifie :
   $$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{E}(Z_k) = p\mathbb{E}(Z_{k+1}) + q\mathbb{E}(Z_{k-1})$$
   (b) En utilisant la partie I montrer que $\mathbb{E}(X_a) = \dfrac{1}{p-q}\left(\dfrac{(a+b)(x^a-1)}{x^{a+b}-1} - a\right)$.
   (c) Quelle est la limite de $\mathbb{E}(X_a)$ lorsque $b \to +\infty$ dans le cas $p < q$?

Exercice 9 (Modèle de Galton-Watson)
Soit $p \in]0,1[$.
On considère une plante qui peut donner naissance à deux descendants avec la probabilité p, ou à aucun descendant avec la probabilité $1-p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de descendants issus de la $n^{\text{ème}}$ génération, c'est-à-dire le nombre de descendants de notre plante à la $(n+1)^{\text{ème}}$ génération.
On note aussi f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = px^2 + (1-p)$.
a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0,1]$.
b) On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1-p$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$
Montrer qu'elle est bien défnie, puis étudier sa monotonie et sa convergence.
c) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une relation entre $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 0)$.
d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 10 (Fonction génératrice d'une VARD) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Justifier que pour tout $t \in [-1,1]$ la VARD t^X admet une espérance.
   On définit dans la suite une fonction $G_x : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$.
2. Etablir que :
   $$\forall t \in [-1,1], \quad G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X = n)$$
3. Donner l'expression de $G_X(t)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.
4. On suppose dans cette question que X admet une espérance.
   (a) Déterminer, pour tout $t \in [0,1[$, une expression de $\dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t-1}$.
   (b) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t-1}$ est croissante et bornée sur $[0,1[$.
   (c) En déduire que G_x est dérivable en 1.
5. On suppose dans cette question que G_x est dérivable en 1.
   (a) Montrer que :
   $$\forall t \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n}\left[\mathbb{P}(X = k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right] \leq \frac{G_X(t) - G_X(1)}{t-1}$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \leq G'_X(1)$$
   puis que X admet une espérance.

6. Montrer enfin que X admet une espérance si et seulement si G_x est dérivable en 1 et que :

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$$

Chapitre 15

Continuité des fonctions numériques

1 Continuité d'une fonction numérique

1.1 Continuité en un point

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 1 Continuité en un point
Soit x_0 un point intérieur à I (ie x_0 n'est pas une borne de I).
On dit que f est continue en x_0 lorsque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$, ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \left|f(x) - f(x_0)\right| \leq \varepsilon$$

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en x_0.

Petit rappel : on a vu au chapitre sur les limites de fonctions, que si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe et est finie, alors elle ne peut être égale qu'à $f(x_0)$. On pourrait donc dire que f est continue en x_0 si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe et est finie.

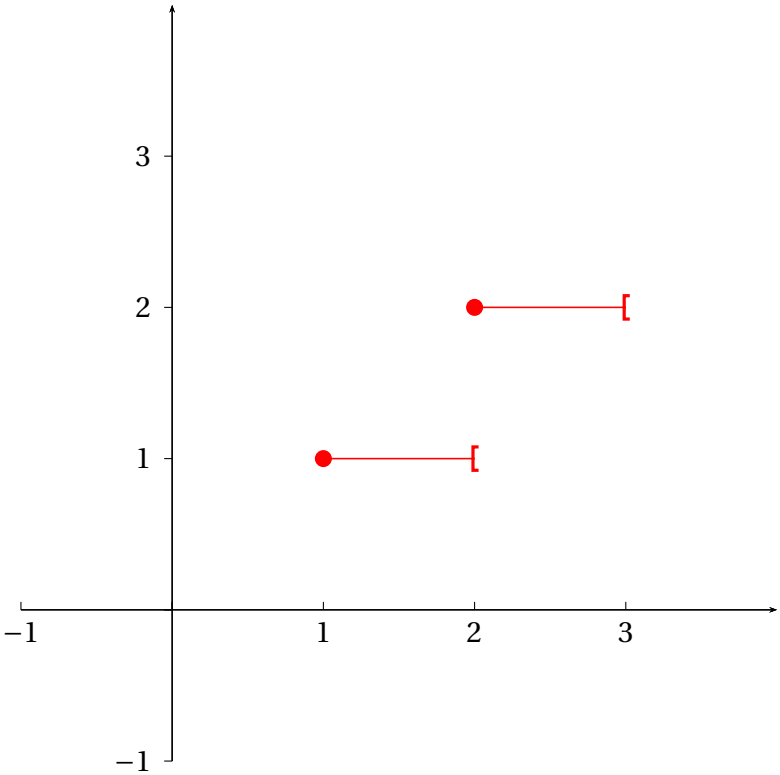
Le changement de variable $x = x_0 + h$ permet de remplacer $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$, par $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$. f continue en x_0 signifie donc que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall h \in]-\delta, \delta[, \left|f(x_0 + h) - f(x_0)\right| \leq \varepsilon$$

1.2 Continuité à droite ou à gauche en un point

Définition 2 Continuité à droite un point
Soit x_0 un point intérieur à I, ou la borne de gauche de I.
On dit que f est continue à droite en x_0 lorsque $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$, ce qui se note aussi $f(x_0^+) = f(x_0)$.
Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue à droite en x_0.

Exemple **:** $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en 2.



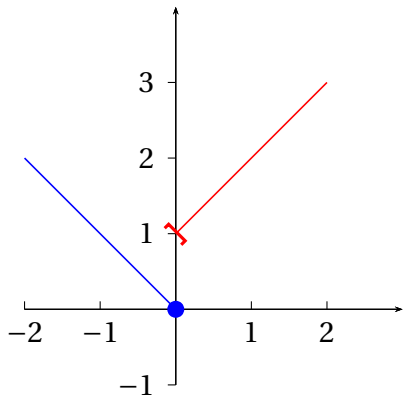
Définition 3 Continuité à gauche un point
Soit x_0 un point intérieur à I, ou la borne de droite de I.
On dit que f est continue à gauche en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$, ce qui se note aussi $f(x_0^-) = f(x_0)$.
Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue à gauche en x_0.

Exemple **:** $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est discontinue à gauche en 2.

Théorème 4 Lien entre continuité, continuité à gauche et à droite
Soit x_0 un point intérieur à I. Alors :

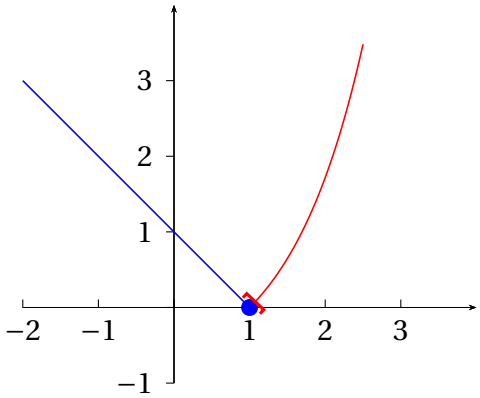
$$f \text{ est continue en } x_0 \iff f \text{ est continue à gauche et à droite en } x_0$$

Exemple **:** $f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x \leq 0 \\ x+1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



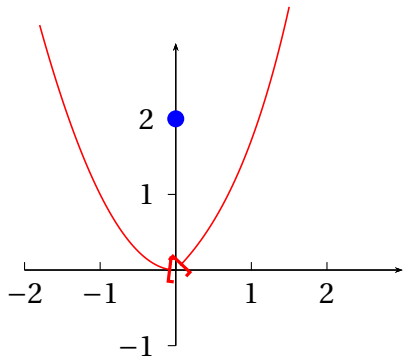
Sur cette exemple : $f(0^-) = 0$, $f(0^+) = 1$ et $f(0) = 0$. Donc f est continue à gauche en 0, mais discontinue à droite en 0. À fortiori, elle n'est pas continue en 0.

Exemple **:** $f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ si } x < 1 \\ \mathrm{e}^{x-1} - 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



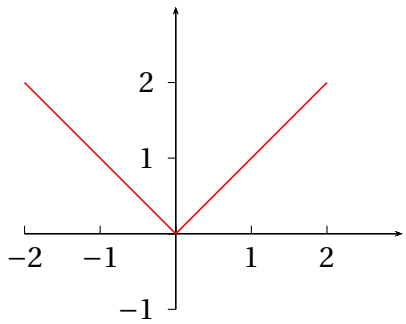
Sur cette exemple : $f(1^-) = f(1^+) = f(1) = 0$. f est donc continue en 1, puisqu'elle est continue à gauche $\boxed{\text{et}}$ à droite en ce point.

Exemple **:** $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \\ \mathrm{e}^x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

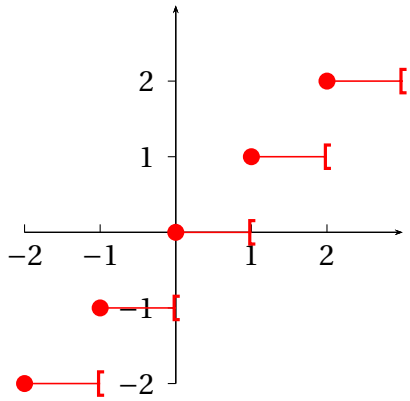


Sur cette exemple : $f(0^-) = f(0^+) = 0$ et $f(0) = 2$. Donc f n'est ni continue à gauche, ni continue à droite en 0. À fortiori, elle n'est pas continue en 0.

Exemple **:** $x \longmapsto |x|$ est continue en 0.



Exemple **:** Si $x_0 \notin \mathbb{Z}$, $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en x_0.
Si $x_0 \in \mathbb{Z}$, $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$, est continue à droite en x_0 mais est discontinue à gauche en x_0.



1.3 Continuité sur un intervalle - Prolongement par continuité

Définition 5 Continuité sur un intervalle
On note a et b les bornes de I, avec $a < b$.
On dit que f est continue sur I lorsque :
- f est continue en tout point intérieur de I ;
- si $a \in I$, f est continue à droite en a ;
- si $b \in I$, f est continue à gauche en b.

Exemple **:** f continue sur $[0, +\infty[$ signifie que f est continue en tout $x_0 > 0$, et que f est continue à droite en 0.
f continue sur $]0, +\infty[$ signifie que f est continue en tout $x_0 > 0$.
f continue sur $]1, 2]$ signifie que f est continue en tout $x_0 \in]1, 2[$, et que f est continue à gauche en 2.

Définition 6 Continuité sur une union d'intervalles
On se donne une famille d'intervalles $(I_j)_{j \in J}$ (indexée par un ensemble J fini ou infini).
On dit que f est continue sur $A = \bigcup_{j \in J} I_j$ lorsque, pour tout $j \in J$, f est continue sur I_j.

Exemple **:** f continue sur $\mathbb{R}^*$ signifie que f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, donc que f est continue en tout $x_0 < 0$ et en tout $x_0 > 0$.

Proposition 7 Stabilité de la continuité pour l'union
Si f est continue sur deux parties A_1 et A_2 de $\mathbb{R}$, alors elle est continue sur $A_1 \cup A_2$.
Plus généralement, si f est continue sur une famille $(A_j)_{j\in J}$ de parties de $\mathbb{R}$, alors elle est continue sur $\bigcup_{j\in J} A_j$.

Le résultat suivant permet de prolonger une fonction en un point, de telle sorte que la fonction soit continue en ce point.

Théorème 8 Prolongement par continuité
Soit x_0 un point d'un intervalle I, et f une fonction définie et continue sur $I\backslash\{x_0\}$.
On suppose aussi que $\lim_{x\to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} \ell \in \mathbb{R}$.
On définit alors une fonction $\widetilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} \ell & \text{si } x = x_0 \\ f(x) & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est alors un prolongement à I de f, et ce prolongement est continue sur I.

En pratique la fonction $\widetilde{f}$ est encore notée f, pour ne pas alourdir les notations.

Si la fonction f est continue sur $I\backslash\{x_0\}$, alors sont prolongement par continuité en x_0 est continue sur I tout entier.

Exemple **:** La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus : $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant : $f(0) = 1$.
La fonction f devient alors continue sur $\mathbb{R}$. Elle est définie par morceaux :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f() = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1.4 Continuité des fonctions usuelles

• Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

• Les fractions rationnelles (= quotient de polynômes) sont continues sur leur ensemble de définition.

• Les fonctions cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction tan est continue sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \Big/ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

• La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$ (vrai en base quelconque).

• La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• Les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, sont C^∞ (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0, on a le résultat suivant.

Théorème 9 Prolongement de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0
Pour $\alpha \geq 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est prolongeable en 0 en une fonction continue, en posant $0^\alpha = 0$ si $\alpha > 0$ et $0^0 = 1$.
Pour $\alpha < 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ n'est prolongeable par continuité en 0.

Exemple **:** $x \longmapsto \sqrt{x}$ continue sur $\mathbb{R}^+$, et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

⚠ ATTENTION ! Pour des puissances entières, l'ensemble de continuité peut être beaucoup plus grand que $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}_+^*$.
Par exemple $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme), et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (fraction rationnelle).

1.5 Opérations arithmétiques sur les fonctions continues

Théorème 10 Opérations arithmétiques sur les fonctions continues
Soient f une fonction continue sur A et g continue sur B.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, les fonctions $\lambda.f + \mu.g$ et $f \times g$ sont continues sur $A \cap B$.
2. Si g ne s'annule pas sur B, alors $\dfrac{1}{g}$ est continue sur B et $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $A \cap B$.
3. Si $f(A) \subseteq B$ alors $g \circ f$ est définie et continue sur A.

En pratique, pour démontrer simplement qu'une fonction est continue, on utilise la continuité des fonctions usuelles et le théorème précédent.

Exemple **:** La fonction $x \longmapsto \sqrt{\ln(1+x^2)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2 Continuité sur un intervalle

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction continue sur un intervalle I.

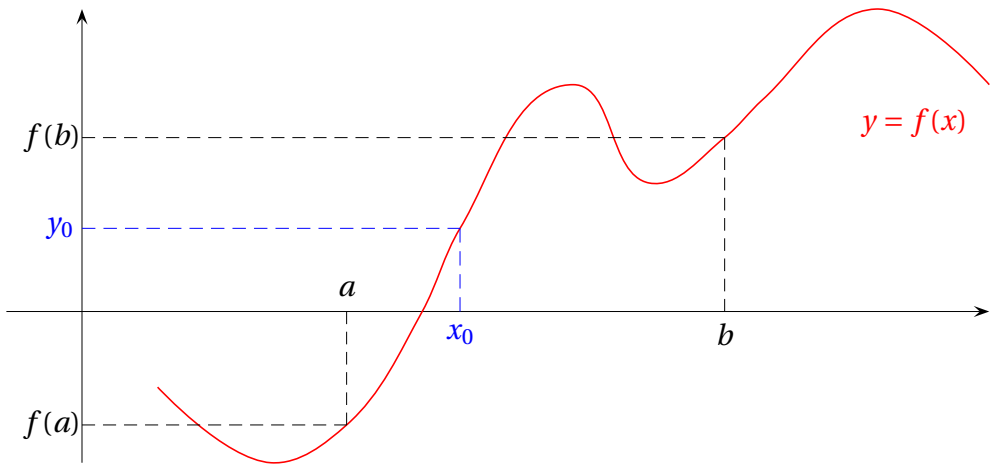
2.1 Théorème des valeurs intermédiaire

Théorème 11 Théorème des valeurs intermédiaires
Si f est continue sue l'intervalle $[a,b]$, alors f prend toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$:

$$\forall y_0 \in [f(a), f(b)], \quad \exists x_0 \in [a,b] / f(x_0) = y_0$$

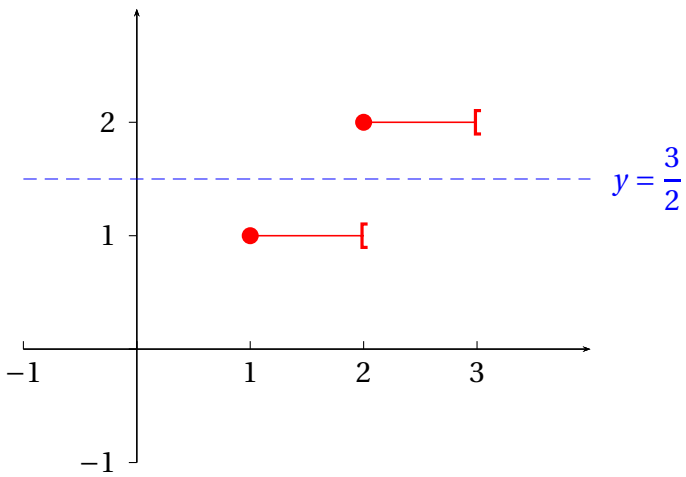
ce qui peut aussi s'écrire plus simplement :

$$[f(a), f(b)] \subseteq f\big([a,b]\big)$$



⚠ ATTENTION : dans la notation $[f(a), f(b)]$, on ne sous-entend pas que $f(a) \leq f(b)$, on peut très bien avoir $f(a) > f(b)$.

⚠ ATTENTION ! Ce résultat est faux si f n'est pas continue.
Par exemple pour $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$, on a $\frac{3}{2} \in \big[f(1), f(2)\big] = [1,2]$, mais $\forall x \in [1,2]$, $f(x) \neq \frac{3}{2}$.



<u>Démonstration</u> : On fixe $y_0 \in [f(a), f(b)]$. On cherche $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

• **Simplification du problème.** En posant $g(x) = f(x) - y_0$, on est ramené à chercher $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x_0) = 0$.

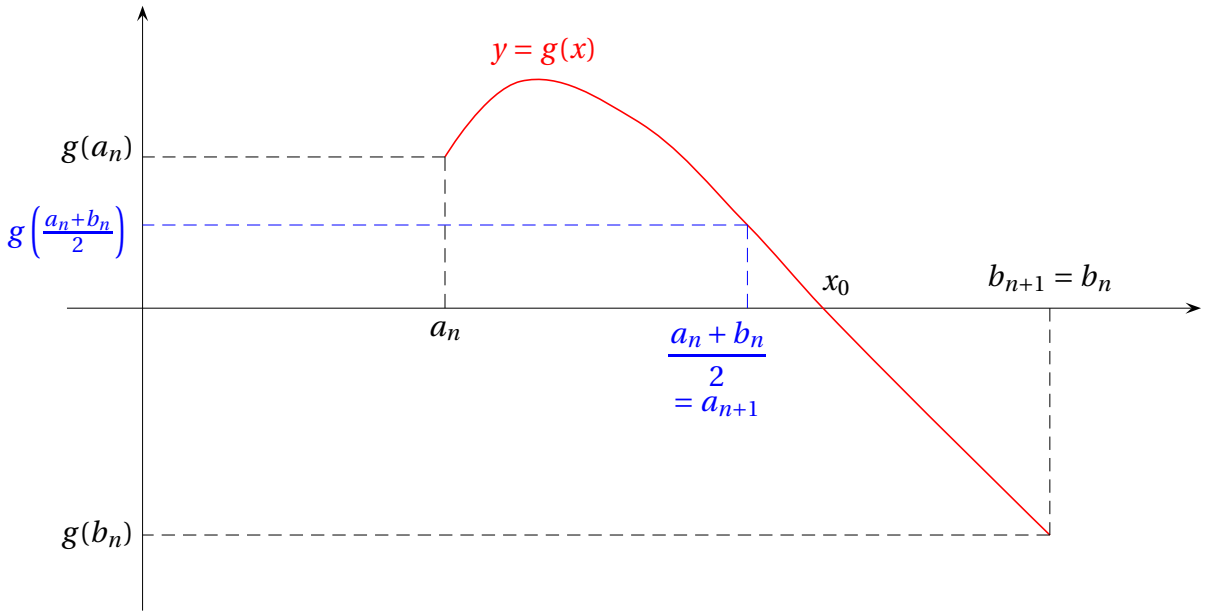
On a $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ ou $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$, donc $g(a) \leq 0 \leq g(b)$ ou $g(b) \leq 0 \leq g(a)$.

Quitte à remplacer g par $-g$ on peut supposer que $g(b) \leq 0 \leq g(a)$, et le problème est toujours de trouver $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$.

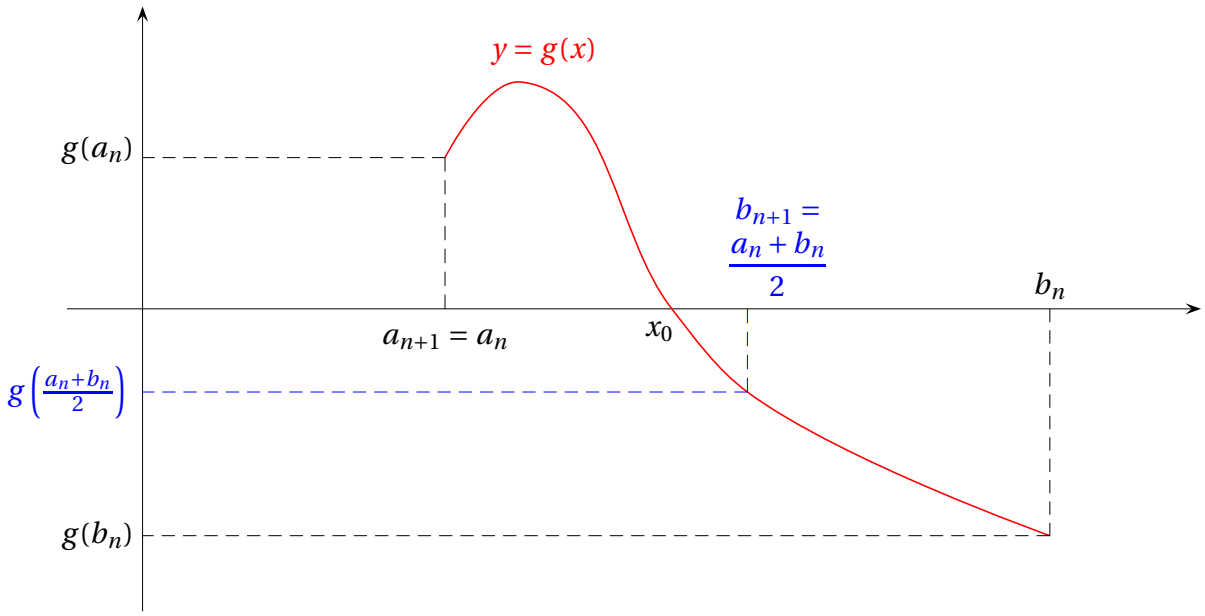
• **Définition de deux suites adjacentes par dichotomie.** On définit deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et :

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{si } g\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \\ a_n & \text{si } g\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si } g\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \\ \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{si } g\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

On peut visualiser cette construction dans le cas où $g\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0$:



Et dans le cas où $g\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$:



On vérifie alors par récurrence qu'elles ont les propriétés suivantes :
(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ et $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$;
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(b_n) \leq 0 \leq g(a_n)$.

Ceci montre en particulier que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Notons x_0 leur limite commune.

• **Conclusion.** Il reste à vérifier que $x_0 \in [a, b]$ et que $g(x_0) = 0$.

CQFD □

Corollaire 12 Image d'un intervalle par une fonction continue
Si I est un intervalle et si f est continue sur I alors $J = f(I)$ est aussi un intervalle.

⚠ ATTENTION ! Ceci est faux si f n'est pas continue. Par exemple si $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$, alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle.

⚠ ATTENTION ! La **nature** de l'intervalle (ie le caractère ouvert/fermé/borné...) n'est pas conservée. Par exemple cos est continue sur $\mathbb{R}$ (intervalle ouvert non borné) et $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ (intervalle fermé borné).

Corollaire 13 Signe d'une fonction continue sur un intervalle
Soit f continue sur un intervalle I.
• Si f ne s'annule pas sur I, alors f est de signe constant au sens strict sur I :

$$\forall x \in I,\ f(x) > 0 \qquad \text{ou} \qquad \forall x \in I,\ f(x) < 0$$

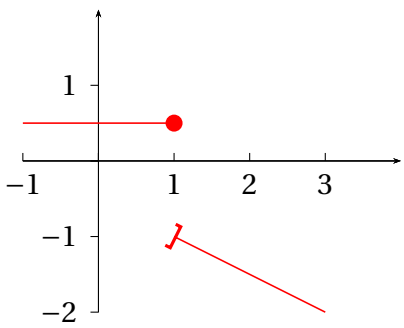
• par contraposée si la fonction change de signe sur I

$$\exists (x_1, x_2) \in I^2 \text{ tel que } x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1)f(x_2) < 0$$

alors elle s'annule sur I.

⚠ ATTENTION : si la fonction s'annule sur I, elle peut ne pas changer de signe.
Prendre par exemple $x \longmapsto x^2$ sur $[-1, 1]$.

⚠ ATTENTION ! Ceci est faux si la fonction est discontinue en un point : la fonction peut changer de signe sans s'annuler, comme le montre la fonction $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{-x-1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$



2.2 Théorème de continuité sur un segment

On rappelle qu'on appelle segment tout intervalle $[a,b]$ fermé et borné (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$).

Théorème 14 Théorème de continuité sur un segment
Soit f continue sur un segment $[a,b]$.
Alors $f\big([a,b]\big)$ est aussi un segment. Précisons : cela signifie que $f\big([a,b]\big) = [m,M]$ où on a posé

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

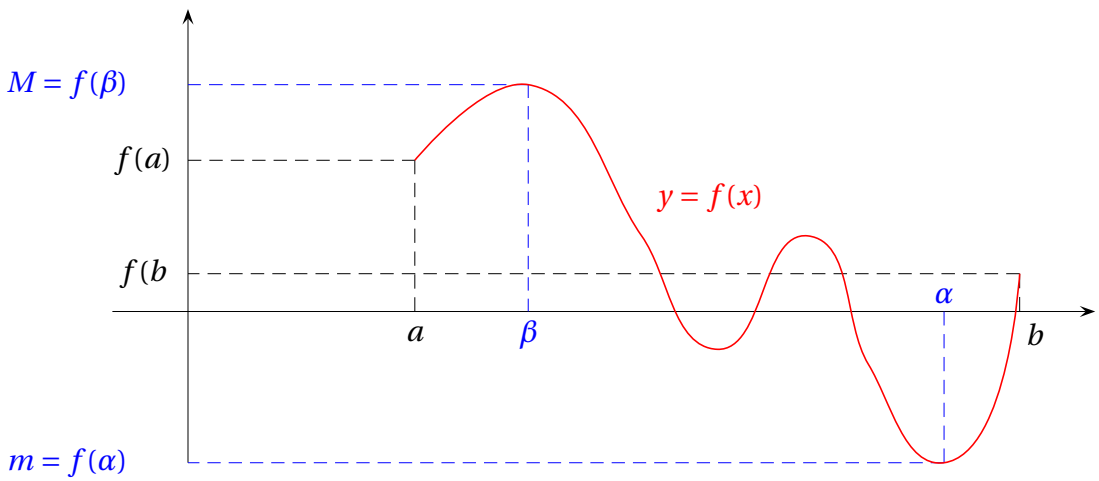
Rappelons que, par définition d'un minimum et d'un maximum, ces bornes sont atteintes, donc :

$$\exists \alpha \in [a,b] /\ m = f(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \exists \beta \in [a,b] /\ M = f(\beta)$$

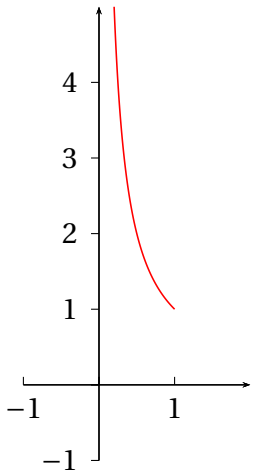
et ainsi :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$$

Autrement dit : f est **bornée et atteint ses bornes**.

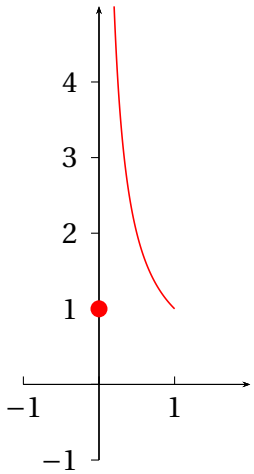


⚠ ATTENTION ! Ceci est faux si on ne prend pas un segment.
Par exemple $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$ mais n'est pas majorée puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.



⚠ ATTENTION ! Le résultat est faux si la fonction n'est pas continue.

Par exemple la fonction $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie sur $[0,1]$ mais n'est pas majorée puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.



3 Fonctions continues et bijectives

On rappelle que si $f : I \longrightarrow J$ est bijective alors elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$, définie par :

$$\forall x \in I, \forall y \in J, \quad y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

et caractérisée par les relations :

$$\forall x \in I,\ f^{-1}\big(f(x)\big) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in J,\ f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

3.1 Théorème de la bijection monotone

On commence par les propriétés générales de la réciproque d'une fonction numérique bijective.

Proposition 15 Propriétés de l'application réciproque
On se donne deux intervalles I et J et une fonction f bijective de I sur J.

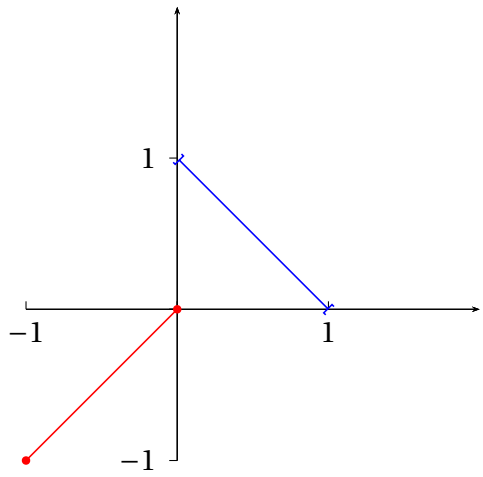
1. Si f est impaire sur I, alors f^{-1} est impaire sur J.
2. Si f est strictement monotone sur I, alors f^{-1} est strictement monotone sur J. Plus précisément :
   • Si f est strictement croissante sur I, alors f^{-1} est strictement croissante sur J.
   • Si f est strictement décroissante sur I, alors f^{-1} est strictement décroissante sur J.
3. Si f est strictement monotone sur I :
   • si f est strictement croissante sur I alors pour tout a point adhérent à I (ie $a \in I$ ou a est une borne de I) :
   $$\lim_{x\to a^+} f(x) = b^+ \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^+} f^{-1}(y) = a^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = b^- \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^-} f^{-1}(y) = a^-$$
   • si f est strictement décroissante sur I alors pour tout $a \in I$:
   $$\lim_{x\to a^+} f(x) = b^- \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^-} f^{-1}(y) = a^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = b^+ \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^+} f^{-1}(y) = a^-$$
4. $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$

⚠ ATTENTION ! Si f est paire, on ne peut pas dire que f^{-1} est paire. La raison est très simple : si f est paire, elle ne peut pas être injective, et donc f^{-1} n'existe pas !!

On peut maintenant énoncer le théorème de la bijection monotone sous sa forme complète.

Théorème 16 Théorème de la bijection monotone
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors :
• $J = f(I)$ est un intervalle ;
• f est bijective de I sur J ;
• f^{-1} est strictement monotone sur J, de même sens de variations que f ;
• si f est impaire sur I, alors f^{-1} est impaire sur J ;
• f^{-1} est continue sur J ;
• $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$

⚠ ATTENTION ! Il n'y pas de réciproque, une fonction bijective peut être ni continue, ni strictement monotone.
Prendre par exemple la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$



Proposition 17 Calcul de l'intervalle image $J = f(I)$

1. Si f est strictement croissante :

$$\bullet\, f\big([a,b]\big) = \big[f(a), f(b)\big] \qquad \bullet\, f\big([a,b[\big) = \big[f(a), f(b^-)\big[$$
$$\bullet\, f\big(]a,b]\big) = \big]f(a^+), f(b)\big] \qquad \bullet\, f\big(]a,b[\big) = \big]f(a^+), f(b^-)\big[$$

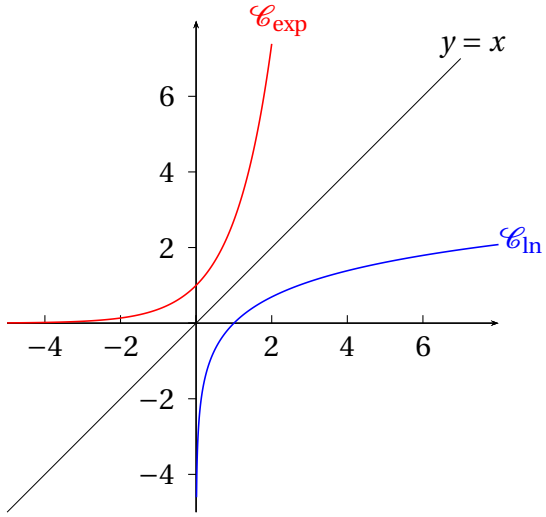
2. Si f est strictement décroissante :

$$\bullet\, f\big([a,b]\big) = \big[f(b), f(a)\big] \qquad \bullet\, f\big([a,b[\big) = \big]f(b^-), f(a)\big]$$
$$\bullet\, f\big(]a,b]\big) = \big[f(b), f(a^+)\big[\qquad \bullet\, f\big(]a,b[\big) = \big]f(b^-), f(a^+)\big[$$

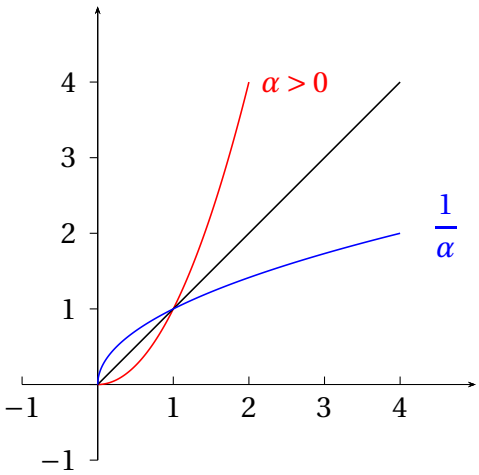
Exemple **:** La fonction ln est continue et strictement croissante de l'intervalle $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Sa bijection réciproque est la fonction $\ln :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. On retrouve donc que ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante et :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

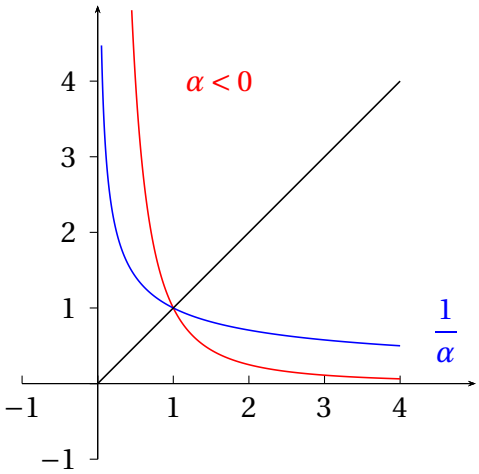
La courbe de $\mathscr{C}_{\ln}$ se déduit de la courbe de $\mathscr{C}_{\exp}$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$.



Exemple **:** Si $\alpha > 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Sa bijection réciproque est la fonction $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.



Exemple **:** Si $\alpha < 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa bijection réciproque est la fonction $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.



3.2 La fonction arctangente

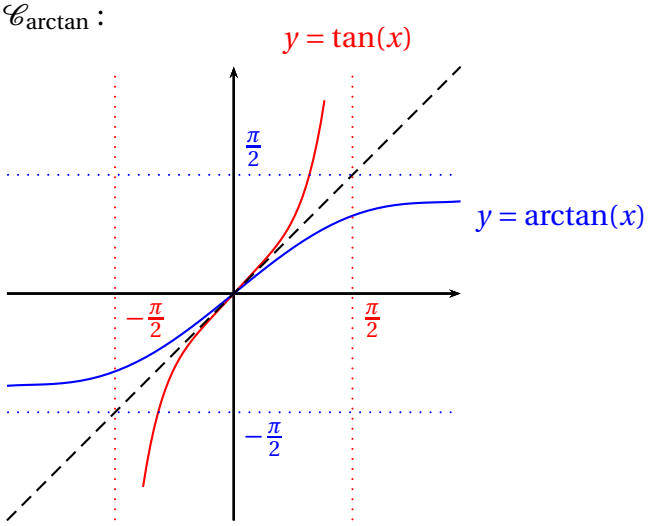
La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Elle induit donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est appelée **fonction arctangente**, notée arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

x	$-\infty$	$+\infty$
arctan	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	$+\frac{\pi}{2}$

On déduit de $\mathscr{C}_{\tan}$ la courbe $\mathscr{C}_{\arctan}$:



Proposition 18 Propriétés de la fonction arctangente

1. arctan est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$
2. arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}^-$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
6. On a les valeurs remarquables :

x	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan(x)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

7. Si $x \neq 0$: $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

⚠ ATTENTION ! La fonction $x \longmapsto \arctan(\tan(x))$ est définie sur $\mathscr{D}_{\tan}$, mais elle ne vaut x que sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

4 Exercices

Continuité d'une fonction numérique

Exercice 1 Étudier la continuité (et les éventuels prolongements par continuité) des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$
2. $f(x) = \frac{x}{2x+|x|}$
3. $f(x) = x^x$
4. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ x^2 + x \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ \ln(x) + e^x \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Exercice 2 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier la continuité de f.
2. Montrer que f est impaire puis étudier la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 3 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

Théorèmes des valeurs intermédaires et de continuité sur un segment

Exercice 4

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f a au moins un point fixe.
2. Montrer que l'équation $x^{17} = x^{12} + 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.
3. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a,b]$, telles que : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) < g(x)$.
   Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que : $\forall x \in [a,b]$, $\epsilon + f(x) \leqslant g(x)$.
   Ce résultat est-il encore valable si l'intervalle I n'est pas un segment ?

Exercice 5 Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que la limite de f en $+\infty$ existe et est finie. Montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$.
2. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f est minorée sur $[0,+\infty[$ et que sa borne inférieure est atteinte.
3. On suppose que $f(0) < 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est strictement positive. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]0,+\infty[$.

Théorème de la bijection strictement monotone

Exercice 6

1. Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$. Montrer que $f_{|[-\frac{1}{2},+\infty[}$ admet une application réciproque continue que l'on explicitera.
2. Montrer que la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est bijective et étudier sa bijection réciproque arcsin. Faire de même avec la restriction de cos à $[0,\pi]$ ($\cos^{-1}_{|[0,\pi]}$ sera notée arccos).

Exercice 7

1. Étudier la fonction $x \mapsto \arctan(\tan x)$, puis tracer sa courbe représentative.
2. Montrer que $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
3. Discuter en fonction de $t \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x : $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = t$.

Compléments

Exercice 8 (Fonctions k-lipschitziennes et leur point fixe)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On suppose qu'il existe $k > 0$ telle que f soit k-lipschitzienne ie :

$$\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

1. Montrer que f est continue sur I.
2. On suppose que $0 < k < 1$, que $I = [a, b]$ est stable par f, et que f a un unique point fixe $\ell \in I$.
   On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \ell| \leq k^n |x_0 - \ell|$.

   (b) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

   (c) Déterminer une valeur de l'entier n (en fonction de a, b et k) pour laquelle x_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Chapitre 16

Dérivabilité des fonctions numériques

1 Dérivabilité d'une fonction numérique

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I.

1.1 Dérivabilité en un point

Définition 1 Dérivabilité en un point

Soit $x_0 \in \mathring{I}$ (ie x_0 intérieur à I).

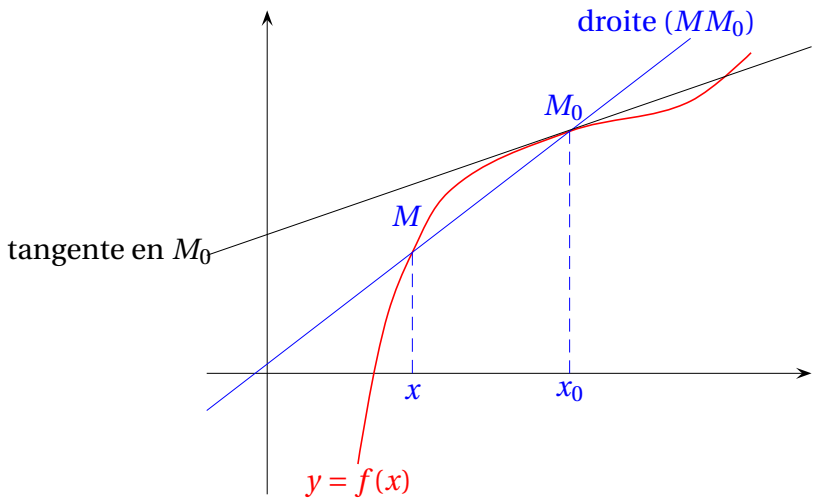
On dit que f est dérivable en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

Dans ce cas, on pose : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$.

Le réel $f'(x_0)$ est appelé nombre dérivé de f en x_0. On le note aussi $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

On peut toujours se ramener au voisinage de 0, en posant $x = x_0 + h$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Interprétation graphique : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ représente la pente de la droite passant par les points $M\big(x, f(x)\big)$ et $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$. $f'(x_0)$ représente donc la « pente limite » en $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$, c'est-à-dire la pente de la tangente à la courbe de f au point $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Proposition 2 Dérivabilité et DL_1
Si f est dérivable en $x_0 \in \mathring{I}$ alors f admet un $DL_1(x_0)$ donné par :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0) + o(x - x_0)$$

Une fonction dérivable en un point peut donc être localement approximée par une fonction affine.

Exemple **:** $f : x \longmapsto ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = a$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Alors f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \cos(x)$. Alors f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = -\sin(x_0)$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \sin(x)$. Alors f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = \cos(x_0)$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Alors f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \sqrt{x}$. Alors f est dérivable en tout $x_0 > 0$ et $f'(x_0) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

1.2 Dérivabilité à droite ou à gauche en un point

Définition 3 Dérivabilité à gauche en un point
Soit $x_0 \in \mathring{I}$ ou la borne droite de x_0.
On dit que f est dérivable à gauche en x_0 lorsque $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.
Dans ce cas, on pose : $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Le réel $f'_g(x_0)$ est appelé nombre dérivé à gauche de f en x_0.

On peut toujours se ramener au voisinage à gauche de 0, en posant $x = x_0 + h$:

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Définition 4 Dérivabilité à droite en un point
Soit $x_0 \in \mathring{I}$ ou la borne gauche de x_0.
On dit que f est dérivable à droite en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.
Dans ce cas, on pose : $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Le réel $f'_d(x_0)$ est appelé nombre dérivé à droite de f en x_0.

On peut toujours se ramener au voisinage à droite de 0, en posant $x = x_0 + h$:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Théorème 5 Lien entre dérivabilité en un point et dérivabilité à droite/gauche
Soit $x_0 \in \mathring{I}$ (ie x_0 intérieur à I). Alors :

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \text{ et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemple **:** $f : \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x\sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est dérivable en 0.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable à droite en 0.

1.3 Interprétations graphiques

• **Cas f dérivable en x_0 :** $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ d'équation $y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$.

• **Cas f non dérivable en x_0 :** Il y a plusieurs cas possibles.

Si f est dérivable à droite en x_0, alors elle admet une demi-tangente à droite en x_0 d'équation $y = f'_d(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$.

Si f est dérivable à gauche en x_0, alors elle admet une demi-tangente à gauche en x_0 d'équation $y = f'_g(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$.

Si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0, avec $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, alors les deux demi-tangente ne sont pas parallèles. On dit que $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ est un **point anguleux**.

Exemple **:** En 0 la représentation graphique de $x \longmapsto |x|$ admet un point anguleux.

Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en x_0, mais $\mathscr{C}_f$ admet quand même une demi-tangente verticale en $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$. On a le même résultat à gauche en x_0.

Exemple **:** $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable à droite en 0, et sa courbe admet une tangente verticale en $O(0,0)$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (ou $x \to x_0^-$) n'existe pas, il n'y a d'interprétation graphique...

1.4 Dérivabilité sur une partie de $\mathbb{R}$

Définition 6 Dérivabilité sur une partie de $\mathbb{R}$

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes a et b, et f définie au moins sur I.
   On dit que f est dérivable sur I lorsque :
   - f est dérivable en point x_0 intérieur à I,
   - si $a \in I$, f est dérivable à droite en a,
   - si $b \in I$, f est dérivable à gauche en b.

2. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ qui est une union d'intervalles et f définie au moins sur A.
   On dit que f est dérivable sur A lorsque f est dérivable sur tout les intervalles dont est constituée la partie A.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, mais non dérivable à droite en 0.

⚠ ATTENTION ! Le raisonnement naïf consistant à calculer $f'(x)$ et à regarder pour quelles valeurs de x cette fonction est définie est faux. Il ne donne pas la dérivabilité de la fonction.
Par exemple le raisonnement « pour $f(x) = \sqrt{x}$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, et donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et n'est pas dérivable à droite en 0 » n'est pas correct.
Mais nous verrons qu'on peut le corriger grâce au théorème de prolongement de la dérivabilité.

Définition 7 Fonction dérivée
Si f est dérivable sur une partie A de $\mathbb{R}$, on appelle fonction dérivée de f l'application :

$$\begin{array}{rccc} f' : & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Théorème 8 Une fonction dérivable est continue
Si f est dérivable en un point x_0 alors f est continue en x_0, et donc $x_0 \in \mathscr{D}_f$, (ce résultat est valable à droite ou à gauche en x_0).
Par conséquent, si f est dérivable sur une partie A de $\mathbb{R}$, alors f est continue sur A.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse. Une fonction peut être continue en un point sans y être dérivable. Considérer par exemple $x \longmapsto |x|$ en 0.

Il existe même des fonctions continues en tout point de $\mathbb{R}$ mais dérivables en aucun point de $\mathbb{R}$: par exemple la fonction de Weierstrass $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ (avec $b \in]0,1[$, a entier impair et $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$).

2 Opérations sur les dérivées

2.1 Opérations arithmétiques

Théorème 9 Opérations arithmétiques sur les fonctions dérivables en un point x_0
Soient f et g deux fonctions dérivables en un même point x_0.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est dérivable en x_0 et on a :
$$(\lambda.f + \mu.g)'(x_0) = \lambda.f'(x_0) + \mu.g'(x_0)$$
2. La fonction $f \times g$ est dérivable en x_0 et on a :
$$(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$$

Ces résultats restent évidemment vrais à droite ou à gauche en x_0.

Corollaire 10 Opérations arithmétiques sur les fonctions dérivables sur une partie A
Soient f et g deux fonctions dérivables sur une même partie A.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est dérivable sur A et on a :
$$\forall x \in A, \quad (\lambda.f + \mu.g)'(x) = \lambda.f'(x) + \mu.g'(x)$$
2. La fonction $f \times g$ est dérivable sur A et on a :
$$\forall x \in A, \quad (f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

Corollaire 11 Linéarité de la dérivation
Si on note $D(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur A, alors $D(A, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev.
L'application :
$$\begin{array}{ccc} D(A) & \longrightarrow & \mathbb{R}^A \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$
est linéaire.

2.2 Dérivée d'une composée, d'un quotient

Théorème 12 Dérivabilité d'une composée en un point
Soient f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $y_0 = f(x_0)$.
Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'\big(f(x_0)\big)$$

Ce résultat reste évidemment vrai à droite ou à gauche en x_0.

Corollaire 13 Dérivabilité d'une composée sur une partie A de $\mathbb{R}$
Soient f une fonction dérivable sur $A \subseteq \mathbb{R}$ et g une fonction dérivable sur $B \subseteq \mathbb{R}$, tel que $f(A) \subseteq B$.
Alors $g \circ f$ est dérivable sur A et :

$$\forall x \in A, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'\big(f(x)\big)$$

Exemple **:** $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est définie et continue sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
Elle est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
Elle n'est ni dérivable à gauche en -1, ni dérivable à droite en 1.

Corollaire 14 Dérivabilité d'un quotient

1. Soient f et g deux fonctions dérivables x_0 tel que $g(x_0) \neq 0$.
   Alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables en x_0 et :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $A \subseteq \mathbb{R}$, telle que g ne s'annule pas sur A.
   Alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur A et :

$$\forall x \in A, \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{g(x)^2}$$

2.3 Dérivée d'une bijection réciproque

On rappelle le théorème suivant.

Théorème 15 Théorème de la bijection monotone Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors :
- $J = f(I)$ est un intervalle ;
- f est bijective de I sur J ;
- f^{-1} est strictement monotone sur J, de même sens de variations que f ;
- si f est impaire sur I, alors f^{-1} est impaire sur J ;
- f^{-1} est continue sur J ;
- $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$

Pour la dérivabilité de f^{-1}, on dispose du résultat suivant.

Théorème 16 Dérivabilité d'une bijection réciproque en un point
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I. Soit $x_0 \in I$ tel que f est dérivable en x_0. Alors :
- Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

- Si $f'(x_0) = 0$ (cas d'une tangente horizontale pour $\mathscr{C}_f$ en x_0), alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et sa courbe admet une tangente verticale en ce point.

Il existe un moyen mnémotechnique simple pour retrouver la dérivée de f^{-1} : dériver la formule $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$.

⚠ Attention : si f n'est pas dérivable en x_0, on ne peut rien dire sur la dérivabilité de f^{-1} en $y_0 = f(x_0)$. Par exemple $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, mais $x \longmapsto x^2$ l'est.

Corollaire 17 Dérivabilité d'une bijection réciproque sur un intervalle
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable et strictement monotone sur I, et telle que f' ne s'annule pas sur I.
Alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et :

$$\forall y \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Application à la fonction arctan**.**

La fonction tan est dérivable et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$$

On en déduit que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R} = \tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2\left(\arctan(x)\right)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

3 Tableaux récapitulatifs des dérivées des fonctions usuelles

On rappelle les formules de dérivation des fonctions usuelles.

$f(x)$	$f'(x)$	Valeurs de x
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ (au minimum...)
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$\ln(a).a^x$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$	$x \in \mathscr{D}_{\tan}$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

En utilisant la formule de dérivation d'une composée $\left[f\big(u(x)\big)\right]' = u'(x).f'\big(u(x)\big)$, on obtient les formules suivantes.

$f(x)$	$f'(x)$	Condition sur $u(x)$ en plus de sa dérivabilité
$u(x)^\alpha$	$\alpha.u'(x).u(x)^{\alpha-1}$	$u(x) > 0$ (au minimum...)
$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u(x) \neq 0$
$\mathrm{e}^{u(x)}$	$u'(x).\mathrm{e}^{u(x)}$	aucune
$\sin\big(u(x)\big)$	$u'(x).\cos\big(u(x)\big)$	aucune
$\cos\big(u(x)\big)$	$-u'(x).\sin\big(u(x)\big)$	aucune
$\tan\big(u(x)\big)$	$u'(x).\left[1+\tan^2\big(u(x)\big)\right]$	$u(x) \in \mathscr{D}_{\tan}$
$\arctan\big(u(x)\big)$	$\dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	aucune

⚠ ATTENTION ! La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}^*$.

• **Cas des fonctions puissances réelles :**

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables.

On a déjà vu que si $\alpha \geq 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ peut être prolongé par continuité en 0. Intéressons nous désormais à la dérivabilité de cette fonction prolongée.

Pour $\alpha = 0$, on a $x^\alpha = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans ce cas la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\frac{x^\alpha - 0^\alpha}{x - 0} = x^{\alpha-1} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est donc dérivable (à droite) en 0 si, et seulement si, $\alpha = 0$ ou $\alpha \geq 1$.

Donc pour $0 < \alpha < 1$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue mais non dérivable (à droite) en 0.

4 Dérivabilité sur un intervalle d'une fonction à valeurs réelles

Dans tout ce paragraphe, on considère une fonction f définie sur un intervalle I.

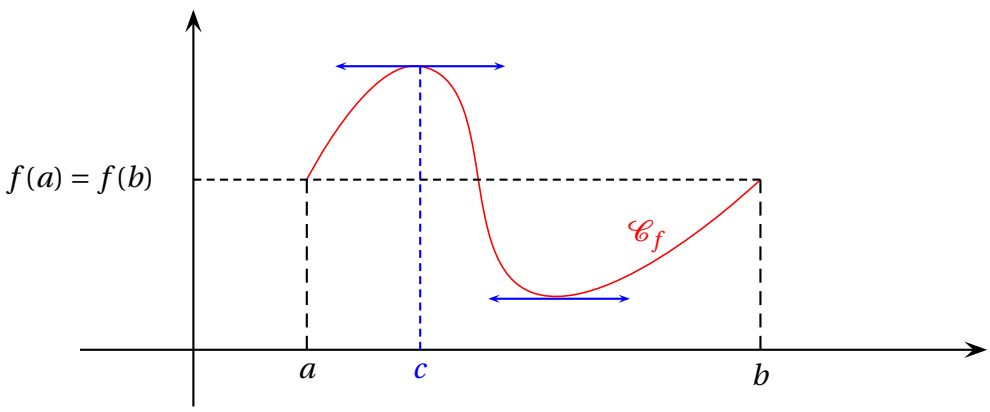
4.1 Lien entre extremum et dérivée

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant dont l'énoncé a été rappelé au chapitre 7.

Théorème 18 Condition nécessaire d'extremum local
Soit f fonction dérivable sur un intervalle I et telle que :
(i) f admet un extremum local en $x_0 \in I$
(ii) $x_0 \in \mathring{I}$, ie x_0 n'est pas une borne de I.
Alors $f'(x_0) = 0$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc horizontale.

4.2 Théorème de Rolle

Intuitivement, pour une fonction f vérifiant $f(a) = f(b)$, on voit sur la figure ci-dessous que sa courbe admet au moins une tangente horizontale.



Énonçons alors le résultat rigoureux.

Théorème 19 Théorème de Rolle
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur $[a,b]$;
(ii) f est dérivable sur $]a,b[$;
(iii) $f(a) = f(b)$.
Alors :

$$\exists c \in]a,b[/ \ f'(c) = 0$$

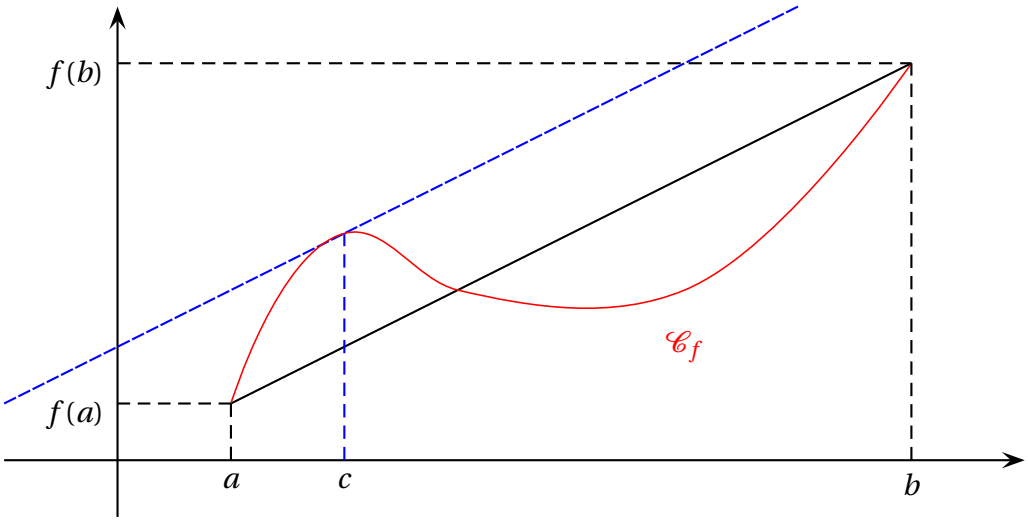
Démonstration : Puisque f est continue sur $[a,b]$, le théorème de continuité sur un segment donne que f est bornée et atteint ses bornes.

Si note $f(c_1) = \max\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ et $f(c_2) = \min\limits_{t\in[a,b]} f(t)$, il reste à vérifier que $c_1 \in]a,b[$ ou $c_2 \in]a,b[$.

CQFD □

4.3 Théorème des accroissements finis

Intuitivement, pour une fonction f, on voit sur la figure ci-dessous que sa courbe admet au moins une tangente parallèle à la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(a, f(a))$.



Énonçons alors le résultat rigoureux.

Théorème 20 Théorème des accroissements finis
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur $[a,b]$;
(ii) f est dérivable sur $]a,b[$.
Alors :

$$\exists c \in]a,b[/ \ f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Démonstration : On applique le théorème de Rolle à la fonction

$$\varphi : t \longmapsto f(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)$$

CQFD □

Corollaire 21 Inégalité des accroissements finis

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :
   (i) f est dérivable sur I ;
   (ii) $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in I,\ m \leq f'(x) \leq M$.
   Alors :
   $$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \Longrightarrow m \times (y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M \times (y-x)$$
2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :
   (i) f est dérivable sur I ;
   (ii) $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$.
   Alors :
   $$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq M \times |y-x|$$

Si $I = [a, b]$, le théorème de continuité sur un segment permet de poser dans le premier cas : $m = \min\limits_{t\in[a,b]} f'(t)$ et $M = \max\limits_{t\in[a,b]} f'(t)$, et dans le second cas : $M = \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

Exemple : Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Exemple : Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| \leq |t|$.

4.4 Lien entre dérivée et monotonie

Théorème 22 Lien entre dérivée et monotonie au sens large
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur $[a, b]$;
(ii) f est dérivable sur $]a, b[$.
Alors :

1. f est croissante sur $[a, b] \Longleftrightarrow \forall x \in]a, b[,\ f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur $[a, b] \Longleftrightarrow \forall x \in]a, b[,\ f'(x) \leq 0$.
3. f est constante sur $[a, b] \Longleftrightarrow \forall x \in]a, b[,\ f'(x) = 0$.

Exemple : Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exemple : On suppose que f affine sur tout segment $[a, b]$. Montrer que f est affine sur $\mathbb{R}$.

Théorème 23 Lien entre dérivée et stricte monotonie
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur $[a,b]$;
(ii) f est dérivable sur $]a,b[$.
Alors :

1. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ est strictement croissante sur $[a,b]$.
2. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ est strictement décroissante sur $[a,b]$.

⚠ ATTENTION : les réciproques sont fausses. Considérer par exemple $f : x \longmapsto x^3$ sur $[-1,1]$.

Corollaire 24 Lien entre dérivée et stricte monotonie sur un intervalle
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur I ;
(ii) f est dérivable sur I sauf éventuellement en des points isolés $\{x_1, \dots, x_p\}$.
Alors :

1. $\forall x \in I \backslash \{x_1, \dots, x_p\},\ f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ est strictement croissante sur I.
2. $\forall x \in I \backslash \{x_1, \dots, x_p\},\ f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ est strictement décroissante sur I.

5 Dérivées d'ordre supérieur

5.1 Dérivées successives

Définition 25 Dérivées successives
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f est une fonction n fois dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la dérivée n-ième de f en x_0 par récurrence :

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0) \quad \text{et} \quad f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$$

On note aussi $\dfrac{d^n f}{dx^n}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

On a donc $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$.

Proposition 26 Associativité de la dérivation
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f est une fonction n fois dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$.
On a alors, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$:

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^p}{dx^p}\left(\frac{d^{n-p} f}{dx^{n-p}}\right)(x_0) = \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}\left(\frac{d^p f}{dx^p}\right)(x_0)$$

et donc :

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)(x_0) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{df}{dx}\right)(x_0)$$

Exemple **:** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

5.2 Fonctions de classe C^n, de classe C^∞

Définition 27 Fonctions de classe C^n
Soient $n \in \mathbb{N}$ et A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que f est de classe C^n sur A lorsque :
(i) f est n fois dérivable en tout $x_0 \in A$;
(ii) $f^{(n)}$ est continue sur A.

Donc : f est de classe C^0 sur $A \iff f$ est continue sur A ;
et : f est de classe C^1 sur $A \iff f$ est dérivable sur A et f' est continue sur A.
Dans ce dernier cas, on dit aussi que f est continûment dérivable sur A.

Exemple **:** La fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

<u>Notations</u> : On note $D^n(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur A, et $C^n(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^n sur A. Alors :

$$C^0(A,\mathbb{R}) \subsetneq D^1(A,\mathbb{R}) \subsetneq C^1(A,\mathbb{R}) \subsetneq \cdots \subsetneq D^n(A,\mathbb{R}) \subsetneq C^n(A,\mathbb{R}) \subsetneq \dots$$

Proposition 28 Régularité de la dérivée d'une fonction de classe C^n
Soit $f \in C^n(A,\mathbb{R})$. Alors pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, $f^{(p)} \in C^{(n-p)}(A,\mathbb{R})$.

Définition 29 Fonctions de classe C^∞
On dit que f est de classe C^∞ sur A lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est C^n sur A.
On dit aussi que f est indéfiniment dérivable sur A.

<u>Notation</u> : On note $C^\infty(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur A.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C^\infty(A,\mathbb{R}) \subsetneq C^n(A,\mathbb{R})$.

Proposition 30 Régularité de la dérivée d'une fonction de classe C^∞
Soit $f \in C^\infty(A,\mathbb{R})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \in C^\infty(A,\mathbb{R})$.

Proposition 31 Caractérisation des fonctions de classe C^n
Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors :
f est classe C^n sur $I \iff f$ est n dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

5.3 Classe de régularité des fonction usuelles

• Les fonctions polynômes sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• Les fractions rationnelles (= quotient de polynômes) sont C^∞ sur leur ensemble de définition.

• Les fonctions cos et sin sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$$

La fonction tan est C^∞ sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \Big/ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

• arctan est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• La fonction ln est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > -1, \quad \left(\ln(1+x)\right)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

• La fonction exp est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (vrai en base quelconque) et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\mathrm{e}^x\right)^{(k)} = \mathrm{e}^x$$

• La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais C^∞ seulement sur $\mathbb{R}^*$.

• Les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, sont C^∞ (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0, on a le résultat suivant.

Théorème 32 Classe de régularité de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :
la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est C^n (à droite) en 0 $\Longleftrightarrow \alpha \geq n$

Exemple **:** $x \longmapsto x\sqrt{x}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$, C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

⚠ ATTENTION ! Pour des puissances entières, l'ensemble de dérivabilité peut être beaucoup plus grand que $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}_+^*$. Par exemple $x \longmapsto x^2$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (polynôme), et $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ (fraction rationnelle).

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est C^∞ sur $]-1, +\infty[$ (au moins), et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > -1, \quad \left((1+x)^\alpha\right)^{(k)} = \alpha \times (\alpha-1) \times (\alpha-2) \times \cdots \times (\alpha-k+2) \times (\alpha-k+1) \times (1+x)^{\alpha-k}$$

Exemple **:** Simplifier la formule dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$.

⚠ Attention : on ne peut pas dire ne général que $\alpha \times (\alpha-1) \times (\alpha-2) \times \cdots \times (\alpha-k+2) \times (\alpha-k+1) = \frac{\binom{\alpha}{k}}{k!}$.

5.4 Opérations arithmétiques sur les fonctions de classe C^n / C^∞

Théorème 33 Opérations arithmétiques sur les fonctions de classe C^n

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f et g deux fonctions de classe C^n sur une même partie A.
   Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est de classe C^n sur A et on a :
   $$(\lambda.f + \mu.g)^{(n)} = \lambda.f^{(n)} + \mu.g^{(n)}$$
2. Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ sur une même partie A.
   Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est de classe C^∞ sur A.

Corollaire 34 Structures de $\mathbb{R}$-ev

1. $C^0(A, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n(A, \mathbb{R})$ et $C^n(A, \mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
3. $C^\infty(A, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Ils sont bien évidemment de dimension infinie.

Théorème 35 Formule de Leibnitz
Soient $n \in \mathbb{N}$ et f et g deux fonctions de classe C^n sur une même partie A.
Alors $f \times g$ est C^n sur A et :
$$\forall x \in A, \quad (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x)$$

Exemple **:** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $L_n(x) = \mathrm{e}^x \times \dfrac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{e}^{-x} x^n\right)$ (polynômes de Laguerre).
Montrer que $L_n \in \mathbb{R}[X]$ et que son terme dominant est $(-1)^n X^n$.

5.5 Composition de fonctions de classe C^n / C^∞

Théorème 36 Composition de fonctions de classe C^n
Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^n sur une partie A, et g une fonction de classe C^n sur une partie B telle que $f(A) \subseteq B$.
Alors $g \circ f$ est C^n sur A.

⚠ ATTENTION : il existe une formule pour $(g\circ f)^{(n)}$, dite formule de Faà di Bruno mais...

$$(g\circ f)^{(n)}(x) = \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n)\in[\![0,n]\!]^n \\ \text{tq } 1.m_1+2.m_2+3.m_3+\dots+n.m_n=n}} \frac{n!}{m_1!m_2!\cdots_n!} f^{(m_1+m_2+\dots+m_n}\big(g(x)\big)\times\prod_{k=1}^{n}\left[g^{(k)}(x)\right]^{m_k}$$

rassurez-vous, **elle n'est pas au programme !**

Corollaire 37 Composition de fonctions de classe C^∞
Soient f une fonctions de classe C^∞ sur une partie A, et g une fonction de classe C^∞ sur une partie B telle que $f(A)\subseteq B$.
Alors $g\circ f$ est C^∞ sur A.

Corollaire 38 Quotient de fonctions de classe C^n/C^∞

1. Soient $n\in\mathbb{N}$, f et g deux fonctions de classe C^n sur une même partie A, telle que g ne s'annule pas sur A.
   Alors $\dfrac{f}{g}$ est C^n sur A.
2. Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ sur une même partie A, telle que g ne s'annule pas sur A.
   Alors $\dfrac{f}{g}$ est C^∞ sur A.

⚠ ATTENTION : il n'y pas de formule pour $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{(n)}$ (ou plutôt pas de formule utilisable en pratique !).

6 Formules de Taylor

6.1 Formule de Taylor-Lagrange

La formule suivante permet d'approximer localement une fonction par une intégrale. On a une expression exacte du reste.

Théorème 39 Formule de Taylor-Lagrange
Soient $n\in\mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Alors :

$$\forall(a,x)\in I^2, \exists\zeta\in]a,b[/\quad f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

<u>Démonstration</u> : On applique le théorème de Rolle à la fonction :

$$\varphi : t\longmapsto f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k-A\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $A \in \mathbb{R}$ est choisi telle que $\varphi(a) = 0$.

CQFD □

En posant $x = a + h$, on obtient :

$$\exists \zeta \in]0, h[/ \quad f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\zeta)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

Corollaire 40 Développement en série de la fonction exponentielle
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

6.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

la formule précédente permet d'encadrer sur un intervalle (fermée) une fonction entre deux polynômes de même degré.

Théorème 41 Inégalité de Taylor-Lagrange
Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Alors :

$$\forall (a, x) \in I^2, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $M = \sup_{t \in [a,x]} |f^{(n+1}(t)|$.

Exemple **:** Encadrer la fonction $x \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty$, entre deux polynômes de degré 4.

En posant $x = a + h$, on obtient :

$$\left| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right| \leq M \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $M = \sup_{t \in [a, a+h]} |f^{(n+1}(t)|$.

6.3 Formule de Taylor-Young

Dans cette version de la formule, le reste n'est pas exact, on connaît simplement son ordre de grandeur (ce qui suffit dans la plupart des applications). On obtient donc un développement limité.

Théorème 42 Formule de Taylor-Young
Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et et f une fonction de classe C^n sur un voisinage de a. Alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^{n+1}\big)$$

En posant $x = a + h$, on obtient :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o\big(h^{n+1}\big)$$

Exemple **:** Si f est C^2 au voisinage de a, alors : $f''(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$.

Corollaire 43 Existence de développement limité à tout ordre
Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de a.
Alors f admet en a un développement limité à tout ordre.

On en déduit tous les développements usuels en 0 !

6.4 Recherche d'extremums

On rappelle qu'on appelle segment tout intervalle $[a, b]$ fermé et borné (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$). Nous avons vu au chapitre 15 le théorème suivant.

Théorème 44 Théorème de continuité sur un segment
Soit f continue sur un segment $[a, b]$.
Alors $f\big([a, b]\big)$ est aussi un segment. Précisons : cela signifie que $f\big([a, b]\big) = [m, M]$ où on a posé

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

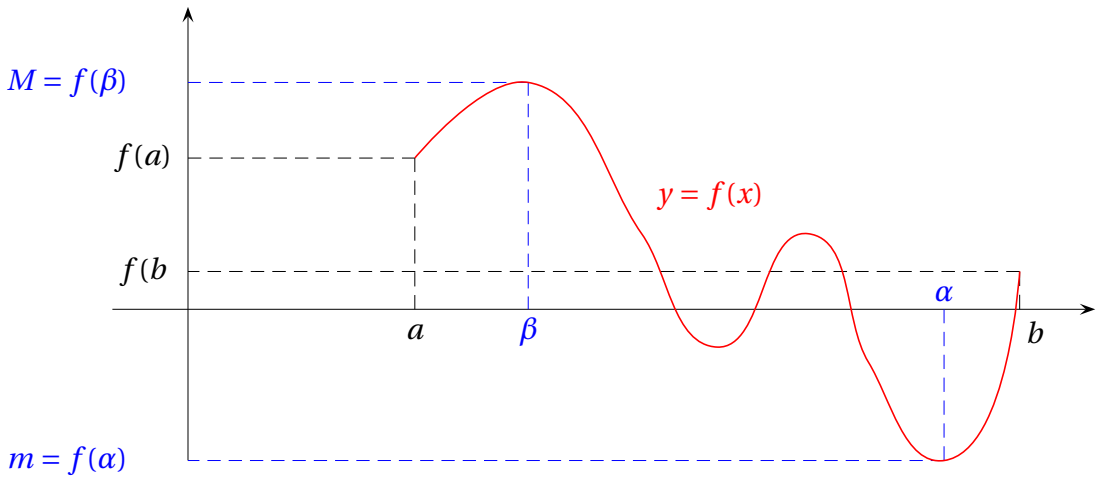
Rappelons que, par définition d'un minimum et d'un maximum, ces bornes sont atteintes, donc :

$$\exists \alpha \in [a, b] / \ m = f(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \exists \beta \in [a, b] / \ M = f(\beta)$$

et ainsi :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$$

Autrement dit : f est **bornée et atteint ses bornes**.



⚠ ATTENTION ! Ceci est faux si on ne prend pas un segment.
Par exemple $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$ mais n'est pas majorée puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Théorème 45 Condition nécessaire d'extremum local
Soit f fonction C^1 sur un intervalle I et telle que :
(i) f admet un extremum local en $x_0 \in I$
(ii) I est un intervalle ouvert.
Alors $f'(x_0) = 0$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc horizontale.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse.

⚠ ATTENTION : l'hypothèse I ouvert est essentielle.

Ce résultat donne donc des points x_0 candidats à être des extremums locaux (on les appelle **points critiques** de f : $x_0 \in I$ et $f'(x_0) = 0$). Mais il faut ensuite vérifier point par point si on trouve bien un extremum local en ces points, puis faire une étude séparée des bornes de l'intervalle. Pour l'étude des points critiques, on peut utiliser le théorème suivant.

Théorème 46 Condition suffisante d'extremum local en un point critique
Soit f une fonction C^2 sur un intervalle ouvert I, et x_0 un point critique de f.
Si $f''(x_0) \neq 0$, alors f admet un extremum local en x_0 (maximum local si $f''(x_0) \geq 0$ et minimum local si $f''(x_0) \leq 0$).

En pratique, pour savoir si un extremum local est global, il suffit de dresser le tableau de variations de f.

Exemple **:** Extremums de $x \longmapsto x^3$ sur $[-1,2]$.

7 Fonctions convexes

Définition 47 Fonction convexe/concave
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que f est convexe sur I lorsque :

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], \quad f\big(tx+(1-t)y\big) \leq t.f(x)+(1-t).f(y)$$

2. On dit que f est concave sur I lorsque :

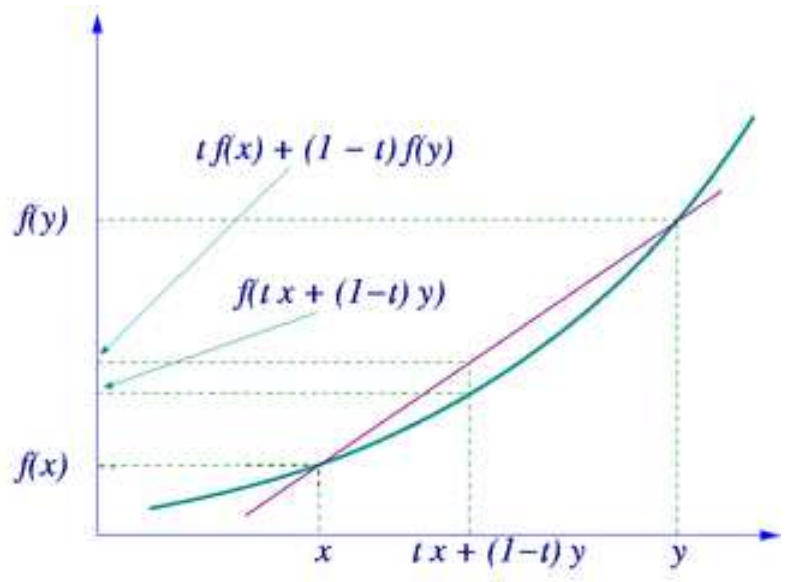
$$\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], \quad f\big(tx+(1-t)y\big) \geq t.f(x)+(1-t).f(y)$$

Proposition 48 Lien entre convexe et concave
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Alors :

$$f \text{ est concave sur } I \iff -f \text{ est convexe sur } I$$

Pour cette raison nous n'étudierons que le cas des fonctions convexes.

Interprétation graphique de la convexité/concavité :
• Si f est convexe, tout arc de sa courbe est situé en-dessous de sa corde ;
• Si f est concave, tout arc de sa courbe est situé au-dessus de sa corde.



Théorème 49 Inégalité de Jensen
Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. On a alors, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in I^n$ et tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Théorème 50 Fonctions convexes de classe C^1
Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I. On a équivalence de :
(i) f est convexe sur I ;
(ii) f' est croissante sur I ;
(iii) $\mathscr{C}_f$ est au-dessus ses tangentes sur I.

Théorème 51 Fonctions convexes de classe C^2
Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I. Alors :

$$f \text{ est convexe sur } I \iff \forall x \in I, \quad f''(x) \geq 0$$

Exemple **:** Les fonctions exp et $x \longmapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$, et la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple **:** Si $t \in [0,\pi]$, alors $\sin(t) \leq t$. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \leq |t|$ (cf l'inégalité des accroissements finis).

Définition 52 Point d'inflexion
Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et x_0 un point intérieur à I. Lorsque f est convexe sur l'un des deux intervalles $I \cap]-\infty, x_0]$ et $I \cap [x_0, +\infty[$, et concave sur l'autre, on dit que f admet un point d'inflexion en x_0.

Théorème 53 Condition nécessaire de point d'inflexion pour une fonction de classe C^2
Soient f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I, et x_0 un point intérieur à I.
Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0, alors f admet un point d'inflexion en x_0.

Exemple **:** $x \longmapsto x^3$ admet un point d'inflexion en 0.

8 Exercices

Dérivée et étude de fonctions

Exercice 1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Établir que f et f' sont de parités contraires.
2. Montrer que f' est de même périodicité que f.

Exercice 2

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $2+\ln x = x^2$.
2. On note h l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(0)=0$ et pour tout $x>0$, $h(x) = x\ln(x)$. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}^+$ et tracer l'allure de son graphe en précisant les tangentes au point d'abscisse 0 et 1.
3. On pose $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Montrer que f est bijective sur $\mathbb{R}$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 3 Pour chacune des fonctions suivantes déterminer son ensemble de continuité (la prolonger éventuellement par continuité aux bornes de son ensemble de définition), son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée. Sont-elles de classe C^1 là où elles sont dérivables ?

1. $x \longmapsto \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ 2. $x \longmapsto \begin{cases} 1-\mathrm{e}^x & \text{si } x<0 \\ -\ln(1+x) & \text{si } x>0 \end{cases}$ 3. $x \longmapsto \sqrt{|1-x^2|}$

Exercice 4

1. Montrer que la restriction de cos à $[0,\pi]$ est bijective et étudier la continuité et la dérivabilité de son application réciproque, notée arccos.
2. Montrer que la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est bijective et étudier la continuité et la dérivabilité de son application réciproque, notée arcsin.

Exercice 5 On pose : $\forall t>0$, $g(t) = \dfrac{1}{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$.

1. Montrer que g peut-être prolongée en 0 en une fonction dérivable à droite en 0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour n assez grand, l'équation (E_n) : $g(t) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions x_n et y_n sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant : $0<x_n<1<y_n$.
3. Donner la monotonie et la limite des suites (x_n) et (y_n).

Exercice 6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} \times \frac{\ln(x)}{2} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est C^1 sur son ensemble de définition.
2. Construire le tableau de variations de f.

Exercice 7 On définit les deux fonctions $\varphi : [0,2\pi] \longrightarrow [0,2\pi]$, $t \longmapsto \varphi(t) = t-\sin(t)$ et $\psi : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \psi(t) = 1-\cos(t)$.

1. Montrer que φ est C^1 sur $[0,2\pi]$ et qu'elle admet une fonction réciproque φ^{-1} qui est continue sur $[0,2\pi]$ t dérivable sur $]0,2\pi[$.

   On pose $f : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$.

2. Vérifier que f est continue sur $[0,2\pi]$ et dérivable sur $]0,2\pi[$.
3. Étudier les variations de f sur $[0,2\pi]$. Montrer que la droite d'équation $x=\pi$ est axe de symétrie pour la courbe représentative de f. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$. Que peut-on en déduire ?
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 8 Soit a un réel positif ou nul. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $P_a(x)=x^3+ax-1$.

1. Montrer que ce polynôme admet une unique racine réelle $u(a)$.

   On note u l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ qui a tout a associe le réel $u(a)$.
2. Montrer que : $u(\mathbb{R}_+)\subseteq\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. Calculer $u(0)$, puis $\lim\limits_{a\to+\infty} u(a)$.
5. Déterminer l'application réciproque de u.
6. Montrer que u est continue sur $\mathbb{R}_+$.
7. Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $u'(a)$, pour tout $a\in\mathbb{R}_+$.
8. Esquisser l'allure de la courbe représentative de u.

<u>Théorèmes de Rolle et des accroissements finis</u>

Exercice 9 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $f(0)=0$ et f' croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Établir que :

$$\forall x>0,\quad \frac{f(x)}{x}\le f'(x).$$

En déduire que la fonction $g : x\longmapsto \frac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10 Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a)=f(b)=0$.

1. Montrer que :

$$\forall x\in[a,b],\quad \exists c\in]a,b[/\ f(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c)$$

   Indication : on considèrera la fonction $\varphi(t)=f(t)-\frac{A}{2}(t-a)(t-b)$ où A est une constante bien choisie.
2. En déduire une constante M telle que :

$$\forall x\in[a,b],\quad |f(x)|\le M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

Exercice 11
Soit $\alpha\in]0,1[$.

1. Établir que :

$$\forall n\ge 1,\quad \frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha}\le (n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}\le\frac{1-\alpha}{n^\alpha}.$$

2. En déduire un équivalent de la suite $(H_n)_{n\ge1}$ définie par :

$$\forall n\ge 1,\quad H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}.$$

Dérivées d'ordres supérieurs

Exercice 12

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur $[a,b]$, s'annulant en $n+1$ points distincts de $[a,b]$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a,b deux réels tels que $a<b$. On considère f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ telle que :
$$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \quad f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0.$$
Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $]a,b[$.
Application : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = (X+1)^n(X-1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$ (polynômes de Legendre). Montrer que L_n admet n racines réelles disctinctes et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice 13 Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition et déterminer leurs dérivées successives : $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

Exercice 14 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$
2. En déduire que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Fonctions convexes

Exercice 15

1. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Montrer que :
$$\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \quad \sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leq \frac{a}{p}+\frac{b}{q}$$
2. Soit $p \geq 1$. En étudiant la convexité de $f :\longmapsto (1+t^p)^{\frac{1}{p}}$, établir que : $\forall t \geq 0$, $(1+t^p)^{\frac{1}{p}} \geq 2^{\frac{1}{p}-1}(1+t)$.
En déduire que :
$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \quad (x+y)^p \leq 2^{p-1}\left(x^p+y^p\right)$$
Retrouver directement cette inégalité en utilisant la fonction $x \longmapsto x^p$.

Exercice 16

1. Soient f une fonction convexe sur un intervalle I et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n points de I. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réelspositifs tels que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.
Établir que : $f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.

2. En déduire que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des réels strictement positifs alors :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Chapitre 17

Espaces vectoriels de dimension finie

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels de dimension finie

1.1 Cardinal d'une famille finie de vecteur

On rappelle qu'on appelle famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$ tout n-uplet de vecteurs de $\mathbb{E}$, où $n \in \mathbb{N}$.

Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$, il existe donc un unique entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et un unique n-uplet $\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\right)$ de vecteurs de $\mathbb{E}$, tels que :

$$\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\right)$$

L'entier n est appelé **cardinal** de la famille $\mathscr{F}$.

⚠Contrairement aux ensembles, les élements d'une famille ne sont pas nécessairement deux à deux distincts.
Si $\mathscr{F} = \left\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}\right\}$, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 1$.
Si $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}\right)$, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 3$.

Le cas $n = 0$, correspond au cas de la famille vide $\mathscr{F} = \emptyset$.

1.2 Bases et dimension

Définition 1 Espace vectoriel de dimension finie
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev, ie un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbb{E}$ est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, on dit que $\mathbb{E}$ est de dimension infinie.

Exemple **:** $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie.

Exemple **:** Nous n'avons pas les outils pour le démontrer mais on peut tout de même le signaler : $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont de dimension infinie.

Nous allons maintenant étudier l'existence de bases dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Remarquons tout d'abord que, dans tout $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$, il existe toujours une famille génératrice qui est $\mathbb{E}$ lui-même. Si $\mathbb{E}$ n'est pas réduit au vecteur nul, alors tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{E}$ différent du vecteur nul donne $(\vec{x})$ famille libre, et donc $\mathbb{E}$ admet toujours une famille libre. Par contre, il n'est pas clair que $\mathbb{E}$ admet au moins une base. C'est l'objet du théorème suivant.

À toutes fins utiles, rappelons que, par convention, $\emptyset$ est une base de $\{\vec{0}_{\mathbb{E}}\}$, et donc $\{\vec{0}_{\mathbb{E}}\}$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Théorème 2 Existence de bases en dimension finie
Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, alors $\mathbb{E}$ admet au moins une base composée d'un nombre fini de vecteurs.

En fait si $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une telle base de $\mathbb{E}$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $(\lambda.\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ en est une autre. Ceci prouve que $\mathbb{E}$ admet en une infinité de bases.

Ce n'est pas au programme mais intéressant à savoir : si $\mathbb{E}$ est de dimension infinie, alors $\mathbb{E}$ admet aussi des bases (infinies), grâce à l'axiome du choix.

Démonstration : On peut supposer sans perte de généralité que $\mathbb{E}$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}_{\mathbb{E}}\}$. Puisque $\mathbb{E}$ est de dimension finie, $\mathbb{E}$ admet une famille génératrice finie qu'on note $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$.

• Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\mathscr{F}$ est un base finie de $\mathbb{E}$ et le résultat est démontré.

• Si $\mathscr{F}$ est liée, alors un des vecteur est CL des autres. Par exemple, supposons que $\vec{u}_p$ est CL de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{p-1})$. Dans ce cas $\widetilde{\mathscr{F}}$ est encore une famille génératrice de $\mathbb{E}$. On recommence alors le raisonnement avec $\widetilde{\mathscr{F}}$: si elle est libre on a trouvé une base finie, sinon on peut encore lui enlever un vecteur tout en gardant son caractère générateur...

Soit on tombe sur une famille génératrice et libre donc une base de $\mathbb{E}$, soit, dans le pire des cas, on tombe $p-1$ fois sur une famille liée, ce qui donne une famille génératrice composée d'un vecteur $(\vec{u}_1)$. Puisque $\mathbb{E}$ n'est pas réduit à $\vec{0}_{\mathbb{E}}$, ce vecteur est non nul et forme donc une famille libre. Ainsi on trouve encore une fois une base finie de $\mathbb{E}$.

CQFD □

Corollaire 3 Extraction de base d'une famille génératrice finie
Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie et si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice finie de $\mathbb{E}$, alors on peut extraire de $\mathscr{F}$ une base $\mathscr{B}$ finie de $\mathbb{E}$.

***Exemple*:** Donner une base de $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\left[(X-1)^2, X^2, -2X+1\right]$ et de $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}[(1,0);(1,1);(0,2)]$.

Lemme 4 Nombre de vecteurs d'une famille libre et d'une famille génératrice
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
On suppose que $\mathscr{L}$ est une famille libre de $\mathbb{E}$ et que $\mathscr{G}$ est une famille génératrice finie de $\mathbb{E}$.
Alors $\mathscr{L}$ est finie et $\mathrm{Card}(\mathscr{L}) \leq \mathrm{Card}(\mathscr{G})$.

Démonstration : Par l'absurde, supposons que $\mathrm{Card}(\mathscr{L}) > \mathrm{Card}(\mathscr{G})$.

On note $\mathscr{G} = \left(\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_p\right)$ et $\mathscr{L} = \left(\overrightarrow{u}_1, \ldots, u_q\right)$. Remarquons que cela impose que $p = \mathrm{Card}(\mathscr{G})$ et $q = \mathrm{Card}(\mathscr{L})$.

Comme on a supposé que $q > p$, on peut noter :

$$\mathscr{L} = \left(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{u}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{u}_q\right)$$

• Comme $\mathscr{G}$ est génératrice de $\mathbb{E}$, on a $\overrightarrow{u}_1$ CL des vecteurs de $\mathscr{G}$:

$$\overrightarrow{u}_1 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i . \overrightarrow{v}_i \qquad \text{où } (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$$

Au moins une des α_i est non nul : sinon on aurait $\overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}$ ce qui est absurde car $\overrightarrow{u}_1 \in \mathscr{L}$ et $\mathscr{L}$ est libre.

Pour simplifier, supposons que $\alpha_p \neq 0$. Alors :

$$\overrightarrow{v}_p = \frac{1}{\alpha_p}\left(\overrightarrow{u}_1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i . \overrightarrow{v}_i\right)$$

donc $\overrightarrow{v}_p \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_{p-1}\right)$.

D'autre part $\mathscr{G} = \left(\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_{p-1}, \overrightarrow{v}_p\right)$ est génératrice de $\mathbb{E}$, donc $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_{p-1}, \overrightarrow{v}_p\right)$ l'est aussi. Comme $\overrightarrow{v}_p$ est CL de $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_{p-1}\right)$, on obtient que $\mathscr{G}_1 = \left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_{p-1}\right)$ est génératrice de $\mathbb{E}$.

On a donc remplacé $\overrightarrow{v}_p$ par $\overrightarrow{u}_1$ dans la famille génératrice $\mathscr{G}$.

• On recommence. Comme $\mathscr{G}_1$ est génératrice de $\mathbb{E}$, on a $\overrightarrow{u}_2$ CL de $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_{p-1}\right)$:

$$\overrightarrow{u}_2 = \beta . \overrightarrow{u}_1 + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i . \overrightarrow{v}_i \qquad \text{où } (\beta_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$$

et comme $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\right)$ est libre (sous-famille de $\mathscr{L}$ qui est libre), on a au moins un des α_i qui est non nul.

Pour simplifier, supposons que $\alpha_{p-1} \neq 0$. Alors :

$$\overrightarrow{v}_{p-1} = \frac{1}{\alpha_{p-1}}\left(\overrightarrow{u}_2 - \beta_1 . \overrightarrow{u}_1 - \sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i . \overrightarrow{v}_i\right)$$

donc $\overrightarrow{v}_{p-1} \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_{p-2}\right)$.

D'autre part $\mathscr{G}_1 = \left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_{p-2}, \overrightarrow{v}_{p-1}\right)$ est génératrice de $\mathbb{E}$, donc la famille $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_{p-2}, \overrightarrow{v}_{p-1}\right)$ l'est aussi, et donc $\mathscr{G}_2 = \left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_{p-2}\right)$ est génératrice de $\mathbb{E}$ (puisque $\overrightarrow{v}_{p-1}$ est CL de ces vecteurs).

À ce stade, on a donc remplacé $\overrightarrow{v}_p$ et $\overrightarrow{v}_{p-1}$ par $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ dans la famille génératrice $\mathscr{G}$.

• Au bout de p étapes, on remplace $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_{p-1}, \overrightarrow{v}_p$ par $\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_{p-1}, \overrightarrow{u}_p$ (ce qui est possible car $q > p$), et on obtient que la famille $\mathscr{G}_p = \left(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p\right)$ est génératrice de $\mathbb{E}$.

Mais alors $\overrightarrow{u}_{p+1}$ est CL de $\mathscr{G}_p$ ce qui contredit le fait que $\mathscr{L}$ est libre.

Par l'absurde, on a donc montré que $\text{Card}(\mathscr{L}) \leq \text{Card}(\mathscr{G})$.

CQFD □

Corollaire 5 Théorème de la dimension finie
Si $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors toutes ses bases sont finies et de même cardinal.

Ce théorème permet de définir la notion de dimension.

Définition 6 Dimension
Si $\mathbb{E}$ est un K-ev de dimension finie, on appelle dimension de $\mathbb{E}$ le cardinal commun de toutes ses bases. Ce nombre entier naturel non nul est noté $\dim(\mathbb{E})$.

On adopte la convention que $\left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right\}$ est de dimension finie et que $\dim\left(\left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right\}\right) = 0$. En général on a donc $\dim(\mathbb{E}) \in \mathbb{N}$ et $\dim(\mathbb{E}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{E} = \left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right\}$.

Exemple **:** $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie et $\dim\left(\mathbb{K}^n\right) = n$.

Exemple **:** $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie et $\dim\left(\mathbb{K}_n[X]\right) = n+1$.

Exemple **:** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie et $\dim\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right) = n^2$.

Exemple **:** $\mathbb{C}$ est de dimension finie en tant que $\mathbb{C}$-ev et aussi en tant que $\mathbb{R}$-ev. De plus, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

Définition 7 Droites et plans vectoriels
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev.

1. On appelle droite vectorielle de $\mathbb{E}$, tout sev $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ vérifiant $\dim(\mathbb{F}) = 1$. Autrement dit ce sont les sev $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ tels que $\mathbb{F} = \text{Vect}(\overrightarrow{u})$ pour $\overrightarrow{u} \in \mathbb{E}$, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}$.
2. On appelle plan vectoriel de $\mathbb{E}$, tout sev $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ vérifiant $\dim(\mathbb{F}) = 2$. Autrement dit ce sont les sev $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ tels que $\mathbb{F} = \text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ pour $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in \mathbb{E}^2$, avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires.

Exemple **:** Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{G} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n\right\}$ est une droite vectorielle.

Exemple **:** Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{F}_{a,b} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (d'après le cours sur les suites réelles récurrentes).

1.3 Familles de vecteurs en dimension finie

Théorème 8 Familles génératrices en dimension finie : extraction d'une base
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$, génératrice de $\mathbb{E}$. Alors :

1. il existe une sous-famille $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{F}$ qui est une base de $\mathbb{E}$;
2. $\text{Card}(\mathscr{F}) \geq \dim(\mathbb{E})$;
3. $\text{Card}(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{E}) \iff \mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{E} \iff \mathscr{F}$ est libre.
   Autrement dit une famille génératrice minimale (ie de cardinal minimal) est libre.

⚠ ATTENTION : ce résultat est faux en avec une famille infinie ! On ne peut pas toujours extraire une base d'une famille génératrice composée d'une infinité de vecteurs.

Corollaire 9 Cas de $\text{Vect}(\mathscr{F})$
Si $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev et $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$, alors :

1. $\text{Vect}(\mathscr{F})$ est de dimension finie et $\dim\left[\text{Vect}(\mathscr{F})\right] \leq \text{Card}(\mathscr{F})$;
2. $\dim\left[\text{Vect}(\mathscr{F})\right] = \text{Card}(\mathscr{F}) \iff \mathscr{F}$ est une base de $\text{Vect}(\mathscr{F}) \iff \mathscr{F}$ est libre.

Donc si $\mathscr{F} = \left(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\right)$, alors $\dim\left[\text{Vect}\left(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\right)\right] \leq p$.

Théorème 10 Familles libres en dimension finie : théorème de la base incomplète
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathscr{F}$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors :

1. il existe une sur-famille $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{B}$ qui est une base de $\mathbb{E}$;
2. $\text{Card}(\mathscr{F}) \leq \dim(\mathbb{E})$;
3. $\text{Card}(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{E}) \iff \mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{E} \iff \mathscr{F}$ est génératrice de $\mathbb{E}$.
   Autrement dit une famille génératrice minimale (ie de cardinal minimal) est libre.

Si $\mathscr{B}_0$ est une base fixée de $\mathbb{E}$, alors on peut compléter $\mathscr{F}$ en une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{E}$, en prenant certains vecteurs de la famille $\mathscr{B}_0$.

Exemple **:** $\left((1,1);(1,-1)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exemple **:** Compléter $\left(X^2, X^2+1\right)$ en une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Corollaire 11 Base d'un(e) droite/plan vectoriel(le)
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev. Alors :

1. si $\mathbb{F}$ est une droite vectorielle de $\mathbb{E}$, tout vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}_{\mathbb{E}}$ élément de $\mathbb{F}$ est une base de $\mathbb{F}$;
2. si $\mathbb{F}$ est un plan vectoriel de $\mathbb{E}$, tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires et éléments de $\mathbb{F}$ forment une base de $\mathbb{F}$.

2 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

2.1 Inclusion et dimension

Théorème 12 Sev d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie
Soit $\mathbb{E}$ un K-ev de dimension finie.
Alors tous ses sev $\mathbb{F}$ sont aussi de dimension finie et vérifient : $\dim(\mathbb{F}) \leq \dim(\mathbb{E})$.

Démonstration : Soit $\mathbb{F}$ un sev de $\mathbb{E}$.

• Si $\mathbb{F} = \left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right\}$ alors $\mathbb{F}$ est de dimension finie et $\dim(\mathbb{F}) = 0 \leq \dim(\mathbb{E})$.

• Si $\mathbb{F} \neq \left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right\}$. Dans ce cas il existe $\overrightarrow{u}_1 \neq \overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}$, et donc $\left(\overrightarrow{u}_1\right)$ libre dans $\mathbb{F}$.

Si ce n'est pas une base de $\mathbb{F}$ alors on prend $\overrightarrow{u}_2 \in \mathbb{F}$ tel que $\overrightarrow{u}_2 \notin \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}_1\right)$, et on obtient $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\right)$ famille libre dans $\mathbb{F}$.

Ainsi de suite, si on a $\left(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_k\right)$ famille libre de $\mathbb{F}$ qui n'est pas une base de $\mathbb{F}$ alors on peut trouver $\overrightarrow{u}_{k+1} \in \mathbb{F}$ tel que $\overrightarrow{u}_{k+1} \notin \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_k\right)$, et on obtient $\left(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_k, \overrightarrow{u}_{k+1}\right)$ libre.

Au bout d'un nombre fini d'itérations :
- on obtient une base finie de $\mathbb{F}$, donc $\mathbb{F}$ est de dimension finie ;
- ou dans le pire des cas on arrive à $\left(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n\right)$ famille libre dans $\mathbb{F}$ avec $n = \dim(\mathbb{E})$. Cette famille est aussi libre dans $\mathbb{E}$, et c'est donc une base de $\mathbb{E}$ et donc une base de $\mathbb{F}$ (ie qu'on est dans le cas où $\mathbb{E} = \mathbb{F}$). Dans ce cas aussi $\mathbb{F}$ est de dimension finie.

CQFD □

Définition 13 Hyperplan
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension fine et $\mathbb{F}$ un sev de $\mathbb{E}$.
On dit que $\mathbb{F}$ est un hyperplan de $\mathbb{E}$, lorsque $\dim(\mathbb{F}) = \dim(\mathbb{E}) - 1$.

Exemple **:** Dans $\mathbb{K}^2$, les hyperplans sont les droites vectorielles. Dans $\mathbb{K}^3$, les hyperplans sont les plans vectoriels.

Théorème 14 Inclusion-Dimension
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$.

1. Si $\mathbb{G}$ est de dimension finie et $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{G}$, alors $\mathbb{F}$ est de dimension finie et $\dim(\mathbb{F}) \leq \dim(\mathbb{G})$.
2. Si $\mathbb{G}$ est de dimension finie et $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{G}$, alors :

$$\mathbb{F} = \mathbb{G} \Longleftrightarrow \dim(\mathbb{F}) = \dim(\mathbb{G})$$

⚠ ATTENTION : il n'y a pas de réciproque pour le premier point ! Si $\dim(\mathbb{F}) \leq \dim(\mathbb{G})$, on ne peut absolument pas dire que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{G}$. Par exemple, considérer $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\left[\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ et $\mathbb{G} = \mathrm{Vect}\left[(1,0,1);(1,1,0)\right]$.

2.2 Rang d'une famille de vecteurs

Le rang d'une famille de vecteurs est défini comme suit.

Définition 15 Rang d'une famille de vecteurs
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_p\right)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$.
On appelle rang de $\mathscr{F}$ le nombre entier naturel défini par : $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim\left(\mathrm{Vect}[\mathscr{F}]\right)$.

Le rang permet d'étudier l'espace engendré par les vecteurs.

Théorème 16 Propriétés du rang d'une famille de vecteurs
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_p\right)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$.

1. $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leq \min\left(\mathrm{Card}(\mathscr{F}), \dim(\mathbb{E})\right)$;
2. $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = 0 \iff$ tous les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont nuls
3. $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{Card}(\mathscr{F}) \iff \mathscr{F}$ libre ;
4. $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{E}) \iff \mathscr{F}$ génératrice de $\mathbb{E}$;
5. si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{E}) = n$:

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n \iff \mathscr{F} \text{ est une base de } \mathbb{E}$$

Pour simplifier les calculs, on dispose des formules suivantes.

Proposition 17 Règles de calcul du rang d'une famille de vecteurs
Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev et $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_p\right)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$.

1. Si $\alpha \neq 0$: $\mathrm{rg}\left(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_{p-1}, \overrightarrow{u}_p\right) = \mathrm{rg}\left(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_{p-1}, \alpha.\overrightarrow{u}_p\right)$.
2. $\mathrm{rg}\left(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_{p-1}, \overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right) = \mathrm{rg}\left(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_{p-1}\right)$.
3. Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$: $\mathrm{rg}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \overrightarrow{u_p}\right) = \mathrm{rg}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \overrightarrow{u_p} + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k.\overrightarrow{u_k}\right)$.
4. Si $\overrightarrow{u_p}$ est CL de la famille $\left(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_{p-1}\right)$: $\mathrm{rg}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \overrightarrow{u_p}\right) = \mathrm{rg}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p-1}}\right)$.

On peut remarquer que ce sont les mêmes propriétés que celles du Vect.

Pour calculer le rang d'une famille de vecteurs, il faut donc extraire de $\mathscr{F}$ une base de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ (tout autre méthode n'est pas au programme).

Exemple : $\mathrm{rg}\left[(1,0,1);(1,1,0);(0,-1,1)\right] = 2$.

2.3 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 18 Somme de deux parties de $\mathbb{E}$
On considère $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux parties de $\mathbb{E}$.
On appelle somme de $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$, notée $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$, la partie de $\mathbb{E}$ suivante :

$$\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2=\left\{\overrightarrow{x}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\Big/\ \overrightarrow{u_1}\in\mathbb{F}_1 \text{ et } \overrightarrow{u_2}\in\mathbb{F}_2\right\}$$

On a donc $\overrightarrow{x}\in\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$ si et seulement si il existe $\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\in\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2$ tel que $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$.

En général il n'y pas unicité des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ tels que $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple **:** Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathbb{F}_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big/\ x+y-z=0\right\}$ et $\mathbb{F}_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big/\ z=0\right\}$.
Alors $(1,1,1)=\underset{\in\mathbb{F}_1}{(0,1,1)}+\underset{\in\mathbb{F}_2}{(1,0,0)}=\underset{\in\mathbb{F}_1}{(1,0,1)}+\underset{\in\mathbb{F}_2}{(0,1,0)}$.

On a les cas particuliers suivants.

Proposition 19 On a $\mathbb{E}+\mathbb{E}=\mathbb{E}$, $\mathbb{E}+\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}=\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}+\mathbb{E}=\mathbb{E}$ et $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}+\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}=\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.

Théorème 20 Propriétés d'une somme de deux sev
On suppose que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont des sev de $\mathbb{E}$. Alors :

1. $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$ est un sev de $\mathbb{E}$, contenant $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$;
2. c'est le plus petit sev de $\mathbb{E}$ contenant $\mathbb{F}_i$ et $\mathbb{F}_2$, c'est-à-dire que si $\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ vérifant $\mathbb{F}_1\subseteq\mathbb{G}$ et et $\mathbb{F}_2\subseteq\mathbb{G}$, alors $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2\subseteq\mathbb{G}$.

Théorème 21 Famille génératrice d'une somme de deux sev
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. On suppose qu'on a $\mathscr{F}$ une famille génératrice de $\mathbb{F}_1$ et $\mathscr{G}$ une famille génératrice de $\mathbb{F}_2$. Alors $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$ est une famille génératrice de $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$:

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F})+\mathrm{Vect}(\mathscr{G})=\mathrm{Vect}(\mathscr{F}\cup\mathscr{G})$$

Exemple **:** Dans $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Vect}\left[(1,0,1);(0,1,1)\right]+\mathrm{Vect}\left[(1,0,0);(0,1,0)\right]=\mathrm{Vect}\left[(1,0,1);(0,1,1);(1,0,0);(0,1,0)\right]$$

⚠ ATTENTION : ce résultat est faux avec des familles libres, comme le montre le contre-exemple suivant.

Exemple **:** $\mathscr{F}=\left(\underset{=\overrightarrow{u_1}}{(1,0,1)};\underset{=\overrightarrow{u_2}}{(0,1,1)}\right)$ et $\mathscr{G}=\left(\underset{=\overrightarrow{u_3}}{(1,0,0)};\underset{=\overrightarrow{u_4}}{(0,1,0)}\right)$ sont libres (car composées de deux vecteurs non colinéaires), mais $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}=\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3},\overrightarrow{u_4}\right)$ ne l'est plus car :

$$\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}=(1,-1,0)=\overrightarrow{u_3}-\overrightarrow{u_4}$$

Pour avoir de meilleures propriétés, on a besoin d'une notion plus forte : la notion de somme directe.

Définition 22 Somme directe de deux sev
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$.
On dit que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe, ou que la somme $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$ est directe, lorsque $\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2 = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
Dans ce cas $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$ est notée $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$.

Si la somme est directe, on a unicité de la décomposition d'un vecteur en somme d'un vecteur de $\mathbb{F}_1$ et d'un vecteur de $\mathbb{F}_2$: c'est en même une caractérisation.

Théorème 23 Première caractérisation d'une somme directe
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. Alors :
$\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe si, et seulement si, tout vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}$ avec $\overrightarrow{f_1} \in \mathbb{F}_1$ et $\overrightarrow{f_2} \in \mathbb{F}_2$.

On peut restreindre la condition de l'unicité de la décomposition au vecteur nul.

Corollaire 24 Somme directe et décomposition du vecteur nul
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. Alors :
$\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe si, et seulement si :

$$\forall \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}\right) \in \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2, \quad \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{0}$$

ie que la seule décomposition de $\overrightarrow{0}$ dans $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$ est $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}$.

Si la somme est directe, l'union d'une famille libre de $\mathbb{F}_1$ et d'une famille libre de $\mathbb{F}_2$ donne une famille libre.

Théorème 25 Famille libre d'une somme directe
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$, en somme directe. Alors l'union d'une famille libre de $\mathbb{F}_1$ et d'une famille libre de $\mathbb{F}_2$ donne une famille libre de $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$.

On en déduit la seconde caractérisation des sommes directes.

Corollaire 26 Seconde caractérisation d'une somme directe
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. Alors :
$\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe si, et seulement si, l'union d'une base de $\mathbb{F}_1$ et d'une base de $\mathbb{F}_2$ donne une base de $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$.
Ce résultat est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$.

On verra, tout au long de l'année, qu'il est fréquent dans les résultats d'algèbre linéaire, qu'une propriété vraie sur un cas particulier, s'étende automatiquement au cas général (ici : si la propriété est vraie pour une base de $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$, elle est alors vraie pour toutes les bases de $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$).

Définition 27 Sous-espaces vectoriels supplémentaires
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$.
On dit qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$ lorsque $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2 = \mathbb{E}$.

⚠ ATTENTION : ne pas confondre avec la notion de complémentaire (qui ne donne pas un sev) !

Théorème 28 Caractérisations des sous-espaces vectoriels supplémentaires
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. On a équivalence de :

1. $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$: $\mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$;
2. $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 = \mathbb{E}$ et $\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2 = \{\overrightarrow{0_E}\}$;
3. l'union d'une base de $\mathbb{F}_1$ et d'une base de $\mathbb{F}_2$ donne une base de $\mathbb{E}$;
4. tout vecteur $\overrightarrow{e} \in \mathbb{E}$ se décompose de manière unique sous la forme $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}$, avec $\overrightarrow{f_1} \in \mathbb{F}_1$ et $\overrightarrow{f_2} \in \mathbb{F}_2$.

Dans ce cas l'union de n'importe quelle base de $\mathbb{F}_1$, avec n'importe quelle base de $\mathbb{F}_2$ donne une base de $\mathbb{E}$; on dit qu'on a une **base de $\mathbb{E}$ adaptée** à la somme directe $\mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$.

On peut retenir qu'en coupant une base de $\mathbb{E}$ en deux sous-familles $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, alors $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ engendrent deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{E}$ (d'après le point 3.).

Exemple **:** $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}\big[(1,0)\big] \oplus \text{Vect}\big[(0,1)\big]$, donc $\mathbb{F}_1 = \text{Vect}\big[(1,0)\big]$ et $\mathbb{F}_2 = \text{Vect}\big[(0,1)\big]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Rédaction : Dans la majorité des cas, on utilise le point 4. pour montrer que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$.

On a donc deux choses à démontrer : l'existence et l'unicité de la décomposition de tout vecteur de $\mathbb{E}$. Il est plus facile commencer par vérifier l'unicité de la décomposition (si elle existe), puis de vérifier l'existence d'au moins une décomposition (en en donnant un exemple).

On rédige cette démonstration par **analyse-synthèse** :

• On montre que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont deux sev de $\mathbb{E}$. On a donc $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{E}$.

• On se donne $\overrightarrow{e} \in \mathbb{E}$ fixé quelconque.

• **ANALYSE** : on suppose qu'on a trouvé au moins une décomposition de de $\overrightarrow{e}$: $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}$, avec $\overrightarrow{f_1} \in \mathbb{F}_1$ et $\overrightarrow{f_2} \in \mathbb{F}_2$.
$\hookrightarrow$ *On veut montrer que cette décomposition est unique ; pour cela on cherche à calculer $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ en fonction de $\overrightarrow{e}$.*
À ce stade, on a montré que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe ; donc $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{E}$.

• **SYNTHESE** :
$\hookrightarrow$ *On veut montrer que $\overrightarrow{e}$ a au moins une décomposition ; pour cela on utilise les formules obtenues dans la partie analyse.*
On définit donc $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ en fonction de $\overrightarrow{e}$, à partir des formules obtenues dans la partie analyse. Il reste à vérifier que ceci donne bien une décomposition de $\overrightarrow{e}$ dans $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$, c'est-à-dire trois points :
(i) $\overrightarrow{f_1} \in \mathbb{F}_1$; (ii) $\overrightarrow{f_2} \in \mathbb{F}_2$ et (iii) $\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e}$.
On alors montré que $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$; et donc par double-inclusion : $\mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$.

La synthèse n'est qu'une simple vérification, mais elle est indispensable dans le raisonnement, il ne faut donc pas la négliger ! Considérer par exemple $\mathbb{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{F}_1 = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \middle/ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = a_{n+1} + a_{n+2}\right\}$ et $\mathbb{F}_2 = \left\{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \middle/ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} + b_{n+2} = 0\right\}$: la somme est directe mais différente de $\mathbb{E}$!

2.4 Somme $k \geq 2$ sous-espaces vectoriels

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$.

Définition 29 Somme de k parties de $\mathbb{E}$
On considère k parties de $\mathbb{E}$ notés $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, \mathbb{F}_k$.
On appelle somme de $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, \mathbb{F}_p$, notée $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + \mathbb{F}_p = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{F}_k$, la partie de $\mathbb{E}$ suivante :

$$\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + \mathbb{F}_k = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{F}_j = \left\{\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \cdots + \overrightarrow{u_k} \middle/ \overrightarrow{u_1} \in \mathbb{F}_1 \text{ et } \overrightarrow{u_2} \in \mathbb{F}_2 \text{ et } \ldots \text{ et } \overrightarrow{u_k} \in \mathbb{F}_k\right\}$$

On a donc $\overrightarrow{x} \in \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + \mathbb{F}_k = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{F}_j$ si et seulement si il existe $\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\right) \in \mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_k$ tel que $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{k} \overrightarrow{u_j}$.

De même que dans le cas $k = 2$, il n'y a en général pas unicité des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k}$ tels que $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{k} \overrightarrow{u_j}$.

Théorème 30 Propriétés d'une somme de k sev
On suppose que $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$ sont des sev de $\mathbb{E}$. Alors :

1. $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + \mathbb{F}_p = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{F}_j$ est un sev de $\mathbb{E}$, contenant les $\mathbb{F}_i$, pour $i \in [\![1, k]\!]$;
2. c'est le plus petit sev de $\mathbb{E}$ contenant les $\mathbb{F}_i$, pour $i \in [\![1, k]\!]$, c'est-à-dire que si $\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ vérifant $\mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{G}$ et … et $\mathbb{F}_k \subseteq \mathbb{G}$, alors $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + \mathbb{F}_k \subseteq \mathbb{G}$.

On peut aussi définir la notion de k sous-espaces en somme directe.

Définition 31 Somme directe de k sous-espaces vectoriels
Soient $\mathbb{F}_1, \dots, F_k$ des sev de $\mathbb{E}$.
On dit que $\mathbb{F}_1, \dots, F_k$ sont en somme directe lorsque pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + \mathbb{F}_k = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{F}_j$,
il existe de **manière unique** $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_k}) \in \mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_k$ tel que $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{k} \overrightarrow{u_j}$.
Dans ce cas $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + \mathbb{F}_k$ est notée $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}_k = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{F}_j$

Pour $k = 2$ on retrouve bien la notion de deux sev en somme directe (grâce au théorème 23).

On a les caractérisations suivantes.

Théorème 32 Caractérisations des sommes directes de k sev
Soient $\mathbb{F}_1, \dots, F_k$ des sev de $\mathbb{E}$. On a équivalence de :

1. $\mathbb{F}_1, \dots, F_k$ sont en somme directe ;
2. Pour tout $(\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_p}) \in \mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_p$, $\overrightarrow{f_1} + \cdots + \overrightarrow{f_p} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{f_1} = \cdots = \overrightarrow{f_p} = \overrightarrow{0}$;
3. l'union d'une base de $\mathbb{F}_1$, d'une base de $\mathbb{F}_2$, …, et d'une base de $\mathbb{F}_k$, donne une base de $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + F_k$.

Ce dernier point est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, F_k$.

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 33 Critère pour que $\mathbb{E} = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{F}_j$
Soient $\mathbb{F}_1, \dots, F_k$ des sev de $\mathbb{E}$.
Alors $\mathbb{E} = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{F}_j$ si, et seulement si, l'union d'une base de $\mathbb{F}_1$, d'une base de $\mathbb{F}_2$, …, et d'une base de $\mathbb{F}_k$, donne une base de $\mathbb{E}$.
Ce est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, F_k$: on dit alors que la base de $\mathbb{E}$ obtenue par union de ces bases est une base adaptée à la somme directe.

2.5 Sommes et sommes directes en dimension finie

Si $\mathscr{B} = \left(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\right)$ et $\mathscr{F} = \left(\vec{v}_1, \dots, v_q\right)$ sont deux familles de vecteurs d'un même espace vectoriel $\mathbb{E}$:

$$\mathscr{B} \cup \mathscr{C} = \left(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q\right)$$

On a donc la formule : $\mathrm{Card}\left(\mathscr{B} \cup \mathscr{C}\right) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) + \mathrm{Card}(\mathscr{C})$.

⚠ Attention de ne pas confondre avec la formule d'inclusion/exclusion sur les ensembles :

$$\mathrm{Card}\left(B \cup C\right) = \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}\left(B \cap C\right)$$

On commence par les premières formules simples sur la dimension d'une somme de sev.

Théorème 34 Sommes de sev et dimension
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev, et $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie.

1. $\mathbb{F} + \mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie et : $\dim(\mathbb{F} + \mathbb{G}) \leq \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$;
2. si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont en somme directe, alors $\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie et : $\dim(\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$.

Un résultat fondamental : l'existence de supplémentaires de dimension finie.

Théorème 35 Existence d'un supplémentaire en dimension finie
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors tout sev $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ admet des supplémentaires $\mathbb{G}$ dans $\mathbb{E}$ (ie $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$), et ils vérifient $\dim(\mathbb{G}) = \dim(\mathbb{E}) - \dim(\mathbb{F})$.

⚠ ATTENTION : il n'y pas unicité d'un supplémentaire mais seulement de sa dimension.

Ce n'est pas au programme d'ECS première année : le résultat est encore vrai en dimension infinie.

De ces deux théorèmes on déduit une formule générale sur la dimension d'une somme de sev.

Théorème 36 Formule de Grassmann
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev, et $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie. On a :

$$\dim(\mathbb{F} + \mathbb{G}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) - \dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G})$$

Démonstration : On sait que $\mathbb{F}$ est de dimension finie et que $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{F}$. $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ a donc des supplémentaires dans $\mathbb{F}$.

Soit $\mathbb{H}$ un supplémentaire de $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ dans $\mathbb{F}$: $\mathbb{F} = (\mathbb{F} \cap \mathbb{G}) \oplus \mathbb{H}$. On a donc $\dim(\mathbb{H}) = \dim(\mathbb{F}) - \dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G})$.

Montrons que $\mathbb{F}+\mathbb{G}=\mathbb{H}\oplus\mathbb{G}$:
• il est clair que $\mathbb{H}+\mathbb{G}\subseteq\mathbb{F}+\mathbb{G}$ puisque $\mathbb{H}\subseteq\mathbb{F}$. Réciproquement si $\overrightarrow{f}\in\mathbb{F}$ et $\overrightarrow{g}\in\mathbb{G}$, on peut écrire $\overrightarrow{f}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ avec $\overrightarrow{a}\in\mathbb{F}\cap\mathbb{G}$ et $\overrightarrow{b}\in\mathbb{H}$. On obtient $\overrightarrow{f}+\overrightarrow{g}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}+\overrightarrow{g}\in\mathbb{H}+\mathbb{G}$ puisque $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{g}\in\mathbb{G}$;
• puisque $\mathbb{H}\subseteq\mathbb{F}$, $\mathbb{G}\cap\mathbb{H}=\mathbb{G}\cap\mathbb{F}\cap\mathbb{H}=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

On en déduit que :

$$\dim(\mathbb{F}+\mathbb{G})=\dim(\mathbb{H})+\dim(\mathbb{G})=\dim(\mathbb{F})-\dim(\mathbb{F}\cap\mathbb{G})+\dim(\mathbb{G})$$

CQFD □

Autre résultat important, la dimension finie donne une nouvelle caractérisation des sev supplémentaires.

Théorème 37 Caractérisation des sev supplémentaires
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$. On a équivalence des propositions :

1. $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$: $\mathbb{E}=\mathbb{F}\oplus\mathbb{G}$;
2. $\mathbb{F}+\mathbb{G}=\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}=\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$;
3. l'union d'une base de $\mathbb{F}$ et d'une base de $\mathbb{G}$ donne une base de $\mathbb{E}$ (c'est alors vrai pour toutes les bases) ;
4. tout vecteur $\overrightarrow{e}\in\mathbb{E}$ se décompose de manière unique sous la forme $\overrightarrow{e}=\overrightarrow{f}+\overrightarrow{g}$, avec $\overrightarrow{f}\in\mathbb{F}$ et $\overrightarrow{g}\in\mathbb{G}$;
5. $\mathbb{E}=\mathbb{F}+\mathbb{G}$ et $\dim(\mathbb{E})=\dim(\mathbb{F})+\dim(\mathbb{G})$;
6. $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}=\left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right\}$ et $\dim(\mathbb{E})=\dim(\mathbb{F})+\dim(\mathbb{G})$.

***Exemple* :** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $\mathbb{F}=\mathrm{Vect}[(1,1,1)]$ et $\mathbb{G}=\{(x,y,a)\in\mathbb{R}^3/\ x+y+z=0\}=\mathrm{Vect}\left[(1,0,-1);(0,1,-1)\right]$.
On a $\dim(\mathbb{F})+\dim(\mathbb{G})=3$ et $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}=\left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^3}\right\}$.

Dans le cas d'une somme directe de k sev de $\mathbb{E}$, on a la formule suivante.

Théorème 38 Dimension d'une somme directe de k sev de $\mathbb{E}$
Soient $\mathbb{F}_1,\ldots,F_k$ des sev de $\mathbb{E}$ en somme directe. On a :

$$\dim\left(\bigoplus_{j=1}^{k}\mathbb{F}_j\right)=\sum_{j=1}^{k}\dim(\mathbb{F}_j)$$

3 Exercices

Familles libres, génératrices, bases, dimension

Exercice 1 Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

$$\mathscr{F}_1 = \Big((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)\Big)$$
$$\mathscr{F}_2 = \Big((1,1,0),(2,0,1),(3,1,1),(1,0,2)\Big)$$

Exercice 2 On considère le sous-espace vectoriel $\mathbb{E}$ de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\Big((1,-1,3,-3),(2,-2,4,-4),(3,-3,7,-7),(1,-1,1,-1)\Big).$$

1. Donner une base et la dimension de $\mathbb{E}$.
2. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\mathbb{E}$.
3. Etablir que $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$, où $\mathbb{F}$ est défini par $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\Big((1,0,1,-1),(0,1,2,-2),(1,0,0,0),(0,0,-1,1)\Big)$.
4. On pose $\mathbb{G} = \mathrm{Vect}\Big((1,0,0,1),(1,2,0,0)\Big)$. Vérifier que $\mathbb{E} \cap \mathbb{G} = \{0\}$.

Exercice 3 On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\mathbb{E} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \big/ \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + c \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Montrer que $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et donner une base et sa dimension.

Exercice 4 Pour $\alpha > 0$, on note $\mathbb{F}_\alpha$ l'ensemble des fonctions de la forme :

$$x \longmapsto P(x)\mathrm{e}^{\alpha x} + Q(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}$$

où P et Q sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1.

1. Montrer que $\mathbb{F}_\alpha$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{F}_\alpha$ et en déduire sa dimension.

Exercice 5 (Exemples de bases de polynômes)

1. Soient $P_1 = X^2+1$, $P_2 = X^2+X+1$ et $P_3 = X^2+X$. Montrer que (P_1,P_2,P_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$. Montrer que $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Montrer que $\mathbb{F} = \left\{P = aX^4 + (a+b)X \big/ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sev de $\mathbb{E}$ et donner en une base.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k = X^k(X+1)^{n-k}$. Montrer que $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 6

1. Montrer que les $\mathbb{K}$-ev $T_n^+(\mathbb{K})$, $T_n^-(\mathbb{K})$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont de dimension finie et déterminer leur dimension.
2. Si $A = ((a_{ij}))_{1\le i,j\le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on note $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.

   On pose aussi $\mathbb{H} = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \big/ \mathrm{Tr}(A) = 0\right\}$. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa dimension.

Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 7 Soient $\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n}\right)$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ $\mathbb{K}$-ev, et $p \in [\![1,n]\!]$.
Montrer que :

$$\operatorname{rg}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n}\right) \leq \operatorname{rg}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\right) + n - p$$

Sommes directes et sous-espaces supplémentaires

Exercice 8 Soient $\mathbb{E} = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n;\ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$ et $\mathbb{F} = \{(\lambda,\lambda,\dots,\lambda);\ \lambda \in \mathbb{K}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.
2. Déterminer une base de $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{F}$.

Exercice 9 On note $\mathbb{E} = \mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-ev des polynômes à coefficients réels.

1. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $\mathbb{G} = \left\{P \in \mathbb{E}/\ Q|P\right\}$ est un sev de $\mathbb{E}$ et déterminer en un supplémentaire (penser à la division euclidienne).
2. Pour a et b réels distincts, on pose $\mathbb{E}_a = \left\{P \in \mathbb{E}/\ (X-a)|P\right\}$ et $\mathbb{E}_b = \left\{P \in \mathbb{E}/\ (X-b)|P\right\}$.
   Vérifier que $\mathbb{E}_a$ et $\mathbb{E}_b$ sont des sev de $\mathbb{E}$ puis que $\mathbb{E} = \mathbb{E}_a + \mathbb{E}_b$ (pour cela trouver $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ tels que $\lambda(X-a) + \mu(X-b) = 1$).
   La somme est-elle directe ?

Exercice 10 On considère le $\mathbb{K}$-ev $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n.
On rappelle que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n, et que $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées antisymétriques d'ordre n.
Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sev supplémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 11 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ centré en 0. On note $\mathbb{R}^I$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur I. On pose :

$$\mathscr{A} = \left\{f \in \mathbb{R}^I \big/\ f \text{ paire sur } I\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B} = \left\{f \in \mathbb{R}^I \big/\ f \text{ impaire sur } I\right\}$$

Montrer que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^I$.

Exercice 12 On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions numériques.
Soient $\mathbb{E} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \Big/\ f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi)\right\}$ et $\mathbb{F} = \operatorname{Vect}\left(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x)\right)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Vérifier que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$.

Exercice 13 Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{F} = \operatorname{Vect}\Big((0,1,1),(1,0,2)\Big)$.

Exercice 14 On se donne un entier naturel $n \geq 3$, on note $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrer que
$\mathbb{F} = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \big/ X^3|P\right\}$ et $\mathbb{G} = \operatorname{Vect}\left[X(X-1),(X-1)(X-2),X(X-2)\right]$ sont des sev supplémentaires de $\mathbb{E}$.

Exercice 15 On note $\mathbb{E}$ l'ensemble des $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n$, $\mathbb{F}$ l'ensemble des $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n$ et $\mathbb{G}$ l'ensemble des $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+2} = -b_{n+1} - b_n$.

1. Vérifier que $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Déterminer une base et la dimension de $\mathbb{F}$ et de $\mathbb{G}$.
3. Déterminer $\dim(\mathbb{E})$ et en déduire que : $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$. Donner alors une base de $\mathbb{E}$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n$.
   Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 16 Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, D une droite vectorielle et $\mathbb{H}$ un hyperplan.
Si $D \not\subseteq \mathbb{H}$, alors D et $\mathbb{H}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$.

Chapitre 18

Intégration sur un segment

1 Intégrale sur un segment d'une fonction continue

1.1 Primitive d'une fonction continue

Définition 1 Primitive d'une fonction
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie sur I telle que :
(i) F est dérivable sur I ;
(ii) $F' = f$.

⚠ f n'est pas nécessairement continue, et donc F n'est pas nécessairement de classe C^1 (nous avons vu dans le chapitre sur la dérivabilité qu'il existe des fonctions dérivables qui ne sont pas de classe C^1).

⚠ En général une fonction quelconque n'a pas pas de primitive.

⚠ Attention : dire que F est une primitive de f n'a pas de sens. Il faut préciser sur quel intervalle. Par exemple, on ne peut pas dire que $x \longmapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Proposition 2 Primitives d'une même fonction
Soit f une fonction numérique définie sur I, et admettant au moins une primitive sur I. Alors :
(i) f admet une infinité de primitives sur I ;
(ii) toutes les primitives de f sur I sont égales à une constant additive près, ie que si F et G sont deux primitives de f sur I alors il existe un réel C tel que :

$$\forall x \in I, \quad G(x) = F(x) + C$$

C'est pourquoi on parle d'**une** primitive de f. Pour avoir unicité d'une primitive, et donc parler de **la** primitive, il faut imposer une condition initiale.

Théorème 3 Unicité d'une primitive vérifiant une condition initiale
Soit f une fonction numérique définie sur I, et admettant au moins une primitive sur I. On se donne aussi $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant la condition initiale $y_0 = F(x_0)$.

On peut donc dire que F est **la** primitive de f sur I vérifiant la condition initiale $y_0 = F(x_0)$.

Théorème 4 Existence de primitives pour une fonction continue sur un intervalle
Si I est un intervalle et f une fonction continue sur I, alors f admet au moins une primitive sur I.
Elle en admet donc une infinité, toutes égales à une constante additive près, et elles sont toutes de classe C^1 sur I.
Elles sont de la forme :

$$F : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C \end{array}$$

où $a \in I$ et $C \in \mathbb{R}$.

1.2 Tableaux récapitulatifs des primitives usuelles

On rappelle les primitives des fonctions usuelles.

Fonction	Primitive	Intervalle et conditions
x^α	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$x > 0$ (au minimum...) et $\boxed{\alpha \neq -1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}$	$x \in \mathbb{R}$ et $a \neq 1$
$\sin(ax)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax)$	$x \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$
$\cos(ax)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax)$	$x \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$
$1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \in \mathbb{R}$

On rappelle la formule de dérivation d'une composée de fonctions dérivables $\left[F\big(u(x)\big)\right]' = u'(x).F'\big(u(x)\big)$. On en déduit que si F est une primitive de f, alors $F \circ u$ est une primitive de

$u' \times f \circ u$.

Fonction	Primitive	Condition
$u'(x).u(x)^{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha+1}u(x)^{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	aucune
$u'(x).\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$	aucune
$u'(x).\cos\big(u(x)\big)$	$\sin\big(u(x)\big)$	aucune
$u'(x).\sin\big(u(x)\big)$	$-\cos\big(u(x)\big)$	aucune
$u'(x).\Big[1+\tan^2\big(u(x)\big)\Big] = \frac{u'(x)}{\cos^2\big(u(x)\big)}$	$\tan\big(u(x)\big)$	aucune
$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	$\arctan\big(u(x)\big)$	aucune

1.3 Intégrale sur un segment d'une fonction continue

Théorème 5 Intégrale sur un segment d'une fonction continue
Si f est continue sur le segment $[a,b]$, et si F est **une** primitive de f sur $[a,b]$, alors le réel $F(b)-F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F.

A partir de ce résultat, on peut définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Définition 6 Intégrale sur un segment d'une fonction continue
Si f est continue sur le segment $[a,b]$, et si F est **une** primitive de f sur $[a,b]$, alors on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_a^b = F(b)-F(a)$$

Extension de la définition. On pose :

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Ainsi si f est continue sur un intervalle I, on a défini $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $(a,b) \in I^2$ (sans la condition $a<b$).

Nous allons voir que les propriétés de l'intégrale sont très proches de celles de la **somme discrète** $\sum$. Par analogie, on dit que $\int$ est une **somme continue**.

Théorème 7 Relation de Chasles
Si f est continue sur un intervalle I, alors :

$$\forall (a,b,c) \in I^3, \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Insistons sur le fait qu'on ne suppose pas que $a < c < b$.

Théorème 8 Linéarité de l'intégrale
Si f, g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ et λ, μ deux nombres réels, alors :

$$\int_a^b \big(\lambda.f(t) + \mu.g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda.\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu.\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit, l'application :

$$\begin{array}{rccc} I: & C^0([a,b,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est une forme linéaire sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$.

Corollaire 9 Linéarité de l'intégrale
Si $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions continues sur $[a,b]$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels, alors :

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k.f_k(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \lambda_k.\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t$$

⚠ Ceci est complètement faux avec la multiplication ! En général :

$$\int_a^b f(t)\times g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 10 Positivité (stricte) de l'intégrale

1. Positivité : Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$ tel que $\boxed{a \leq b}$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

2. Stricte positivité : Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$ tel que $\boxed{a<b}$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \forall t \in [a,b],\ f(t)=0 \quad \text{(ie } f \text{ est l'application nulle sur } [a,b]\text{)}$$

3. Stricte positivité (contraposée) : Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$ tel que $\boxed{a<b}$. On suppose que f est différente de l'application nulle sur $[a,b]$:

$$\exists t_0 \in [a,b] / \ f(t_0) \neq 0$$

Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

Que se passe-t-il si f est continue et positive sur $[a,b]$ avec $b<a$? Réponse : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq 0$.

On retiendra donc que pour appliquer la positivité de l'intégrale à une fonction continue positive, il faut vérifier que les « bornes sont dans le bon sens ».

Exemple **:** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t$ (intégrales de Wallis). Alors $I_n > 0$.

Théorème 11 Croissance de l'intégrale
Si f, g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ tel que $\boxed{a \leq b}$. On suppose que :

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t) \leq g(t)$$

Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Encore une fois, il ne faudra pas oublier de vérifier que « les bornes sont dans le bon sens ».

Exemple **:** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t$ (intégrales de Wallis). Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Théorème 12 Inégalité de la moyenne
Si f continue sur $[a,b]$ tel que $\boxed{a<b}$:

$$\min_{a\leq t\leq b} f(t) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \max_{a\leq t\leq b} f(t)$$

Encore une fois, il ne faudra pas oublier de vérifier que « les bornes sont (strictement) dans le bon sens ».

Vocabulaire : le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelé valeur moyenne de f.

Exemple **:** Montrer que la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est une valeur prise par f sur $[a,b]$.

Théorème 13 Inégalité triangulaire pour l'intégrale
Si f continue sur $[a,b]$ tel que $\boxed{a \leq b}$:

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Encore une fois, il ne faudra pas oublier de vérifier que « les bornes sont dans le bon sens ».

Exemple **:** Montrer que, si f continue sur $[a,b]$ tel que $\boxed{a \leq b}$:

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq (b-a).\max_{a\leq t\leq b}|f(t)|$$

1.4 Extension aux cas des fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition 14 Fonction continue par morceaux
Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0,\ldots,x_n)$ de $[a,b]$ telle que :
(i) pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, f est continue sur $]x_K, x_{k+1}[$;
(ii) pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $f(x_k^+)$ et $f(x_{k+1}^-)$ existent et sont finies.

La subdivision σ est dite adaptée à f. En lui ajoutant des points, on obtient encore une subdivision adaptée. Par contre une subdivision adaptée doit contenir un minimum de points (correspondant aux points de discontinuité de f), et dans ce cas on dit qu'elle est optimale pour f.

Exemple **:** Les fonctions continues sont des cas particuliers de fonctions continues par morceaux.

Exemple **:** La fonction partie entière est continue par morceaux sur $[0,3]$.

Exemple **:** La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$.

Remarque importante : Si $\sigma = (x_0,\ldots,x_n)$ est une subdivision adaptée à f, alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, f se prolonge par continuité en une fonction continue sur $[x_k, x_{k+1}]$, notée φ_k :

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} f(x_k^+) & \text{si } t = x_k \\ f(t) & \text{si } x_k < t < x_{k+1} \\ f(x_{k+1}^-) & \text{si } t = x_{k+1} \end{cases}$$

Théorème 15 Intégrale d'une fonction continue par morceaux
Si f est une fonction continue par morceaux et $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f, alors le réel :

$$I(\sigma, f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$$

où φ_k est le prolongement continue de f à $[x_k, x_{k+1}]$, ne dépend pas du choix de la subdivision σ. On peut donc le noter $I(f)$.

Définition 16 Intégrale d'une fonction continue par morceaux
Si f est une fonction continue par morceaux on appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$ le réel :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} I(f)$$

Exemple **:** Calculer $\displaystyle\int_0^2 \big(t - \lfloor t \rfloor\big)\,\mathrm{d}t$.

On vérifie facilement que cette définition englobe les définitions de l'intégrale d'une fonction continue. Nous avons donc généralisé la notions du précédent paragraphe.

Théorème 17 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux
L'intégrale d'une fonction continue par morceaux a les mêmes propriétés que l'intégrale d'une fonction continue, sauf la stricte positivité.
• Plus précisément : les propriétés de Chasles, linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire sont vraies pour l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.
• La stricte positivité est mise en défaut : on peut avoir f continue par morceaux et positive, différente de l'application nulle, et telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exemple **:** On pose $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2 & \text{si } t = 1 \end{cases}$. On a $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, et pourtant f est continue positive et différente de l'application nulle.

1.5 Fonctions définies par une intégrale

On peut définir des fonctions à l'aide d'une intégrale.

On suppose donc que u et v sont deux fonctions numériques et que f est une fonction numérique continue sur un intervalle I.

On définit alors une fonction g par la formule :

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction g peut alors être étudier comme n'importe quelle fonction numérique : dérivée, variations, limites, équivalents... On propose le plan d'étude suivant.

• **Ensemble de définition** :

$$x \in \mathscr{D}_g \iff f \text{ est continue par morceaux sur } [u(x), v(x)] \iff f \text{ est continue sur} I \iff x \in A$$

où A est une partie de $\mathbb{R}$ à déterminer. On a alors $\mathscr{D}_g = A$.

RAISONNEMENT IMPORTANT : pour aller plus loin on se donne une autre expression de g. On prend F une primitive de f sur I (F existe car f est continue). On a alors :

$$\forall x \in A, \quad g(x) = F\big(v(x)\big) - F\big(u(x)\big) \qquad (*)$$

C'est cette expression qui va nous permettre de poursuivre notre étude. Noter que F est C^1 sur I.

• **Continuité de g** : d'après la formule $(*)$, si u et v sont continues sur A et à valeurs dans I, alors g est continue sur A.

• **Dérivabilité de g** : d'après la formule $(*)$, si u et v sont dérivables sur A et à valeurs dans I, alors g est dérivable sur A et :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = v'(x).F'\big(v(x)\big) - u'(x).F'\big(u(x)\big) = v'(x).f\big(v(x)\big) - u'(x).f\big(u(x)\big)$$

En général on se sait pas calculer l'expression de F, mais ce n'est pas important vu que l'expression de g' dépend seulement de celle de f.

• **Limites ou équivalents de g en certains points** : on détermine un encadrement de f, et on en déduit par croissance de l'intégrale un encadrement de g.

Exemple **:** On pose $g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$. Étudier les variations de g sur son ensemble de définition et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (pour cela montrer que $g(x) \geq 2\ln(x)$ si $x \geq 1$).

2 Calcul intégral

Notation : si f est une fonction continue sur un intervalle I, note $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ une primitive de f sur I. Cette notation n'est pas correcte car elle ne précise ni l'intervalle I, ni la primitive choisie (on rappelle que f en admet une infinité !). Mais elle rend tout de même service en simplifiant les notations dans les calculs de primitives.

2.1 Intégration par parties

Théorème 18 Intégration par parties (IPP)

1. Version intégrale. Si u et v sont deux foctions de classe C^1 sur $[a,b]$ alors :

$$\int_a^b u'(t).v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t).v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t).v'(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Version primitive. Si u et v sont deux foctions de classe C^1 sur un intervalle I alors :

$$\int u'(x).v(x)\,\mathrm{d}x = u(x).v(x) - \int u(x).v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Méthode : Penser à ce théorème lorsqu'apparaissent :
• des termes en $x^n.f(x)$ qu'on simplifie en dérivant n fois x^n ;
• des bijections réciproques f^{-1} ;
• des termes en sin, cos, exp dont la dérivée est proche de la fonction intiale.

Exemple **:** Déterminer les primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple **:** Déterminer les primitives de arctan sur $\mathbb{R}$.

Exemple **:** Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Exemple **:** Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^t \cos(t)\,\mathrm{d}t$.

2.2 Changement de variable

Ce théorème est l'analogue du théorème de changement d'indice dans une somme discrète $\sum$.

Théorème 19 Théorème de changement de variable
Si f est continue sur $[a,b]$ et si φ est de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$ vérifiant les conditions :

$$\varphi(\alpha) = a \quad \text{et} \quad \varphi(\beta) = b$$

alors on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big).\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

En pratique : pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, on pose $t = \varphi(x)$. On a alors $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ et on détermine α et β tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

Démonstration : Si F est une primitive de f sur $[a,b]$ alors $F\circ\varphi$ est une primitive de $f\circ\varphi.\varphi'$ sur $[\alpha,\beta]$.

CQFD □

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$ en posant $x=\mathrm{e}^t$.

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $x=\sin(t)$.

Corollaire 20 Intégrale d'une fonction périodique
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Alors :

1. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{Z}$:
$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
2. Pour tout $a\in\mathbb{R}$:
$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : Pour 1. poser $x=t-nT$. Pour 2. utiliser Chasles : $\displaystyle\int_a^0+\int_0^T+\int_T^{a+T}=\int_a^{a+T}$.

CQFD □

⚠ Attention : ce théorème ne s'applique pas à la fonction tan.

Exemple : $\displaystyle\int_{-2\pi}^{-\frac{3\pi}{4}}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\cos(2t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\cos(2t)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 21 Intégrale d'une fonction paire/impaire
Soit f une fonction continue sur $[-a,a]$ où $a>0$. Alors :

1. Si f est paire sur $[-a,a]$:
$$\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t=2\int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$$
2. Si f est impaire sur $[-a,a]$:
$$\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

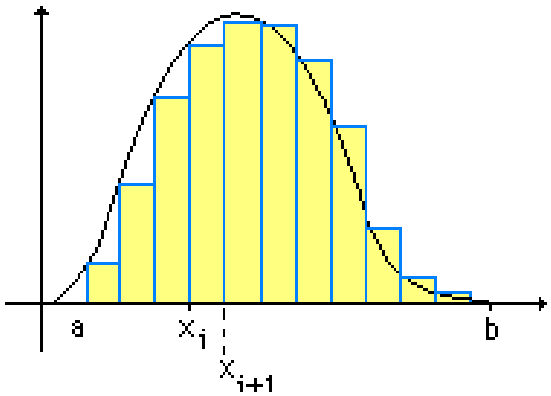
Exemple : $\displaystyle\int_{-2}^2 |t|\,\mathrm{d}t=2\int_0^2 t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)}\arctan\Big(\sin\big(\arctan(x)\big)\Big)\,\mathrm{d}t=0$.

2.3 Sommes de Riemann à pas constant

Définition 22 Somme de Riemann à pas constant
Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle somme de Riemann de f à pas constant d'ordre n le réel :

$$S_n(f;a,b) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

Interprétation graphique : Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{b-a}{n}.f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ est l'aire du rectangle de base $\left[a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}\right]$ et de hauteur $f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$. $S_n(f;a,b)$ est la somme des aires de ces rectangles, le long du segment $[a,b]$.



Théorème 23 Théorème de la valeur moyenne
Si f est continue sur $[a,b]$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Cas particulier $a=0$ et $b=1$: Si f est continue sur $[0,1]$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple **:** Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \ln(2)$.

Démonstration : La démonstration est à connaître dans le cas f f de classe C^1.

CQFD □

On en déduit une méthode numérique de calcul approchée d'une intégrale, appelée **méthode des rectangles**.

Interpétation géométrique de l'intégrale : on en déduit (intuitivement) que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est égale à l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

2.4 Formule de Taylor avec reste intégral

Cette formule est aussi appelée formule de Taylor-Mac Laurin. L'avantage par rapport à la formule de Taylor-Lagrange est qu'on a une expression plus précise du reste.

Théorème 24 Formule de Taylor avec reste intégral
Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}.f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}.f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : Par récurrence et par IPP.

CQFD □

Exemple **:** Montrer que si $x \in]-1,1]$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

3 Exercices

Exercice 1

1. Soit la fonction
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-3+\frac{1}{x^2} \end{array}$$
   (a) Etudier f et tracer sa courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé.
   (b) Soit $\lambda > 1$. Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par $(\mathscr{C}_f)$ et les droites d'équations :
$$y = 2x-3, \qquad x = 1 \qquad \text{et} \qquad x = \lambda.$$
   (c) $\mathscr{A}(\lambda)$ a-t-elle une limite quand $\lambda \to +\infty$?
2. Reprendre cette étude avec la fonction
$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-3+\frac{1}{x} \end{array}$$
   Conclusion ?

Exercice 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$. Établir que :
$$\left|\int_a^b f(t)\times g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t}$$
et qu'on a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Exercice 3 (Comparaison série-intégrale)

1. (a) En considérant la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ où $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'on a :
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$
   (b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que :
$$\forall n \geq 2,\ \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$
   (c) En déduire que : $H_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. (a) Étudier la fonction $f : t \longmapsto \frac{\ln t}{t}$.
   (b) A l'aide d'une comparaison à une intégrale, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$, lorque $n \to +\infty$.
   (c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 4 On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^1,On considère le fonction G définie sur I par $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que G est de classe C^1 sur I.

2. Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que : $G([a,b]) = [m,M]$.
3. Montrer que :
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$$
4. En déduire que :
$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant Mf(a).$$
5. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t.$$
6. On suppose que $a > 0$; montrer que : $\displaystyle\int_a^b \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2+b-a}{a}$.
7. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 0$

Exercice 5 Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$.

Exercice 6 Soit : $G(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}_G$ de G.
2. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathscr{D}_G$.
3. Calculer G'. Conclusion ?

Exercice 7 Soit la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\sin x^2} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos x^2} \arccos\sqrt{t}\,dt$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est π-périodique et paire.
3. Montrer que f est constante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et en déduire qu'elle est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Donner la valeur de cette constante. On commencera par démontrer que :
$$\forall x \in [-1,1],\ \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8 On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t+\sin(t)}\mathrm{d}t$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Vérifier que f est paire.
3. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et donner $f'(x)$.
4. A l'aide du théorème des gendarmes, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 9 Dans cet exercice, a est un réel strictement positif, $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante sur $[0,a]$, dérivable sur $]0,a[$, nulle en 0. La fonction f est alors bijective de $[0,a]$ sur $[0,f(a)]$, de réciproque notée g. On veut montrer que, pour tout réel $t \in [0,a]$:
$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(t)} g(y)\,\mathrm{d}y = tf(t) \qquad (1).$$

1. Vérifier la relation (1) dans le cas où : $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{N}^*$.

   Pour tout $t \in [0, a]$, on note $\varphi(t)$ la quantité :

$$\varphi(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(t)} g(y)\,\mathrm{d}y - tf(t).$$

2. Montrer que φ est définie et continue sur $[0, a]$, dérivable sur $]0, a[$.
3. En déduire l'égalité (1).

Exercice 10 On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}$.

1. Calculer u_1.
2. Établir que : $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. Soit $a \in [0, 1]$. Montrer que : $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant (1-a)^{\frac{1}{n}} \dfrac{a}{1+a}$.
4. A l'aide d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $[0, 1]$ judicieusement choisie, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 11 Pour $a \in [-1, 1]$, on considère la fonction f_a définie par : $f_a(x) = \left|1 - ae^{ix}\right|^2$.

1. Pour tout $a \in]-1, 1[$ et tout $x \in [0, \pi]$ vérifier les propriétés suivantes :
   - $\left(1 - |a|\right)^2 \leqslant f_a(x) \leqslant \left(1 + |a|\right)^2$
   - $f_a(\pi - x) = f_{-a}(x)$
   - $f_{a^2}(x) = f_a\left(\frac{x}{2}\right) f_{-a}\left(\frac{x}{2}\right)$

   On pose, pour tout $a \in]-1, 1[$: $g(a) = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(f_a(x)\right)\mathrm{d}x$.
2. Montrer que g est une fonction paire.
3. Montrer que : $\forall a \in]-1, 1[$, $g(a^2) = 2g(a)$.
4. Montrer que g est continue en 0.
5. En déduire que : $\forall a \in]-1, 1[$, $g(a) = 0$.

Exercice 12

1. Calculer la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{n^3} \displaystyle\sum_{k=1}^n k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1$, $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!n^n}}$.

Exercice 13

1. Vérifier que : $\forall t > 0$, $\ln(t) \leqslant t - 1$.
2. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n réels strictement positifs. En utilisant $a_k = \frac{x_k}{\overline{x}}$, où $\overline{x}$ est la moyenne des x_k, établir que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(x_k) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)$$

3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, à valeurs strictement positives. Montrer que :

$$\int_0^1 \ln\left(f(t)\right)\mathrm{d}t \leqslant \ln\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Exercice 14 (Méthode des rectangles) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$.

1. Montrer qu'il existe une constant $C \geq 0$ telle que : $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, $|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|$.
2. En déduire qu'il existe une constante M ne dépendant que de f telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{M}{n}$$
3. En déduire un programme Turbo-Pascal qui permet de déterminer une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Même question en imposant une précision de 10^{-2}.

Exercice 15 On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt.$$

1. Montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ converge et donner sa limite.
2. En déduire un équivalent de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \int_0^1 t^n \ln\left(1+t^2\right)\,dt.$$

Exercice 16 Pour $n,p \in \mathbb{N}$ on pose $I_{n,p} = \displaystyle\int_{-1}^1 (1+x)^n(1-x)^p\,dx$. Pour $n \geq 1$, exprimer $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n-1,p+1}$, puis $I_{n,p}$ en fonction de $I_{0,n+p}$, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. En déduire la valeur de $I_{n,p}$ en fonction de n et p.

Exercice 17 (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit f de classe C^1 sur un segment $[a,b]$. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0.$$

Exercice 18

1. Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{u-1}{2u+1}\,\mathrm{d}u$.
2. (a) Déterminer des constantes réelles a et b telles que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, $\dfrac{x+1}{x^2+4x+4} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{(x+2)^2}$.
   En déduire que $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+4x+4}\,dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{6}$.
   (b) Déterminer des constantes réelles a, b et c telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{ax+b}{x^2+x+1} + \dfrac{c}{x^2+x+1}$.
   En déduire que $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \ln\left(\sqrt{3}\right) + \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

Exercice 19 Calculer les intégrales ou les primitives suivantes :
$$\int_0^{\pi/4} \sin^4(x)\cos^3(x)\,dx, \quad \int e^{-x}\cos(x)\,dx, \quad \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx, \quad \int_0^1 t\arctan(t)\,dt$$

Exercice 20 Au moyen du changement de variable indiqué entre parenthèses calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)} \qquad (u = \cos(t))$
2. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx \qquad (u = \tan(x))$
3. $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\frac{\ln(x)}{x}\,dx \qquad (x = 1/t)$

Exercice 21 Soient $a < b$ deux réels et f continue sur $[a,b]$.
Montrer au moyen d'un changement de variable affine que $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.
Application : calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt$.

Exercice 22 (ESCP 2013 1.11) Soit un réel x et un entier naturel $n > 0$; on note :

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-x)^p}{p+1}$$

1. Montrer que les relations $u_n = S_{2n}(1)$ et $v_n = S_{2n+1}(1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ définissent deux suites réelles adjacentes. En déduire la convergence de la suite $(S_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel ℓ.

   Les questions suivantes sont indépendantes ; elles permettent toutes le calcul de ℓ.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x)$. Pour $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f^{(k)}(x)$ puis déterminer $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f^{(k)}(x)|$.
   En déduire la valeur de ℓ par application de l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur $[0,1]$.
3. Établir que, pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier $n > 0$:

   $$S_{2n}(x) \leq f(x) \leq S_{2n+1}(x)$$

   et en déduire la valeur de ℓ.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$: $S_{2n}(1) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$
   En déduire la valeur de ℓ en faisant apparaître une somme de Riemann.
5. Montrer que pour tout entier $n > 0$:

   $$S_n(1) = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt$$

   et en déduire la valeur de ℓ.

Chapitre 19

Applications linéaires

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Applications linéaires

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ désignent deux $\mathbb{K}$-ev.

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 Application linéaire
Soit f une application définie sur $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathbb{F}$:

$$f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$$

On dit que f est linéaire lorsque :

1. $\forall \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right) \in \mathbb{E}^2,\ f\left(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}\right) = f\left(\overrightarrow{x_1}\right) + f\left(\overrightarrow{x_2}\right)$
2. $\forall \left(\alpha, \overrightarrow{x_1}\right) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E},\ f\left(\alpha.\overrightarrow{x_1}\right) = \alpha.f\left(\overrightarrow{x_1}\right)$

On note $\mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.

$\mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est donc une partie de $\mathbb{F}^{\mathbb{E}}$.

<u>Vocabulaire et notations</u> :

• Si $\mathbb{E} = \mathbb{F}$, $\mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ est noté plus simplement $\mathscr{L}(\mathbb{E})$. Les éléments de $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ sont appelés **endomorphismes de** $\mathbb{E}$.

• Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est bijective de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$, alors f est appelée **isomorphisme de** $\mathbb{E}$ **sur** $\mathbb{F}$.

• Si f est à la fois un endomorphisme de $\mathbb{E}$ et un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}$, c'est-à-dire que $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ est linéaire et bijective de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}$, alors f est appelée **automorphisme de** $\mathbb{E}$. L'ensemble des automorphismes de $\mathbb{E}$ est noté $Gl(\mathbb{E})$.

• Si $\mathbb{F} = \mathbb{K}$ alors les applications linéaires $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ sont appelées **formes linéaires sur** $\mathbb{E}$.

Exemple **:** Application nulle de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.

$$\begin{array}{rccc} O_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}: & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ & \overrightarrow{x} & \longmapsto & O_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0_{\mathbb{F}}} \end{array}$$

Elle est linéaire, donc $O_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})} \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

Exemple **:** Application identité de $\mathbb{E}$.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_{\mathbb{E}}: & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & \overrightarrow{x} & \longmapsto & \mathrm{id}_{\mathbb{E}}\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x} \end{array}$$

Elle est linéaire et bijective, donc $\mathrm{id}_{\mathbb{E}} \in Gl(\mathbb{E})$.

Exemple **:** Somme des composantes d'un n-uplet.

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \overrightarrow{u} = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & S\left(\overrightarrow{u}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \end{array}$$

Elle est linéaire, donc S est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

Exemple **:** Intégrale d'une fonction continue. On note $\mathscr{C}([a,b])$ l'ensemble des fonction numériques continues sur $[a,b]$.

$$\begin{array}{rccc} I: & \mathscr{C}([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Elle est linéaire, donc I est une forme linéaire sur $\mathscr{C}([a,b])$.

Théorème 2 Critère de linéarité

Soit $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ une application. On a équivalence de :

1. f est linéaire ;
2. $\forall\left(\alpha, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2,\ f\left(\alpha.\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}\right) = \alpha.f\left(\overrightarrow{x_1}\right) + f\left(\overrightarrow{x_2}\right)$

C'est ce critère qu'on utilise en pratique pour montrer qu'une application est linéaire.

Exemple **:** Un exemple de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \overrightarrow{u} = (x,y,z) & \longmapsto & f\left(\overrightarrow{u}\right) = f(x,y,z) = (2x - z, x + y + z) \end{array}$$

Elle est linéaire, ce qui se note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Proposition 3 Propriétés des applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

1. $f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_F}$;
2. $\forall\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right) \in \mathbb{E}^2,\ f\left(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}\right) = f\left(\overrightarrow{x_1}\right) - f\left(\overrightarrow{x_2}\right)$
   en particulier $\forall \overrightarrow{x_1} \in \mathbb{E},\ f\left(-\overrightarrow{x_1}\right) = -f\left(\overrightarrow{x_1}\right)$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\left(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}\right) \in \mathbb{E}^n,\ \forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{x_k}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.f\left(\overrightarrow{x_k}\right)$

1.2 Opérations sur les applications linéaires

1.2.1 Restriction

Théorème 4 Restriction d'une application linéaire à un sev
Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, si $\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$, et si $\mathbb{H}$ est un sev de $\mathbb{F}$ tel que $f(\mathbb{G}) \subseteq \mathbb{H}$, alors $f_{|\mathbb{G}}^{|\mathbb{H}} \in \mathscr{L}(\mathbb{G},\mathbb{H})$.

Autrement dit, la restriction d'une application linéaire à un sev est encore une application linéaire.

1.2.2 Somme et multiplication par un scalaire

Si $(f,g) \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit les applications $f+g : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ et $\alpha.f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ par :

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}, \quad (f+g)(\overrightarrow{x}) \overset{\text{def}}{=} f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{x})$$
$$(\alpha.f)(\overrightarrow{x}) \overset{\text{def}}{=} \alpha.f(\overrightarrow{x})$$

Proposition 5 Opérations dans $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$
Si $(f,g) \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $f+g \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $\alpha.f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

Corollaire 6 Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$
Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ muni des deux opérations ci-dessus est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}^{\mathbb{E}}$).

En particulier $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ est aussi un $\mathbb{K}$-ev.

1.2.3 Composition

Théorème 7 Composition d'applications linéaires
On se donne un troisième $\mathbb{K}$-ev noté $\mathbb{G}$.

1. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{G})$.
2. Si f est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$ et g est un isomorphisme de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{G}$, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{G}$.
3. Si f et g sont deux automorphismes de $\mathbb{E}$, alors $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{E}$.

Proposition 8 Règles de calcul dans $\left(\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}),+,.,\circ\right)$
On se donne $(f_1,f_2) \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})^2$ et $(g_1,g_2) \in \mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})^2$.

1. $\circ$ est distributive par rapport à $+$:
   $g_1 \circ (f_1+f_2) = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_2$ et $(g_1+g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_2$.
2. Si $\alpha \in \mathbb{K}$: $g_1 \circ (\alpha.f_1) = \alpha.(g_1 \circ f_1) = (\alpha.g_1) \circ f_1$.

Rappelons que $\circ$ est aussi associative, mais non commutative : $g \circ f \neq f \circ g$ en général.

Définition 9 Puissance d'un endomorphisme
Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, on pose $f^0 = \mathrm{id}\mathbb{E}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

D'après les résultats précédents, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.

Proposition 10 Règles de calcul
Si $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a : $\left(f^n\right)^p = f^{np} = \left(f^p\right)^n$ et $f^n \circ f^p = f^{n+p} = f^p \circ f^n$.

Par contre, en général : $\left(g \circ f\right)^n \neq g^n \circ f^n$.

Lemme 11 Si $(f,g) \in \mathscr{L}(\mathbb{E})^2$ commutent, ie $g \circ f = f \circ g$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(g \circ f\right)^n = g^n \circ f^n$.

On dispose même d'une formule du binôme !

Théorème 12 Formule du binôme de Newton, version endomorphisme
Si $(f,g) \in \mathscr{L}(\mathbb{E})^2$ commutent, ie $g \circ f = f \circ g$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^k \circ g^{n-k} = (g+f)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.g^k \circ f^{n-k}$$

⚠ ATTENTION : ce résultat est faux si $g \circ f \neq f \circ g$.
Par exemple, on a : $(f+g)^2 = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2 \neq f^2 + 2.f \circ g + g^2$.

1.2.4 Bijection réciproque

Théorème 13 Bijection réciproque d'un iso/automorphisme

1. Si f est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$, alors f^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{E}$.
2. Si f est un automorphisme de $\mathbb{E}$, alors f^{-1} est un automorphisme de $\mathbb{E}$.

Définition 14 Puissances négatives d'un automorphisme
Soit f un automorphisme de $\mathbb{E}$. On pose :
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$;
• pour tout $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{\left(f^{-1}\right) \circ \left(f^{-1}\right) \circ \cdots \circ \left(f^{-1}\right)}_{-n \text{ fois}}$

Proposition 15 Règles de calcul
Si $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$, on a : $\left(f^n\right)^p = f^{np} = \left(f^p\right)^n$ et $f^n \circ f^p = f^{n+p} = f^p \circ f^n$ et $\left(f^{-1}\right)^n = f^{-n}$.

1.3 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 16 Noyau et image
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

1. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, on appelle noyau de f la partie de $\mathbb{E}$ suivante :
$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\left(\{\overrightarrow{0_F}\}\right) = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{E} / \ f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}\right\}$$
On a donc pour $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$:
$$\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$$
2. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, on appelle image de f la partie de $\mathbb{F}$ suivante :
$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{E}) = \left\{f\left(\overrightarrow{x}\right) \in \mathbb{F} / \ \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}\right\}$$
On a donc pour $\overrightarrow{y} \in \mathbb{F}$:
$$\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(f) \Longleftrightarrow \exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{E} / \ \overrightarrow{y} = f\left(\overrightarrow{x}\right)$$

Théorème 17 $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des $\mathbb{K}$-ev
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sev de $\mathbb{E}$ et $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de $\mathbb{F}$.

Exemple **:** On considère l'application :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \overrightarrow{u} = (x,y,z) & \longmapsto & f\left(\overrightarrow{u}\right) = f(x,y,z) = (2x-z, x+y+z) \end{array}$$
Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exemple **:** $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$.

⚠ ATTENTION : en particulier $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ ne donne pas $f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ ou $g = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$. Prendre par exemple $f(x,y) = (x,x)$ et $g(x,y) = x - y$.

⚠ ATTENTION : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ ne donne pas que $f = g$. Prendre par exemple $f(x, y) = x$ et $g(x, y) = x + y$.

Théorème 18 Critères d'injectivité et de surjectivité
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Alors :

1. f est injective sur $\mathbb{E} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
2. f est surjective de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F} \iff \mathrm{Im}(f) = \mathbb{F}$.

Le premier point n'est vrai que si f est linéaire. Par contre le second est vrai en général, quelle que soit l'application (il ne sera donc pas très utile en pratique).

Cas d'une restriction : Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $\mathbb{H}$ sev de $\mathbb{E}$, on a $\mathrm{Ker}(f_{|\mathbb{H}}) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathbb{H}$. Donc si f est injective, $f_{|\mathbb{H}}$ l'est encore. On a aussi $\mathrm{Im}(f_{|\mathbb{H}}) \subseteq \mathrm{Im}(f)$, mais dans le cas général, on ne peut rien dire de plus.

1.4 Image d'une famille de vecteurs

Si $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_i})_{i \in I}$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$, et si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, alors on définit $f(\mathscr{F}) = \left(f(\overrightarrow{u_i})\right)_{i \in I}$ qui est une famille de vecteurs de $\mathbb{F}$, appelée famille image de la famille $\mathscr{F}$ par f. Comme les familles $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_i})_{i \in I}$ et $f(\mathscr{F}) = \left(f(\overrightarrow{u_i})\right)_{i \in I}$ sont indexées par le même ensemble d'indices, elles ont le même nombre de vecteurs.

En particulier si $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille de p vecteurs de $\mathbb{E}$, alors $f(\mathscr{F}) = \left(f(\overrightarrow{u_1}), \ldots, f(\overrightarrow{u_p})\right)$ est une famille de p vecteurs de $\mathbb{F}$.

Théorème 19 Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base
Si $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\varepsilon_i})_{i \in I}$ est une base de $\mathbb{E}$ et si $(\overrightarrow{v_i})_{i \in I}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{F}$, alors il existe une unique application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ telle que $\forall i \in I$, $f(\overrightarrow{\varepsilon_i}) = \overrightarrow{v_i}$.
Elle est définie ainsi : si $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ a pour coordonnées $(\lambda_i)_{i \in I}$ dans $\mathscr{B}$, alors $f(\overrightarrow{x}) = \sum_{i \in I} \lambda_i . f(\overrightarrow{x_i})$.

Il faut retenir deux points :
• pour définir $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, il suffit de se donner la valeur des vecteurs $f(\overrightarrow{\varepsilon_i})$, pour $i \in I$;
• pour montrer que $f \equiv g$, ie que $f(\overrightarrow{x}) = g(\overrightarrow{x})$ pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$, il suffit de vérifier que : $f(\overrightarrow{\varepsilon_i}) = g(\overrightarrow{\varepsilon_i})$ pour tout $i \in I$.

Théorème 20 Image d'une famille de vecteurs
Soient $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

1. On a : $f\left(\mathrm{Vect}[\mathscr{F}]\right) = \mathrm{Vect}\left[f(\mathscr{F})\right]$
2. En particulier si $\mathscr{B}$ est génératrice (ou une base) de $\mathbb{E}$: $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left[f(\mathscr{B})\right]$

Théorème 21 Applications linéaires et familles de vecteurs
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

1. $$f \text{ est injective sur } \mathbb{E} \Longrightarrow \forall \mathscr{F} \text{ famille libre de } \mathbb{E},\ f(\mathscr{F}) \text{ famille libre de } \mathbb{F}$$
   De plus :
   $$f \text{ est injective sur } \mathbb{E} \Longleftrightarrow \text{ il existe } \mathscr{B} \text{ base de } \mathbb{E} \text{ telle que } f(\mathscr{B}) \text{ famille libre de } \mathbb{F}$$
   et c'est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{E}$.
2. $$f \text{ est surjective de } \mathbb{E} \text{ sur } \mathbb{F} \Longrightarrow \forall \mathscr{F} \text{ famille génératrice de } \mathbb{E},\ f(\mathscr{F}) \text{ génératrice de } \mathbb{F}$$
   De plus :
   $$f \text{ est surjective de } \mathbb{E} \text{ sur } \mathbb{F} \Longleftrightarrow \text{ il existe } \mathscr{B} \text{ base de } \mathbb{E} \text{ telle que } f(\mathscr{B}) \text{ génératrice de } \mathbb{F}$$
   et c'est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{E}$.
3. $$f \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{E} \text{ sur } \mathbb{F} \Longrightarrow \forall \mathscr{B} \text{ base de } \mathbb{E},\ f(\mathscr{B}) \text{ base de } \mathbb{F}$$
   De plus :
   $$f \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{E} \text{ sur } \mathbb{F} \Longleftrightarrow \text{ il existe } \mathscr{B} \text{ base de } \mathbb{E} \text{ telle que } f(\mathscr{B}) \text{ base de } \mathbb{F}$$
   et c'est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{E}$.

1.5 Projections

Définition 22 Projection
Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$, tels que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.
L'application :
$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_F} + \overrightarrow{x_G} & \longmapsto & p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x_F} \end{array}$$
est appelée projection sur $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$.
De même l'application :
$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_F} + \overrightarrow{x_G} & \longmapsto & p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x_G} \end{array}$$
est appelée projection sur $\mathbb{G}$ parallèlement à $\mathbb{F}$.
p et q sont appelés projections associées à la somme directe $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

Lorsqu'on montre que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ par analyse-synthèse, les formules obtenues dans la partie analyse donnent une expression de $p(\overrightarrow{x})$.

Exemple **:** Déterminer l'expression de la projection sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 23 Propriétés des projections

1. p et q sont des endomorphismes de $\mathbb{E}$;
2. $p+q=\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$;
3. $p\circ q=q\circ p=0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$, $p\circ p=p$ et $q\circ q=q$;
4. Pour $\overrightarrow{x}\in\mathbb{E}$: $\overrightarrow{x}\in\mathrm{Ker}(p)\iff p\left(\overrightarrow{x}\right)=\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{x}\in\mathrm{Im}(p)\iff p\left(\overrightarrow{x}\right)=\overrightarrow{x}$;
5. $\mathrm{Ker}(p)=\mathbb{G}=\mathrm{Im}(q)=\mathrm{Im}(p-\mathrm{id}_{\mathbb{E}})$ et $\mathrm{Im}(p)=\mathbb{F}=\mathrm{Ker}(q)=\mathrm{Ker}(p-\mathrm{id}_{\mathbb{E}})=$ ensemble des points fixes de p

⚠ ATTENTION : si p et q sont deux projecteurs de $\mathbb{E}$, on n'a pas en général $p\circ q=0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$! Sauf si p et q sont deux projecteurs **associés**, ie si $p+q=\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.

Définition 24 Projecteurs
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{E}$. On dit que f est un projecteur lorsque $f\circ f=f$.

Théorème 25 Caractérisation des projections
Soit p un endomorphisme de $\mathbb{E}$. Alors p est une projection si et seulement si p est un projecteur, ie $p\circ p=p$.
On a alors $\mathbb{E}=\mathrm{Ker}(p)\oplus\mathrm{Im}(p)$ et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Exemple **:** Calculer $(\mathrm{id}_{\mathbb{E}}+p)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, lorsque p est un projecteur de $\mathbb{E}$.

⚠ ATTENTION : si f est un endomorphisme de $\mathbb{E}$, qui n'est pas un projecteur, alors on ne peut pas dire que $\mathbb{E}=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

Noter que $0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ sont deux projecteurs associés de $\mathbb{E}$ associés à la somme directe $\mathbb{E}=\mathbb{E}\oplus\left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right\}$.

2 Applications linéaires en dimension finie

2.1 Rang d'une application linéaire

Définition 26 Rang d'une application linéaire
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f\in\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.
On appelle rang de f le nombre entier naturel : $\mathrm{rg}(f)=\dim\left[\mathrm{Im}(f)\right]$.

Si $\mathscr{B}=\left(\overrightarrow{u}_1,\dots,\overrightarrow{u}_p\right)$ est une base de $\mathbb{E}$, on rappelle que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left[f\left(\overrightarrow{u}_1\right),\dots,f\left(\overrightarrow{u}_p\right)\right]$. en particulier, $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de $\mathbb{F}$ de dimension finie (même si $\mathbb{F}$ ne l'est pas), et $\mathrm{rg}(f)$ est donc bien défini.

Proposition 27 Propriétés du rang d'une application linéaire
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

1. Si $\mathscr{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est une base de $\mathbb{E}$:
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left[f(\mathscr{B})\right] = \mathrm{rg}\left[f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p)\right]$$
2. $\mathrm{rg}(f) \leq \min\left(\dim(\mathbb{E}), \dim(\mathbb{F})\right)$ (même si $\dim(\mathbb{F}) = +\infty$)
3. $\mathrm{rg}(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}$

Le théorème suivant est fondamental, puisqu'il relie la dimension du noyau à celle de l'image.

Théorème 28 Théorème du rang
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$. On a :
$$\dim(\mathbb{E}) = \mathrm{rg}(f) + \dim\left[\mathrm{Ker}(f)\right]$$

⚠ ATTENTION : dans le cas $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, cela ne signifie pas que $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

La démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 29 Isomorphisme entre les supplémentaires du noyau et l'image
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.
Si $\mathbb{H}$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{H}$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$.

Corollaire 30 Hyperplan et forme linéaire Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors :
$$\mathbb{H} \text{ est un hyperplan de } \mathbb{E} \Longleftrightarrow \mathbb{H} \text{ est le noyau d'une forme linéaire non nulle}$$

Démonstration : $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $\mathbb{E} = \mathbb{H} \oplus \mathrm{Vect}(\vec{u})$, considérer $\varphi : \vec{x} = \vec{h} + \lambda_x.\vec{u} \in \mathbb{E} \longmapsto \lambda_x \in \mathbb{K}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Conséquence du théorème du rang.

CQFD □

Corollaire 31 Surjectivité des formes linéaires en dimension finie Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors toute forme linéaire définie sur $\mathbb{E}$, non nulle, est surjective.

Théorème 32 Injectivité, surjectivité et rang
Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

1. $\mathrm{rg}(f) \leq \min\big(\dim(\mathbb{E}), \dim(\mathbb{F})\big)$.
2. $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{E}) \iff f$ injective.
3. $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{F}) \iff f$ surjective.
4. Si $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) = n$:

$$f \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{E} \text{ sur } \mathbb{F} \iff \mathrm{rg}(f) = n$$

Théorème 33 Injectivité et surjectivité en dimension finie
Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

1. On suppose que $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F})$. Alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ isomorphisme}$$

2. On suppose que $\mathbb{E} = \mathbb{F}$. Alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ automorphisme}$$

⚠ Attention : ce résultat est faux en dimension infinie. Considérer par exemple l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$$

Corollaire 34 Inversibilité à gauche/droite en dimension finie
Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie tels que $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F})$.
Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{E})$. Alors :

$$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{E}} \Longrightarrow f \text{ et } g \text{ isomorphismes et } f^{-1} = g$$

et donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{F}}$.

On utilisera principalement ce résultat sur les endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ de dimension finie.

⚠ ATTENTION : ceci n'est vrai qu'en dimension finie ! Considérer comme contre-exemple le morphisme « shift » sur les suites réelles.

Théorème 35 Rang d'une composée - Invariance du rang par isomorphisme
Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$. Alors :

1. Rang d'une composée : $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\big(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f)\big)$;
2. Invariance du rang par isomorphisme :
   si g est un isomorphisme : $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$;
   si f est un isomorphisme : $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.

Démonstration : Pour montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$ on utilise le théorème du rang.

CQFD □

2.2 Matrice d'une famille finie de vecteurs

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, et $\mathscr{B} = \big(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\big)$ une base de $\mathbb{E}$.

On a vu que tout $x \in \mathbb{E}$ s'écrit de manière unique : $x = \sum_{k=1}^{n} x_k.\varepsilon_k$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

On associe alors à x la matrice colonne :

$$X = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) = \mathrm{Mat}(x, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

Plus généralement, si $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$, on lui associe la matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ telle que la j-ième colonne de A est égale aux coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathscr{B}$:

$$A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F}) = \mathrm{Mat}(\mathscr{F}, \mathscr{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & \ldots & u_j & \ldots & u_p \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} \leftarrow & \varepsilon_1 \\ & \vdots \\ \leftarrow & \varepsilon_i \\ & \vdots \\ \leftarrow & \varepsilon_n \end{array}$$

où on a posé : $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $u_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})^{\mathscr{B}} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.\varepsilon_k$

Définition 36 Matrice d'une famille finie de vecteurs
La matrice $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F}) = \mathrm{Mat}(\mathscr{F}, \mathscr{B})$ est appelée matrice associée à la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Réciproquement : si on fixe un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ de base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ (donc $\mathbb{E}$ de dimension n), alors toute matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie une famille de p vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ telle que :

$$A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F})$$

Exemple **:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ donne dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la famille $\mathscr{F} = \big((1,0,3);(2,1,0)\big)$.

Exemple **:** La même matrice A donne dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ la famille $\mathscr{F} = \big(1 + 3X^2, 2 + X\big)$.

2.3 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $p \geq 1$, et $\mathscr{B} = \big(e_1, e_2, \dots, e_p\big)$ une base de $\mathbb{E}$.

Soient $\mathbb{F}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, et $\mathscr{C} = \big(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\big)$ une base de $\mathbb{F}$.

On a vu que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est entièrement déterminée par la donnée de la famille $\mathscr{F} = \big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$ de vecteurs de $\mathbb{F}$, grâce à la formule suivante :

$$\text{si } x = (x_1, \dots, x_p)^{\mathscr{B}} \text{ alors } f(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k . f(e_k)$$

Or on vient de voir que la famille $\mathscr{F}$ est entièrement déterminée par la donnée de sa matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ dans la base $\mathscr{C}$. Par conséquent l'application linéaire f est elle aussi entièrement déterminée par la donnée de la matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On note donc :

$$A = \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(f) = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \leftarrow \ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \leftarrow \ \varepsilon_n \end{array}$$

où on a posé : $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $f(e_j) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^{\mathscr{C}} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} . \varepsilon_k$

On peut remarquer que $\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C}) = \mathrm{Mat}\big(f(\mathscr{B});\mathscr{C}\big)$. La matrice de gauche est celle d'une application linéaire dans des bases, et celle de droite la matrice d'une famille de vecteurs dans une base.

Définition 37 Matrice d'une application linéaire dans des bases
La matrice $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(f) = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C})$ est appelée matrice associée à f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

Réciproquement : si on fixe un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ de base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ (donc $\mathbb{E}$ de dimension p), un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{F}$ de base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ (donc $\mathbb{F}$ de dimension n), alors toute matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ telle que :

$$A = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}, \mathscr{C})$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donne, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et R^2, $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0) & = & (1,2) \\ f(0,1,0) & = & (0,1) \\ f(0,0,1) & = & (1,1) \end{array}$$

et d'expression analytique : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x.f(1,0,0) + y.f(0,1,0) + z.f(0,0,1) = (x+z, 2x+y+z)$.

Définition 38 Application linéaire canoniquement associée
Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A, l'application $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n\right)$ définie par A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et K^n.

Cas des endomorphismes : Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, et $\mathscr{B} = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\right)$ une base de $\mathbb{E}$.

On associe à $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ la matrice $A = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}, \mathscr{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notée plus simplement $\mathrm{Mat}(f; \mathscr{B})$ ou $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$:

$$A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f(\varepsilon_1) & \dots & f(\varepsilon_j) & \dots & f(\varepsilon_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \end{array}$$

où on a posé : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ f(\varepsilon_j) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^{\mathscr{C}} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.\varepsilon_k$

On a donc $\mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}) = \mathrm{Mat}\left(f(\mathscr{B}); \mathscr{B}\right)$. La matrice de gauche est celle d'un endomorphisme dans une base, et celle de droite la matrice d'une famille de vecteurs dans une base.

Définition 39 Matrice d'un endomorphisme dans une base
La matrice $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B})$ est appelée matrice carrée associée à l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}$.

Réciproquement : si on fixe un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ de base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ (donc $\mathbb{F}$ de dimension n), alors toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ tel que :

$$A = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B})$$

Exemple **:** Dans $\mathbb{R}_n[X]$ on considère l'endomorphisme :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

Sa matrice associée dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 40 Endomorphisme canoniquement associé
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle endomorphisme canoniquement associé à A, l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ défini par A dans la base canonique de K^n.

Cas des formes linéaires : Dans ce cas $\mathbb{F} = \mathbb{K}$ et on prend comme base de $\mathbb{K}$: $\mathscr{C} = (1)$. On remarque que la matrice asociée à une forme linéaire est une matrice ligne. Si $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{E}$:

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & \dots & f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

Exemple **:** Dans $\mathbb{K}^n$, on considère la forme linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \end{array}$$

Sa matrice associée dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$ est :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2.4 Interprétation du produit d'une matrice par un vecteur colonne

Si $A = ((a_{ij}))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}p1(\mathbb{K})$, le produit $A \times X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est donné par :

$$A \times X = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{1k} \times x_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times x_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{nk} \times x_k \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \quad \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array}$$

ie que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$(AX)[i,1] = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times x_k$$

Théorème 41 Produit matriciel et image d'un vecteur par une application linéaire
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathscr{B}$ et de dimension $p \geq 1$, $\mathbb{F}$ un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathscr{C}$ et de dimension $n \geq 1$, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, $x \in \mathbb{E}$ et $y \in \mathbb{F}$.
On note $A = \mathrm{Mat}((;\mathscr{B},\mathscr{C})f) \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, $X = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K})$ et $Y = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(y) \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Alors :

$$y = f(x) \iff Y = A \times X$$

Corollaire 42 Égalité de deux matrices
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

1. On a :
$$A = B \iff \forall X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K}), \quad A \times X = B \times X$$
2. On a :
$$A = 0_{np} \iff \forall X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K}), \quad A \times X = 0_{n1}$$

Le théorème précédent indique aussi comment trouver l'expression analytique d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

Exemple **:** On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ z \\ x+2y+z \end{pmatrix}$$

donc $f(x,y,z) = (x+2y+z, z, x+2y+z)$.

Exemple **:** On note $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{23}(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}\big(\mathbb{R}_2[X],\mathbb{R}_1[X]\big)$ l'application linéaire associée dans les bases canoniques. Pour tout $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+c \\ -a+b-c \end{pmatrix}$$

donc $f(a+bX+cX^2) = (a-b+c) + (-a+b-c)X$.

Définition 43 Noyau et image d'une matrice
Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

1. On appelle noyau de A la partie de $\mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K})$ suivante :
$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K}) \middle/ AX = 0_{p1}\right\}$$
2. On appelle image de A la partie de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ suivante :
$$\mathrm{Im}(A) = \left\{AX \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \middle/ X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})\right\}$$
3. On dit que A est injective lorsque $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{p1}\}$.
4. On dit que A est surjective lorsque $\mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Notons $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n\right)$ l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors :
$$(x_1, \dots, x_p) \in \mathrm{Ker}(f) \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$$
et donc :
$$f \text{ est injective} \iff A \text{ est injective}$$
De plus en identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$, on peut considérer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(f)$.

De même :
$$(y_1, \dots, y_n) \in \mathrm{Im}(f) \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$$
et donc :
$$f \text{ est surjective} \iff A \text{ est surjective}$$
De plus en identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$, on peut considérer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(f)$.

2.5 Interprétation du produit de deux matrices

Théorème 44 Produit matriciel et composition d'applications linéaires
Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, G trois K-ev de base respective $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, ainsi que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$.
On a alors :
$$\mathrm{Mat}(g \circ f, \mathscr{B}, \mathscr{D}) = \mathrm{Mat}(g, \mathscr{B}, \mathscr{C}) \times \mathrm{Mat}(f, \mathscr{C}, \mathscr{D})$$

Ce théorème justifie la définition choisie pour le produit matriciel : il correspond à la composée des applications linéaires associées aux matrices. On comprend mieux pourquoi le produit matriciel est non commutatif et non intègre : il hérite ces propriétés de la composition des applications linéaires.

⚠ Rappelons à toutes fins utiles que $g \circ f = 0$ ne donne pas $f = 0$ ou $g = 0$, et en général $f \circ g \neq g \circ f$.

Donnons maintenant le lien entre matrice identité et application identité.

Proposition 45 Lien entre matrice identité et application identité
Si $\mathbb{E}$ est un K-ev de dimension $n \geq 1$, alors pour toute base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{E}$, on a : $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = I_n$.

Remarquer que cette relation est vraie dans toutes les bases de $\mathbb{E}$.

Les différentes règles de calcul vue pour le produit matriciel peuvent ainsi être rédémontrées via les applications linéaires.

Exemple **:** Si $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, montrer que $A \times I_p = I_n \times A = A$.

2.6 Cas des endomorphismes et des matrices carrées

On a défini les puissances entières d'une matrice carrée et d'un endomorphisme. Ces deux notions sont liées par le théorème suivant.

Proposition 46 Puissances de matrices et d'endomorphismes
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et de base $\mathscr{B}$, et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$. On a alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}\left(f^p\right) = \left(\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)\right)^p$$

Donnons maintenant le lien entre matrices carrées inversibles et automorphismes.

Théorème 47 Matrices inversibles et isomorphismes/automorphismes

1. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, tels que $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F})$, et de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. On a :

$$f \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{E} \text{ sur } \mathbb{F} \iff A = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C}) \text{ est inversible}$$

   et dans ce cas :

$$A^{-1} = \left(\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C})\right)^{-1} = \mathrm{Mat}\left(f^{-1};\mathscr{C},\mathscr{B}\right)$$

2. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie de base $\mathscr{B}$. On a :

$$f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{E} \iff A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) \text{ est inversible}$$

   et dans ce cas :

$$A^{-1} = \left(\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)\right)^{-1} = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}\left(f^{-1}\right)$$

   et :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}\left(f^p\right) = \left(\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)\right)^p$$

Par analogie avec $Gl_n(\mathbb{K})$, on note $Gl(\mathbb{E})$ l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{E}$. On l'appelle le **groupe linéaire de** $\mathbb{E}$. $(Gl(\mathbb{E}), \circ)$ a une structure de groupe d'élément neutre $\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$, mais $(Gl(\mathbb{E}), +, .)$ n'est pas un $\mathbb{K}$-ev (car non stable pour l'addition).

Corollaire 48 Familles de vecteurs et matrices inversibles
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n, et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors :

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } \mathbb{E} \iff \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F}) \text{ est une matrice inversible}$$

Ce résultat donne en particulier un moyen simple de montrer qu'une matrice est inversible : vérifier que ses colonnes forment une famille libre.

Exemple **:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ne l'est pas.

Théorème 49 Inversibilité à gauche ou à droite d'une matrice
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on a équivalence de :
(i) A est inversible ;
(ii) A est inversible à gauche ;
(iii) A est inversible à droite ;
(iv) A est injective :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}), \quad \left[AX = 0_{n1} \Longrightarrow X = 0_{n1}\right]$$

(v) A est surjective :

$$\forall Y \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}), \quad \exists X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \big/ \ Y = AX$$

Autrement dit si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles, $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

<u>Bilan</u> : Comment montrer qu'une matrice est inversible ? On vient de voir plusieurs méthodes :
• <u>avec calcul de l'inverse</u> :
- s'aider d'un polynôme annulateur pour montrer qu'elle est inversible à gauche ou à droite ;
- méthode du système linéaire ;
• <u>sans calcul de l'inverse</u> :
- montrer que ses sont colonnes libres (ie que ses colonnes représentent une base) ;
- montrer qu'elle représente un automorphisme ;
- montrer qu'elle est injective ;
- remarquer qu'elle est triangulaire et regarder si ses coefficients diagonaux sont nuls.

<u>Rappels sur les polynômes annulateurs.</u>

Les polynômes annulateurs sont utilisés pour étudier l'inversibilité d'une matrice carrée, comme le montre les exemples suivants.

Exemple **:** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 - A^2 = 4A - 3I_n$. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

Exemple **:** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 - 2A^2 - 8A = 0_3$ et en déduire que A n'est pas inversible.

Ils sont aussi utilisés pour calculer des puissances de matrices carrées.

Exemple **:** Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ qui vérifie $A^3 - 2A^2 - 8A = 0_3$.
Le polynôme $X^3 - 2X^2 - 8X$ est annulateur de A. On effectue la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X^2 - 8X$. On sait que le reste sera de degré au plus 2 donc on peut écrire :

$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 8X).Q(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

Pour calculer a, b et c on remarque $X^3 - 2X^2 - 8X = X(X-4)(X+2)$ et donc que -2, 0 et 4 sont racines de $X^3 - 2X^2 - 8X$. On obtient : $a_n = \frac{1}{6}\left(4^{n-1} - (-2)^{n-1}\right)$, $b_n = \frac{1}{3}\left(4^{n-1} - (-2)^n\right)$ et $c_n = 0$ pour $n \geq 1$ (le cas $n = 0$ est différent car $0^0 = 1$).
Donc :

$$\forall n \geq 1, \quad A^n = \frac{1}{6}\left(4^{n-1} - (-2)^{n-1}\right)A^2 + \frac{1}{3}\left(4^{n-1} - (-2)^n\right)A$$

2.7 Rang d'une matrice

Définition 50 Rang d'une matrice
Si $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, on note $\mathscr{F}$ la famille de p vecteurs définie par les colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On appelle alors rang de A, l'entier naturel défini par :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim\left[\mathrm{Vect}(\mathscr{F})\right]$$

Exemple **:** $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Théorème 51 Lien avec les autres notions de rang

1. Si $\mathscr{F}$ est une famille de p vecteurs de $\mathbb{E}$, $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et si A est la matrice de $\mathscr{F}$ dans une certaine base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{E}$, alors :
$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(A)$$
2. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ avec $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et si A est la matrice de f dans des base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{F}$, alors :
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$$
3. Si (S) est un système linéaire, et si A est la matrice de ses coefficients, alors :
$$\mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(A)$$

Démonstration :

1. On pose $n = \dim(\mathbb{E})$ et on considère l'isomorphisme
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array}$$
On note aussi $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$. Alors :
$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{rg}\big(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_p)\big) = \mathrm{rg}(A)$$
où la seconde égalité vient du fait que φ est linéaire injective.
2. Par définition $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\big(f(\mathscr{B})\big)$, et d'après le résultat précédent $\mathrm{rg}\big(f(\mathscr{B})\big) = \mathrm{rg}(A)$.
3. Voir matrices échelonnées.

CQFD □

Théorème 52 Règles de calcul du rang
Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

1. $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p)$.
2. Si $B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}(AB) \leq \min\big(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\big)$.
Si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible : $\mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}(A)$.
Si $C \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est inversible : $\mathrm{rg}(AC) = \mathrm{rg}(A)$.
3. Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang de la matrice

Le résultat principal est le suivant.

Théorème 53 Rang et inversibilité
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :
$$A \text{ est inversible} \iff \mathrm{rg}(A) = n$$

Définition 54 Matrice échelonnée en ligne
Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On dit qu'elle est échelonnée en ligne lorsque :
(i) si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes sont nulles ;
(ii) si le premier terme non nul de la ligne i est en position j, soit la $(i+1)^{\text{ième}}$ est nulle, soit le premier terme non nul de la $(i+1)^{\text{ième}}$ ligne est en position k avec $k > j$.
Autrement dit : d'une ligne à l'autre il y a au moins une inconnue en moins « sur la gauche ».

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est échelonnée en ligne, mais $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

Définition 55 Matrice sous forme réduite de Gauss
Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On dit qu'elle est sous forme réduite de Gauss lorsque :
(i) si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes sont nulles ;
(ii) le premier terme non nul de la ligne i est en position i (ie sur la diagonale).
Autrement dit : d'une ligne à l'autre il y a exactement une inconnue en moins « sur la gauche ».

L'algorithme du pivot de Gauss effectué sur les lignes d'une matrice la transforme en une matrice sous forme réduite de Gauss.

Proposition 56 Lien entre matrice sous forme réduite de Gauss et matrice échelonnée en ligne
Une matrice sous forme réduite de Gauss et matrice échelonnée en ligne.
La réciproque est fausse.

Exemple : $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est sous forme réduite de Gauss donc échelonnée en ligne,
et $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est échelonnée en ligne mais non sous forme réduite de Gauss.

Théorème 57 Rang d'une matrice échelonnée en ligne
Si $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ est échelonnée en ligne, alors $\operatorname{rg}(A)$ est égale au nombre de lignes non nulles.

Exemple : $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 3.$

Calcul pratique du rang : Si on ne trouve pas de relations entre les colonnes qui simplifient les calculs, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour transformer A en une matrice sous

forme réduite de Gauss (ou échelonnée en ligne). On déduit alors son rang, puisque les opérations élémentaires laissent invariant le rang d'une matrice.

Exemple **:** $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2.$

Mais il ne faut pas perdre de vue qu'on peut souvent conclure sans le pivot de Gauss (dont les calculs sont lourds) : $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 0_{n-2} & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 2.$

Le résultat suivant ne sera pas démontré.

Théorème 58 Rang de la transposée
Si $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}\left({}^tA\right) = \operatorname{rg}(A)$.

Application au calcul du rang : On peut effectuer le pivot de Gauss sur les colonnes de A pour calculer son rang. On dira qu'une matrice A est échelonnée en colonnes, si ${}^tA$ est échelonnée en linges. La rang d'une matrice échelonnée en colonnes est égal au nombre de colonnes non nulles.

Exemple **:** $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2.$

3 Exercices

Applications linéaires

Exercice 1 Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ trois $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$. Montrer que : $g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 2 Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et f, g deux endomorphismes de $\mathbb{E}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = f\big(\mathrm{Ker}(g \circ f)\big)$.
3. On suppose que f et g commutent i.e. $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f.

Exercice 3

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x,y,z) = (x^2+z, y+z, z+1)$. f est-elle linéaire ?
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $\varphi(x,y,z,t) = (x-y+t, 2x+y-z, y+z)$. Montrer que φ est linéaire et déterminer $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et $\mathrm{Im}\,\varphi$.

Exercice 4 Vérifier que les applications suivantes sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et déterminer leur noyau et leur image :

1. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \varphi(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$
2. $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \psi(u) = (u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$

Exercice 5 Vérifier que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leur noyau et leur image :

1. $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \longmapsto & \psi(f) = g \quad \text{où } g(x) = f(x) + f(-x) \end{array}$
2. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(1) \end{array}$

Exercice 6 On considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^2-1)P'' + XP' - 4P \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$. Déterminer $\deg\Big(\varphi(P)\Big)$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

Exercice 7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et D l'application

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

1. Vérifier que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On pose $\Gamma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} + D + D^2 + \cdots + D^n$. Montrer que Γ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer son application réciproque.

Exercice 8 Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_{\mathbb{E}} = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme et donner f^{-1} en fonction de f.

2. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) de scalaires telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = a_n \mathrm{id}_{\mathbb{E}} + b_n f$. En déduire f^n en fonction de n.

Exercice 9 Soient $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{E}', \mathbb{F}'$ des $\mathbb{K}$-ev, φ un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}'$, et ψ un isomorphisme de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{F}'$. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{E}',\mathbb{F}') \\ & f & \longmapsto & \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{array}$$

est bien définie et est un isomorphisme.

Projections

Exercice 10 Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$.
On considère les sev de $\mathbb{E}$ suivant : $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\left((1,0,0)_{\mathscr{B}}, (1,1,1)_{\mathscr{B}}\right)$ et $\mathbb{G} = \mathrm{Vect}\left((1,2,0)_{\mathscr{B}}\right)$.
Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$, et déterminer l'expression analytique du projecteur sur $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$, et de la symétrie par rapport à $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$.

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x,y,z) = (x+z, y+z, 0)$. Montrer que f est un projecteur et préciser son support et sa direction.

Exercice 12 Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.

1. Montrer que p et q ont même image si et seulement si $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que p et q projettent selon la même direction.

Exercice 13 Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$.
2. Dans ce cas, vérifier que : $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$ et $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

Applications linéaires en dimension finie

Exercice 14 Soit $\theta : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par : $\theta(P) = P - (X+1)P'$. Montrer que θ est un endomorphisme et déterminer une base de son noyau et de son image.

Exercice 15 Polynômes de Lagrange
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels 2 à 2 distincts. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & \varphi(P) = \left(P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)\right) \end{array}$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. En déduire que si $y_0, \ldots, y_n$ sont des réels donnés alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad P(x_i) = y_i$$

3. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on note L_j l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad L_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

   Vérifier que $\mathscr{B} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, quelles sont les coordonnées de P dans cette base ?

Exercice 16 Surjectivité en dimension finie
Soit $\Delta : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X]$ l'application définie par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Vérifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ et que si P est un polynôme non constant alors $\deg\big(\Delta(P)\big) = \deg(P) - 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\ker\big(\Delta_{|\mathbb{C}_{n+1}[X]}\big)$ et en déduire que Δ induit une surjection de $\mathbb{C}_{n+1}[X]$ sur $\mathbb{C}_n[X]$.
3. En déduire que Δ est surjective de $\mathbb{C}[X]$ sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 17 Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev tels que $\mathbb{F}$ est de dimension finie.

1. Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. Montrer que :
$$\big|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)\big| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$
2. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{E}$ tels que $f \circ g = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ et $f+g$ est un automorphisme de $\mathbb{E}$. Montrer que $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = \dim \mathbb{E}$.

Exercice 18 Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$. Établir que :
$$\mathbb{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2) \text{ et } \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$$

Représentations matricielles

Exercice 19 Donner la matrice relativement aux base canoniques, pour les applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{R}_2[X] \longmapsto P - X^3 P' \in \mathbb{R}_4[X]$
2. $f : P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto \big(P(0), P'(0), P''(0)\big) \in \mathbb{R}^3$
3. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tq $f(1,2) = (0,5,8)$, $f(2,3) = (5,0,1)$

Exercice 20

1. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
On pose $u_1 = (1,-1,1)$, $u_2 = (1,0,0)$ et $u_3 = (0,-1,2)$. Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base. Que remarquez-vous ?
2. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
On pose $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$ et $v_3 = (1,-1,1)$. Montrer que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de g dans cette base. Que remarquez-vous ?

Exercice 21

1. Montrer que $\mathscr{B} = \big(1, X-1, (X-1)^2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = 2(X+1)P - (X^2 - 2X+1)P'$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, et déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 22

1. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(P) = \big(P(0), P'(0), P(1)\big)$. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer φ^{-1} (on pourra utiliser les représentations matricielles).

Exercice 23 Dans chacun des cas suivants on définit une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ par sa matrice relativement aux bases canoniques. Déterminer $rg(f)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 9 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 24 Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.
On suppose que f est <u>nilpotent d'ordre p</u> : c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ et $f^{p-1} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$.
Montrer que si $\overrightarrow{u} \in \mathbb{E} \backslash \{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\}$, alors la famille $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u}, f\left(\overrightarrow{u}\right), \ldots, f^{p-1}\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$ est libre.
Dans le cas $p = n$, donner la matrice de f dans cette base (dans ce cas, on dit que f est un endomorphisme cyclique).

Chapitre 20

Intégrales généralisées

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Cas d'un intervalle $[a, b[$

On suppose que :
- $a \in \mathbb{R}$
- $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$
- $a < b$.

Définition 1 Intégrale impropre en b

Si f est continue sur $[a, b[$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en b.

Important : Remarquons que pour tout $x \in [a, b[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
Par contre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'existe pas (à priori) puisque f n'est pas continue sur le segment $[a, b]$.

Si $b = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est toujours impropre en $+\infty$.

Définition 2 Intégrale convergente

Si f est continue sur $[a, b[$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente lorsque $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Dans ce cas on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est impropre en $+\infty$, converge et est égale à 1.

Exemple **:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ est impropre en 1, converge et est égale à 2.

Exemple **:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}$ est impropre en 1 et diverge.

<u>Vocabulaire</u> :

• les intégrales $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, pour $x \in [a,b[$, s'appellent intégrales partielles de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$;
• lorsque $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, les intégrales $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ s'appellent restes de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$;
• étudier la nature d'une intégrale, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente ;
• deux intégrales impropres sont dites de même nature lorsqu'elles sont toutes les convergentes ou toutes les deux divergentes.

Proposition 3 Reste d'une intégrale convergente

Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors pour tout $x \in [a,b[$, le reste $\int xbf(t)$ converge et vérifie :

$$\lim_{x\to b^-} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

On a donc des résultats très proches de ceux du chapitre sur les séries convergentes.

⚠ Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f\,\mathrm{d}t$ converge, on ne peut pas dire que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ (donc pas d'analogie avec les séries convergentes, pour lesquelles le terme général a pour limite 0). Comme le montre l'exercice suivant, le problème vient du fait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$ peut ne pas exister.

Exemple **:** Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et f a une limite en $+\infty$ (ce qui est le cas par exemple si f est monotone), alors cette limite est égale à 0.

Étudions maintenant le cas des intégrales « faussement impropres ».

Définition 4 Intégrale faussement impropre

Si f est continue sur $[a,b]$, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en b. Plus précisement, cette intégrale converge au sens précédent, elle est égale à l'intégrale définie au chapitre sur l'intégrale d'une fonction continue sur un segment :

$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{intégrale sur un segment}}$$

On rencontre en particulier cette situation lorsque f est continue sur $[a,b[$, et se prolonge par continuité en b.

Exemple **:** $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0, et est donc convergente.

1.2 Cas d'un intervalle quelconque

On suppose ci-dessous que $b \in \mathbb{R}$ et que $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$.

Définition 5 Cas d'un intervalle $]a, b]$

Si f est continue sur $]a, b]$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en a. Elle est dite convergente lorsque $\lim\limits_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Dans ce cas on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On dit aussi que f est intégrable sur $]a, b]$.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge ou que f n'est pas intégrable sur $]a, b]$.

De même que précédemment, on définit les notions de reste, de fausse impropreté etc...En particulier, si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge on a :

$$\lim_{x \to a^+} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exemple : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est impropre en 0 et converge.

Exemple : $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0 et converge.

Exemple : $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est impropre en 0 et diverge.

Exemple : $\int_0^{\mathrm{e}} t^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0 et donc converge.

Dans la définition ci-dessous, on prend $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$, et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

Définition 6 Cas d'un intervalle $]a,b[$

Si f est continue sur $]a,b5$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est doublement impropre en a et b. On alors équivalence des propositions :

(i) $\exists c_0 \in]a,b[/ \int_a^{c_0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{c_0}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent

(ii) $\forall c \in]a,b[, \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent

Dans ce cas, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou que f est intégrable sur $]a,b[$) et on a, pour tout $c \in]a,b[$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+} \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to b^-} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge ou que f n'est pas intégrable sur $]a,b[$.

Dans le cas convergent on a aussi la formule :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to a^+}\left(\lim_{y\to b^-}\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{y\to b^-}\left(\lim_{x\to a^+}\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Exemple **:** $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est doublement impropre et diverge.

<u>Notation</u> : si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $a<b$, on pose : $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Terminons par une dernière généralisation.

Définition 7 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle privé d'un nombre fini de points

Si f est continue sur $]a_1,a_2[\cup]a_2,a_3[\cup\cdots\cup]a_{p-1},a_p[$, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge lorsque les intégrales $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $k \in [\![1,p-1]\!]$. Dans ce cas on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2 Propriétés fondamentales des intégrales généralisées

Ce sont les mêmes que celles de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

2.1 Relation de Chasles pour les intégrales généralisées

On se donne $(a,b,c) \in \overline{R}^3$.

Théorème 8 Relation de Chasles pour les intégrales généralisées
On a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

dès qu'au moins deux de ces intégrales convergent, la troisième étant nécessairement convergente.
Si on sait qu'une de ces intégrales diverge et une deuxième converge, alors la troisième diverge.
Si on sait que deux divergent, on ne peut rien dire sur la troisième.

Insistons sur le fait qu'on ne suppose pas que $a < c < b$.

Si f est continue sur $[a,b[$ et $[c,b[$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont impropre en b et de même nature. La nature d'une intégrale généralisée ne dépend donc que de la borne en laquelle elle est impropre. Là encore on peut faire un parallèle avec les séries (la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes de la somme).

Exemple **:** $\int_0^{\mathrm{e}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge, puisqu'on a vu que $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2.2 Linéarité des intégrales généralisées

On se donne $(a,b) \in \overline{R}^2$.

Théorème 9 Linéarité des intégrales généralisées
Si λ, μ sont deux nombres réels, alors :

$$\int_a^b \big(\lambda.f(t) + \mu.g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda.\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu.\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

dès qu'au moins deux de ces intégrales convergent, la troisième étant nécessairement convergente.
Si on sait qu'une de ces intégrales diverge et une deuxième converge, alors la troisième diverge.
Si on sait que deux divergent, on ne peut rien dire sur la troisième.

⚠ Par exemple on ne peut pas écrire que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$.

Corollaire 10 Linéarité des intégrales généralisées

L'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions f définies et continues sur $[a,b[$ telles que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.
De plus l'application :

$$\begin{array}{rccc} I: & \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathscr{E}$.

On a les mêmes résultats en remplaçant $[a,b[$ par $]a,b]$ ou $]a,b[$.

2.3 Positivité des intégrales convergentes

Théorème 11 Positivité (stricte) des intégrales convergentes

1. Positivité : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b[$ (resp. $]a,b]$ ou $]a,b[$) tel que $\boxed{a \leq b}$. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on a alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

2. Stricte positivité : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b[$ tel que $\boxed{a < b}$. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on a alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \forall t \in [a,b[,\ f(t) = 0 \quad \text{(ie } f \text{ est l'application nulle sur } [a,b[)$$

On a le même résultat avec $]a,b]$ ou $]a,b[$.

3. Stricte positivité (contraposée) : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b[$ tel que $\boxed{a < b}$. On suppose que f est différente de l'application nulle sur $[a,b[$:

$$\exists t_0 \in [a,b[/ \ f(t_0) \neq 0$$

Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on a alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

On a le même résultat avec $]a,b]$ ou $]a,b[$.

Que se passe-t-il si $b < a$? Réponse : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq 0$.

On retiendra donc que pour appliquer la positivité des intégrales généralisées, il faut vérifier que les « bornes sont dans le bon sens » ET que l'intégrale en jeu est convergente.

2.4 Croissance des intégrales convergentes

Théorème 12 Croissance des intégrales convergentes
Soient f, g sont deux fonctions continues, d'intégrales convergentes sur $[a,b[$ tel que $\boxed{a \leq b}$.
On suppose que :

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t) \leq g(t)$$

Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Encore une fois, il ne faudra pas oublier de vérifier que « les bornes sont dans le bon sens » ET que les intégrales en jeu sont convergentes.

2.5 Calcul des intégrales généralisées

Les techniques sont essentiellement les mêmes que celles utilisées pour le calcul de l'intégrale sur un segment.

2.5.1 Intégration par parties

⚠ Pour l'intégration par parties, aucun résultat n'est au programme pour les intégrales généralisées. Il faut donc systématiquement repasser à l'intégrale sur un segment, puis passer à la limite pour obtenir une formule avec des intégrales généralisées.

Exemple **:** Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

2.5.2 Changement de variables

⚠ Pour le changement de variable, on peut appliquer la même méthode. On peut aussi utiliser le théorème suivant dont les hypothèses sont plus restrictives (on suppose en plus le changement de variable bijectif et strictement monotone).

Théorème 13 Changement de variables dans une intégrale généralisée
Si f est continue sur $[a,b[$ et si φ est une bijection strictement croissante de $[a,b[$ sur $[\alpha,\beta[$ (resp. bijection strictement décroissante de $[a,b[$ sur $]\beta,\alpha]$), alors les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\,\mathrm{d}t\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence elles sont égales.

On a le même type de résultat en remplaçant $[a,b[$ par $]a,b]$ ou $]a,b[$.

Exemple **:** Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 14 Cas d'une fonction paire/impaire

1. Fonction paire. Si f est continue sur $]-a,a[$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, ou encore si et seulement si $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$$
car $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Fonction impaire. Si f est continue sur $]-a,a[$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, ou encore si et seulement si $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
car $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour des exemples, voir la section sur les lois normales.

3 Nature d'une intégrale généralisée d'une fonction positive

Comme pour les séries, l'étude des fonctions positives va nous donner plusieurs critères pour étudier la nature d'une intégrale généralisée.

3.1 Utilisation des intégrales partielles

Rappelons que si f est continue sur $[a,b[$ la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $[a,b[$ de dérivée égale à f.

Théorème 15 Utilisation des intégrales partielles

Si f est continue et positive sur $[a,b[$ alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

Dans ce cas le plus petit majorant est $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

On a le même type de résultat en remplaçant $[a,b[$ par $]a,b]$ ou $]a,b[$.

Exemple **:** $\displaystyle\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \mathrm{d}t$ converge.

Exemple **:** Si les bornes a et b sont finies, et si f est continue, positive, et majorée sur $[a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

⚠ Avec des bornes infinies, on peut avoir f continue positive majorée et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ divergente : considérer par exemple la fonction constante égale à 1 et l'intervalle $[1,+\infty[$.

3.2 Critères de comparaison des fonctions positives

Théorème 16 Comparaison par inégalité
Si f et g sont continues $[a,b[$ et vérifient $\forall t \in [a,b[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$ alors :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

et dans ce cas : $0 \leq \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
D'autre part, par contraposée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \Longrightarrow \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

⚠ Ne pas confondre avec la propriété de croissances des intégrales généralisées, dans laquelle on suppose dès le départ la convergence des deux intégrales.

<u>Rédaction</u> : On rédige de la manière suivante : on a $\forall t \in [a,b[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc d'après le théorème comparaison par inégalité pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
⚠ ATTENTION, la rédaction suivante est fausse :
on a $\forall t \in [a,b[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$, donc $0 \leq \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc d'après le théorème comparaison par inégalité pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
En effet, on ne peut pas utiliser la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ dans un calcul tant que la convergence n'a pas été justifiée.

Exemple **:** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right) \mathrm{d}t$ converge.

Exemple : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} \mathrm{d}t$ diverge.

Théorème 17 Comparaison par négligeabilité
Si f et g sont continues sur $[a,b[$, **positives au voisinage de b** et vérifient $f(t) \underset{t\to b}{=} o\big(g(t)\big)$ alors :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Par contraposée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \Longrightarrow \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

Exemple : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 18 Comparaison par équivalence
Si f et g sont continues sur $[a,b[$ et vérifient $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, avec g **de signe constant au voisinage de b**, alors :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

D'autre part, par contraposée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \Longleftrightarrow \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

Exemple : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right) \mathrm{d}t$ diverge.

On a le même type de résultats en remplaçant $[a,b[$ par $]a,b]$ ou $]a,b[$.

3.3 Convergence absolue

Définition 19 Convergence absolue
Si f est continue sur $[a,b[$, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente lorsque $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

On est ainsi ramené à une fonction positive.

On peut donner la même définition en remplaçant $[a,b[$ par $]a,b]$ ou $]a,b[$.

Théorème 20 Convergence absolue implique convergence
Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration : Remarquer que $f(t) = |f(t)| - \big(|f(t)| - f(t)\big)$.

CQFD □

Exemple : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ converge.

⚠ La réciproque du théorème est fausse : nous verrons en TD que l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais non absolument convergente.

Corollaire 21 Inégalité triangulaire pour les intégrales généralisées
Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

4 Intégrales de références

4.1 Intégrales de Riemann

Théorème 22 Intégrales de Riemann en $+\infty$
Pour tout $a > 0$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
Dans ce cas la convergence est absolue.

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ converge et $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ diverge.

On en déduit un critère très utile pour étudier la nature d'une intégrale. Malheureusement il ne figure pas au programme officiel, il faut donc le redémontrer à chaque fois en invoquant le critère de comparaison par négligeabilité pour les fonctions positives.

Corollaire 23 Règle du $t^\alpha f(t)$ en $+\infty$
On suppose f **positive au voisinage de** $+\infty$.
- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors f est d'intégrale convergente au voisinage de $+\infty$.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors f n'est pas d'intégrale convergente au voisinage de $+\infty$.

Exemple **:** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)\mathrm{e}^{-t}}{t^5}\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 24 Intégrales de Riemann en a
Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b > a$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
Dans ce cas la convergence est absolue.
En particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, et la convergence est absolue.

Exemple **:** $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^3}$ diverge et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge.

Corollaire 25 Règle du $t^\alpha f(t)$ en 0
On suppose f **positive au voisinage de** 0.
- S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha f(t) = 0$ alors f est d'intégrale convergente au voisinage de 0.
- S'il existe $\alpha \geq 1$ tel que $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors f n'est pas d'intégrale convergente au voisinage de 0.

Exemple **:** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

⚠ On peut retenir que $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à -1. Mais ce résultat n'est pas au programme, il faut donc être capable de le redémontrer à chaque fois.

4.2 Intégrales utiles en probabilités

4.2.1 Lois exponentielles

Théorème 26 Densité d'une loi exponentielle
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.
Dans ce cas, elle est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

Théorème 27 Moments d'une loi exponentielle
Si $\lambda > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il ne faut pas connaître sa valeur, mais retenir qu'elle se calcule avec n intégrations par parties (où on dérive t^n).

4.2.2 Lois normales

Théorème 28 Densité d'une loi normale
L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à $\sqrt{2\pi}$. Elle est appelée intégrale de Gauss.

Exemple **:** Montrer la convergence et calculer $\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

Théorème 29 Moments d'une loi exponentielle
L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si n est impair elle est nulle. Si n est pair, elle se calcule par récurrence à l'aide d'intégrations par parties.

Exemple **:** Convergence et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ et de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

4.3 Méthodologie pour étudier la nature d'une intégrale généralisée

• On commence par définir la fonction à intégrer. On précise soigneusement ses ensembles de définition et de continuité.

• Identifier la (resp. les) borne(s) en laquelle (resp. lesquelles) l'intégrale est impropre. Dans le cas d'une intégrale impropre aux deux bornes, couper l'intégrale en deux et faire deux études.

• Dans le cas d'une borne finie : à l'aide d'un calcul de limite, déterminer si la fonction se prolonge par continuité (fausse impropreté).

• Si la fonction change de signe, considérer la valeur absolue de cette fonction.

• Chercher un équivalent simple.

• Si cela ne suffit pas, tester la règle du $t^\alpha f(t)$.

• Dans les cas plus complexes, modifier l'intégrale à étudier à l'aide d'une intégration par parties ou d'un changement de variables.

• Dans de rares cas, on sait déterminer une primitive de la fonction à intégrer, il suffit alors de calculer la limite des intégrales partielles .

Noter que seules les deux dernières méthodes permettent aussi de calculer la valeur de l'intégrale étudiée (en cas de convergence).

5 Exercices

Exercice 1 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\arctan(t^2)\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\tan(\sqrt{t})}{\ln\left(\cos(\sqrt{t})\right)}\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin(t)}}\,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$
11. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
12. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
13. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
14. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
15. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t$
16. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(t)\right)\mathrm{d}t$
17. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{\sqrt{t}(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$
18. $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ où $P\in\mathbb{R}[X]$
19. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$

Exercice 3 Montrer la convergence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$ (*remarquer que* $1=(1+t^2)-t^2$)
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$. On cherchera $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $\displaystyle\frac{1}{1+t^3}=\frac{a}{t+1}+\frac{bt+c}{t^2-t+1}$.

Exercice 4 On considère l'intégrale :

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

1. Justifier la convergence de I.
2. Factoriser le polynôme X^4+1 dans $\mathbb{R}[X]$.
3. À l'aide d'une changement de variable, montrer que $\displaystyle I=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$.
4. En développant $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^4+1}\mathrm{d}t$, calculer I.

Exercice 5 Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que les intégrales de Bertrand $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
2. Montrer que les intégrales de Bertrand $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$). *On pourra procéder directement ou se ramener à la question précédente par changement de variable.*
3. Que dire de $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$?

Exercice 6

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.
2. Montrer que la fonction sin induit une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$, et que la bijection réciproque arcsin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée $\arcsin'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.
3. Si f est une fonction continue sur $[-1,1]$, que dire de $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$?

Exercice 7 (La fonction Gamma d'Euler) La fonction Γ d'Euler est définie par la formule $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de Γ est l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Vérifier que, pour tout $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$. Calculer aussi la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 8 (Intégrale de Dirichlet) On propose de montrer que l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente et de calculer sa valeur.

1. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer qu'elle est absolument convergente.
   (b) En découpant $\mathbb{R}^+$ en sous-intervalles du type $[k\pi,(k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, montrer qu'elle ne converge pas absolument.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}$.
   (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et calculer I_0.
   (b) Si φ est une fonction C^1 sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin\big((2n+1)t\big) = 0$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = 0$.
   (d) Conclure sur la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
3. Vérifier que $I_0 = \sqrt{\pi}$.
4. Déterminer une expression de I_{2n+1} et I_{2n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire la valeur des intégrales $J_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 (Fonction définie par une intégrale impropre) 1. Montrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On définit alors la fonction $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty$ et déterminer $f'(x)$, pour $x > 0$.
3. (a) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ a une limite finie à droite en 0.
   (b) Vérifier que : $\forall x > 0$, $g(x) = -\ln(x) - f(x) + f(1)$.
   (c) En déduire que : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 11 (Contre-exemple) On considère la fonction nulle sauf sur les intervalles centrés en $n \in \mathbb{N}$, de largeur $\dfrac{1}{2^n}$ où la fonction est une dent de scie de hauteur 1 :

$$\forall x \in \left[n - \frac{1}{2^{n+1}}, n\right], \quad f(x) = 1+2^{n+1}(x-n) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left[n, n + \frac{1}{2^{n+1}}\right], \quad f(x) = 1+2^{n+1}(n-x)$$

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument et que f n'est pas de limite nulle en $+\infty$.

Chapitre 21

Variables aléatoires réelles à densité

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Définition

On se donne une espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Rappelons qu'une variable aléatoire réelle X est une fonction $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $[X \leq x] = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}$ est dans la tribu $\mathscr{A}$.

Définition 1 Variable aléatoire réelle à densité
Soit X une variable aléatoire réelle (VAR) définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dit que X est une variable à densité lorsque sa fonction de répartition F_X vérifie :
(i) F_X est continue sur $\mathbb{R}$;
(ii) F_X est C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points, ie qu'il existe des réels $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que F_X est C^1 sur $\mathbb{R} \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Exemple **:** La VAR X dont la fonction de répartition est $F_X(x) = x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$ est une VAR à densité.

Exemple **:** Une VARD X de loi $\mathscr{B}(p)$ n'est pas à densité.

En fait on a un résultat plus général : **une variable aléatoire discrète n'est jamais une variable aléatoire à densité**, puisque la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est discontinue en au moins un point (plus précisément en tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$).

Il vient naturellement la question suivante : étant une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, à quelle condition est-elle la fonction de répartition d'une VAR à densité X ? La réponse est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2 Caractérisation d'une fonction de répartition d'une VAR à densité
Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Alors F est la fonction de répartition d'une VAR à densité si, et seulement si, elle vérifie les propriétés suivantes :
(i) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$;
(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_x(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$;
(iii) F est continue sur $\mathbb{R}$;
(iv) F est C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

***Exemple* :** La fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1-\sqrt{-x}}{2}\mathbb{1}_{[-1,0[} + \dfrac{1+\sqrt{x}}{2}\mathbb{1}_{[0,1]} + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}$ est la fonction de répartition d'une VAR à densité X.

1.2 Densités

Définition 3 Fonction densité
Soit X une VAR à densité, de fonction de répartition F_x C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{x_1,\dots,x_n\}$.. On dit qu'une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une densité de X, lorsque :
(i) f est positive sur $\mathbb{R}$: $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$
(ii) f est égale à F'_X sur $\mathbb{R}\backslash\{x_1,\dots,x_n\}$ privé d'un nombre fini de points.

⚠ En particulier, avec les mêmes notations, la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par
$f(x) = \begin{cases} F'_X(x) & \text{si } x\in\mathbb{R}\backslash\{x_1,\dots,x_n\} \\ 0 & \text{si } x\in\{x_1,\dots,x_n\} \end{cases}$ est une densité de X.
Aux points $\{x_1,\dots,x_n\}$, on choisi arbitrairement que f prend la valeur 0, mais on aurait pu choisir toute autre valeur.
On peut aussi choisir d'autre valeurs abritraires prises f en un nombre fini de points de $\mathbb{R}\backslash\{x_1,\dots,x_n\}$, mais ceci n'a pas vraiment d'intéret en pratique.

⚠ Une VAR à densité X a donc une **infinité de densités** ; mais **elles sont toutes égales à la dérivée de la fonction de répartition sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points**.

***Exemple* :** Soit X une VAR de fonction de répartition F définie par $F(x) = \dfrac{1-\sqrt{-x}}{2}\mathbb{1}_{[-1,0[} + \dfrac{1+\sqrt{x}}{2}\mathbb{1}_{[0,1]} + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}$. Alors X est à densité et une densité de X est donnée par la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{4\sqrt{|x|}}\mathbb{1}_{[-1,1]} \end{array}$$

La fonction de répartition étant supposée C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points, les densités héritent d'une certaine régularité, précis ée dans la proposition suivante.

Proposition 4 Régularité d'une densité
Si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une densité d'une VAR X, alors f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

Une densité caractérise la fonction de répartition et donc la loi de la variable aléatoire, comme le précise le théorème suivant.

Théorème 5 Une densité caractérise la fonction de répartition
Soit X une VAR à densité et f_X une densité de X. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

où il est sous-entendu que l'intégrale converge.

Démonstration : Fixons $x \in \mathbb{R}$. Par définition, il existe un nombre fini de points $a_1 < \cdots < a_p$ tels que f_x est continue sur $]-\infty, x[\setminus\{a_1, \ldots, a_p\}$ et est égale à F'_X sur cet ensemble.
Soit $i \in [\![1, p-1]\!]$. Pour tout segment $[u, v]$ inclus dans $]a_i, a_{i+1}[$, f_x est continue sur $[u, v]$ et :

$$\int_u^v f_X(t)\,\mathrm{d}t = F_X(v) - F_X(u)$$

Comme F_X est continue sur $\mathbb{R}$, cette intégrale a une limite quand $u \to a_i$ et $v \to a_{i+1}$, égale à $F_X(a_{i+1}) - F_X(a_i)$. Ceci prouve que $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_X(t)\,\mathrm{d}t = F_X(a_{i+1}) - F_X(a_i)$$

De même si on prend $[u, v]$ dans $]-\infty, a_1[$ et si on fait tendre $u \to -\infty$ et $v \to a_1$, on obtient que $\displaystyle\int_{-\infty}^{a_1} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{a_1} f_X(t)\,\mathrm{d}t = F_X(a_1) - \lim_{u \to -\infty} \mathbb{F}_X(u) = F_X(a_1) - 0 = F_X(a_1)$$

Toujours de manière analogue, on montre que $\displaystyle\int_{a_p}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{a_p}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = F_X(x) - F_X(a_p)$.
Finalement, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{a_1} f_X(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_1}^{a_2} f_X(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{a_{p-1}}^{a_p} f_X(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_p}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t \\
&= F_X(a_1) + F_X(a_2) - F_X(a_1) + \cdots + F_X(a_p) - F_X(a_{p-1}) + F_X(x) - F_X(a_p) = F_X(x)
\end{aligned}$$

CQFD □

Corollaire 6 Une densité caractérise la loi
Si X est une VAR à densité et f_X une densité de X, alors pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ on a :

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, && \mathbb{P}(X = x) = 0 \\
&\forall x \in \mathbb{R}, && \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t \\
&\forall x \in \mathbb{R}, && \mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X > x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a :

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

⚠ On connaît donc la loi de X dès qu'on connaît une densité f_X.

Le fait que $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout réel x, donne encore une différence fondamentale avec les VAR discrètes. On ne calcule plus la probabilité que X prenne une valeur donnée (car elle est toujours nulle), mais la probabilité que X prenne une valeur appartenant à un certain intervalle.

Nous avons vu qu'une fonction densité est une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points. Une fonction densité a aussi la propriété suivante.

Proposition 7 Intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ d'une fonction densité
Si f_X est une densité d'une VAR à densité X, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Démonstration : Cela découle du simple fait que :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

CQFD □

Réciproquement, on peut se demander à quelle condition une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction densité d'une VAR à densité X ? Nous allons voir que les fonctions densités sont caractérisées par les trois propriétés énoncées précédemment.

Théorème 8 Caractérisation des fonctions densités
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Alors f est une densité d'une VAR à densité X si, et seulement si, elle vérifie les conditions :
(i) f est positive sur $\mathbb{R}$;
(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points ;
(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à 1.
Dans ce cas la fonction de répartition de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : On définit une fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On va appliquer le théorème 2 qui garantira que F est la fonction de répartition d'une VAR à densité X, puis vérifier que f est bien une densité de cette VAR X.
• La positivité de f donne facilement la croissance de F.
• Notons $a_1 < \cdots < a_n$ les points de discontinuité de f. On pose aussi $a_0 = -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$. Fixons $i \in [\![0, n]\!]$ et $c_i \in]a_i, a_{i+1}[$. On a pour $x \in]a_i, a_{i+1}[$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_i}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Le premier terme est une constante, et le deuxième est l'expression d'une fonction de classe C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$ de dérivée f (puisque f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$. On en déduit que F est C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$ de dérivée f.
À ce stade on a donc montré que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points, et qu'en dehors de ces points sa dérivée est f.
• F est donc continue sur $\mathbb{R}\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}$ (car dérivable). Pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $x \in]a_i, a_{i+1}[$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_i}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et comme $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on a :

$$\lim_{x \to a_i^+} F(x) = \int_{-\infty}^{c_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_i}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t = F(a_i)$$

donc F est continue à droite en a_i. La continuité à gauche s'obtient de la même manière.
On a donc F croissante, continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points. F est donc, d'après le théorème 2, la fonction de répartition d'une VAR à densité X. De plus f est positive et est égale à F' sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points : c'est donc une densité de X.

CQFD □

Exemple : f définie par $f(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}$ est une densité d'une VAR X.

Exemple **:** Déterminer la valeur du réel a pour que la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{a}{\sqrt{t-1}} 1_{]1,2]}(t)$ soit une densité d'une VAR X.

On voit sur ces exemples qu'on ne cherchera pas à préciser la VAR X, et encore moins l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sur lequel elle est définie.

1.3 Interprétation des fonctions densités

Supposons qu'on est représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une densité f d'une VAR X. Pour tout $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $a < b$, la probabilité $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ est égale à l'aire de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe $(0x)$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Il existe une autre interprétation d'une fonction densité f. On a vu qu'en tout point a où la fonction de répartition F est dérivable, on a $f(a) = F'(a)$. On en déduit que pour h très proche de 0, la probabilité $\mathbb{P}(a \leq X \leq a+h)$ est approximativement égale à $f(a).h$.

Nous allons voir que les intervalles sur lesquels une densité est nulle, renseignent sur les valeurs prises par la variable aléatoire.

On rappelle que si A est une partie de $\mathbb{R}$ et X une VAR, alors on dit que X est presque sûrement à valeurs dans A lorsque : $\mathbb{P}(X \in A) = 1$.

Théorème 9 Valeurs prises par une VAR à densité
Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, et une X une VAR à densité de fonction de répartition F_x et de densité f_X. On a équivalence de :
(i) X est p.s. à valeurs dans $[a,b]$;
(ii) f_X est nulle sur $]-\infty, a[$ et sur $]b, +\infty[$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points) ;
(iii) F_X est nulle sur $]-\infty, a]$ et égale à 1 sur $[b, +\infty[$.

Pour une VAR à densité, on peut aussi dire que X est p.s. à valeurs dans $]a,b]$, ou $[a,b[$, ou $]a,b[$.

On peut remarquer que le fait que $(i) \Longleftrightarrow (iii)$ est en fait valable pour toute VAR.

Exemple **:** Si X est une VAR de densité f définie par $f(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}} 1_{]1,2]}(t)$, alors X est p.s. à valeurs dans $[1,2]$. De plus, sa fonction de répartition F_X est nulle sur $]-\infty, 1]$ et égale à 1 sur $[2, +\infty[$.

1.4 Blian sur les fonctions de répartitions et fonctions densités

Il ne faut pas confondre ces fonctions. Nous rappelons leurs principales propriétés dans le tableau suivant.

	Fonction de répartition F_X	**Densité f_X**
Régularité	C^0 sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points	C^0 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points
Monotonie	croissante sur $\mathbb{R}$	Néant
Limites	$\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$	Néant
Encadrements	$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$	$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) \geq 0$
Intégrale sur $\mathbb{R}$	Néant	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 1$
Formules	$F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t$	$f_X(x) = F'_X(x)$ si F_X dérivable en x, $f_X(x) =$ une autre valeur sinon

Terminons par un rappel des principales méthodes.

Rédaction : Comment montrer qu'une VAR X est à densité ?
• On calcule $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
• On montre qu'elle est C^1 sauf en un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_n$.
• On vérifie que F_x est C^0 à gauche et à droite aux points $x_1, \ldots, x_n$; on sait alors qu'elle est C^0 sur $\mathbb{R}$.

Rédaction : Si on sait que X est à densité, comment calculer une densité de X ?
• On calcule $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (si cela n'a pas déjà été fait).
• En tout $x \in \mathbb{R}$, où F_X est dérivable on pose $f_X(x) = F'_X(x)$. Aux autres points, on prend n'importe quelle valeur : par exemple on peut prolonger f_X par continuité (si cela est possible).
On sait alors que la fonction f_X est une densité de X.

La fonction de répartition joue donc un rôle central dans l'étude des VAR à densité.

1.5 Transfert de loi

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

On considère une VAR $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de densité f_X et une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) \subseteq \mathscr{D}_f$. On a alors le schéma de composition :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "f\circ X"'] & \end{tikzcd}$$

On admettra que l'application $Y = \varphi \circ X$ est aussi une VAR sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On la note plus simplement $Y = \varphi(X)$.

Connaissant une densité f_X de X et l'expression de la fonction φ, nous souhaiterions déterminer la loi de la VAR $Y = \varphi(X)$.

⚠ Comme nous le verrons sur les exemples, il est possible que Y ne soit plus une VAR à densité (dans ce cas ce sera une VARD conformément au programme).

On commence par déterminer les valeurs prises par Y, c'est-à-dire l'ensemble $Y(\Omega)$.

• Si $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ (ensemble fini), ou $Y(\Omega) = \{y_n / n \in \mathbb{N}\}$ (ensemble dénombrable), alors Y est une VARD.

Exemple **:** X VAR à densité telle que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^+$ et $Y = \lfloor X \rfloor$. Montrer que Y est une VARD et donner sa loi en fonction d'une densité f_X de X.

• Sinon, $Y(\Omega)$ sera un intervalle. Dans ce cas on cherchera si Y est à densité (en étudiant sa fonction de répartition F_Y).

Exemple **:** On pose $Y = \mathrm{e}^X$. Montrer que Y est à densité et en donner une en fonction d'une densité f_X de X.

Exemple **:** On pose $Y = X^2$. Montrer que Y est à densité et en donner une en fonction d'une densité f_X de X.

Exemple **:** On pose $Y = |X|$. Montrer que Y est à densité et en donner une en fonction d'une densité f_X de X.

⚠ Même si φ est continue, il se peut que $Y = \varphi(X)$ ne soit pas à densité.
⚠ En général, la somme de deux VAR à densité est à densité.

Exemple **:** Vérifier que $Y = X + |X|$ fournit un contre-exemple aux deux propriétés précédentes.

Dans le programme d'ECS figure le résultat suivant qui correspond au cas où φ est affine.

Théorème 10 Transformation affine d'une VAR à densité
Soient X une VAR à densité et f_X une densité de X. On se donne $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 0$. Alors la VAR $Y = aX + b$ est à densité et une densité de Y est la fonction f_Y définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

<u>Démonstration</u> : Distinguer les cas $a > 0$ et $a < 0$.

CQFD □

Remarquer que si $a = 0$, la VAR Y est dicrète, de loi certaine égale à b.

Ce théorème se généralise au cas où φ est un C^1 difféomorphisme (fonction C^1 dont la dérivée ne s'annule pas). L'énoncé est donner dans la section **Exercices**.

2 Espérance d'une variable aléatoire à densité

2.1 Espérance

Définition 11 Espérance d'une VAR à densité
Soit X une VAR de densité f_X. On dit que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t.f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Dans ce cas, on appelle espérance de X le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t.f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Cette définition est correcte car elle ne dépend pas du choix de la densité f_X, puisqu'on ne change pas la valeur d'une intégrale si l'on change l'intégrande en un nombre fini de points.

La convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} t.f_X(t)\,\mathrm{d}t$ signifie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|.f_X(t)\,\mathrm{d}t$. En fait, puisque f_X est positive sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto t f_X(t)$ est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$. La convergence absolue n'est donc pas nécessaire, on peut se contenter de montrer la convergence.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t.f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en $-\infty$ et $+\infty$, et aux points de discontinuité de f_X.

Si $\mathbb{E}(X)$ existe et f_X est paire, alors $\mathbb{E}(X) = 0$.

Exemple **:** La fonction f définie par $f(x) = 6x(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ est une densité d'une VAR X. X admet une espérance égale à 1.

Exemple **:** La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3}{x^4}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$ est une densité d'une VAR X. X admet une espérance égale à $\dfrac{3}{2}$.

Exemple **:** La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ est une densité d'une VAR X. X n'admet pas d'espérance.

Exemple **:** La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité d'une VAR X. X admet une espérance égale à 0.

Définition 12 VAR à densité centrée
Soit X une VAR à densité. On dit qu'elle est centrée lorsqu'elle admet une espérance, et lorsque cette espérance est nulle.

Exemple **:** Une VAR X de densité f, définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, est centrée.

Théorème 13 Linéarité de l'espérance
Soit X une VAR de densité f_X. Pour tous réels a et b, la VAR $aX+b$ admet aussi une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Démonstration : On utilise le fait que $Y = aX+b$ est aussi à densité, et qu'une de ses densités est la fonction g définie par $g(y) = \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$.

CQFD □

Corollaire 14 VAR centrée associée
Soit X une VAR à densité admettant une espérance. Alors la VAR $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

Définition 15 VAR centrée associée
Soit X une VAR à densité admettant une espérance. Alors la VAR $X - \mathbb{E}(X)$ est appelée variable centrée associée à X.

2.2 Théorème de transfert pour les VAR à densité

Théorème 16 Théorème de transfert pour les VAR à densité
Soit X une VAR de densité f_X. On suppose que X est presque sûrement à valeurs dans un intervalle I (ie que f_X est nulle en dehors de I) et que $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sauf en un nombre fini de points.
On suppose de plus que la variable $Y = \varphi(X)$ est aussi à densité.
Alors $Y = \varphi(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_I \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Dans ce cas :

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) = \int_I \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Nous verrons en TD que pour que Y soit à densité, il suffit de supposer que φ est un C^1-difféomorphisme de I sur $J = f(I)$ (fonction C^1 sur I dont la dérivée ne s'annule pas).

Exemple : Nous avons vu que e^X est une VAR à densité. Elle admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge (l'intégrande est positive) et dans ce cas :

$$\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^X\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^t f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple : Nous avons vu que X^2 est une VAR à densité. Elle admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge (l'intégrande est positive) et dans ce cas :

$$\mathbb{E}\big(X^2\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple **:** Nous avons vu que e^X est une VAR à densité. Elle admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge (l'intégrande est positive) et dans ce cas :

$$\mathbb{E}\big(|X|\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

2.3 Moments d'une VAR à densité

Proposition 17 Densité de X^r
Soit X une VAR à densité et $r \in \mathbb{N}$. Alors X^r est aussi une VAR à densité.

Définition 18 Moments d'une VAR à densité
Soient X une VAR de densité f_X et $r \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un moment d'ordre r lorsque $\mathbb{E}\big(X^r\big)$ existe. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r de X le réel :

$$m_r(X) = \mathbb{E}\big(X^r\big)$$

Pour $r = 1$, on retrouve l'espérance de X.

Si X est une VAR de densité f_X, le théorème de transfert donne que :

$$\mathbb{E}\big(X^r\big) \text{ existe} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^r . f_X(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

et dans ce cas :

$$m_r(X) = \mathbb{E}\big(X^r\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r . f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi pour calculer les moments d'une VAR à densité X, il suffit de connaître une densité de X. Il n'est pas nécessaire de déterminer une densité des VAR X^r pour $r \in \mathbb{N}$.

Exemple **:** Soit X VAR de densité f définie par $f(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}$. Alors X admet des moments de tout ordre, et pour $r \in \mathbb{N}$: $\mathbb{E}(X^r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ impair} \\ n! & \text{si } r \text{ pair} \end{cases}$.

Théorème 19 Existence de moments d'ordre inférieur
Soit X une VAR à densité qui admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$. Alors X admet des moments à tout ordre $s \in [\![0, r]\!]$.

Démonstration **:** On procède de même que pour les VARD.

CQFD □

Définition 20 VAR à densité bornée
Soit X une VAR à densité. On dit qu'elle est bornée lorsqu'il existe deux réels a et b, avec $a < b$, tels que X soit p.s. à valeurs dans $[a, b]$.

Proposition 21 Existence des moments pour une VAR à densité bornée
Si X est à densité et est bornée, alors elle admet des moments à tout ordre.

Théorème 22 Existence du moment centré d'ordre r
Si X est une VAR à densité qui admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$, alors la VAR centrée $X - \mathbb{E}(X)$ est à densité et admet elle-aussi un moment d'ordre r égal à $\mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^r\right]$.

Démonstration : On procède de même que pour les VARD.

CQFD □

Définition 23 Moment centré d'ordre r d'une VAR à densité
Si X est une VAR à densité admettant un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$, on appelle moment centré d'ordre r le réel :

$$\mu_r(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^r\right]$$

2.4 Variance d'une VAR à densité

Définition 24 Variance d'une VAR à denisté
Soit X une VAR à densité admettant un moment d'ordre 2. On appelle variance de X, notée $V(X)$ ou $\mathrm{Var}(X)$, son moment centré d'ordre 2 :

$$V(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right]$$

Donc $V(X)$ existe si $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe.

La variance sert à mesurer la dispersion quadratique de X autour de sa valeur moyenne (= son espérance).

Théorème 25 Règles de calcul de la variance
Soit X une VAR à densité admettant un moment d'ordre 2.

1. $V(X) > 0$;
2. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet un moment d'ordre 2 et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Remarquer que ce sont les mêmes règles de calcul que pour les VARD (mais que la variance ne peut être nulle).

Théorème 26 Formule de Koenig-Huyghens
Soit X une VAR à densité admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$V(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

Puisque $V(X) \geq 0$, on a $\mathbb{E}\left(X^2\right) \geq \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$. Plus généralement, on peut montrer que si φ est une fonction numérique convexe, alors $\mathbb{E}\left(\varphi(X)\right) \geq \varphi\left(\mathbb{E}(X)\right)$ (inégalité de Jensen), mais c'est une autre histoire...
C'est cette formule qu'on utilise en pratique pour calculer la variance d'une VAR à densité.

Exemple **:** Soit X VAR de densité $f(t) = 6t(1-t)1_{[1,2]}(t)$. Alors X admet une variance : $V(X) = \dfrac{1}{20}$.

Exemple **:** Soit X VAR de densité $f(t) = \dfrac{3}{t^4}1_{[1,+\infty[}(t)$. Alors X admet une variance : $V(X) = \dfrac{3}{4}$.

Définition 27 Écart-type d'une VAR à densité
Soit X une VAR à densité admettant un moment d'ordre 2. On appelle écart-type de X le réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Contrairement à la variance, l'écart-type possède la même unité que X, et s'interprète donc mieux en pratique. Il sert à mesurer la dispersion de X autour de sa valeur moyenne.

Définition 28 VAR à densité centrée réduite Soit X une VAR à densité admettant un moment d'ordre 2.

1. On dit que X est une VAR à densité centrée réduite lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$ et $V(X) = 1$.
2. On appelle VAR à densité centrée réduite associée à X la VAR : $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$.

En effet si $Y = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$, alors Y est une VAR à densité centrée réduite.

3 Lois usuelles

Dans tout ce paragraphe X est une VAR à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

3.1 Loi uniforme

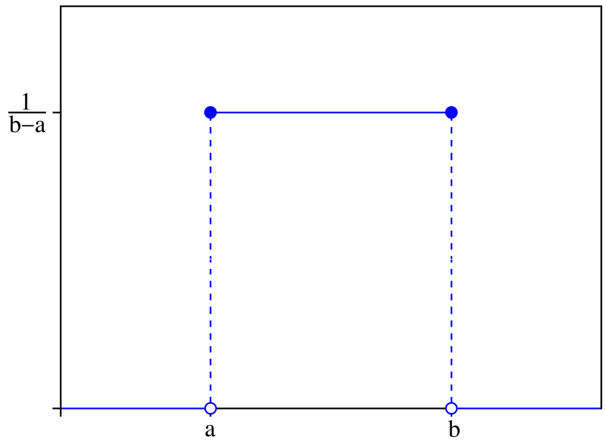
Définition 29 VAR à densité de loi uniforme
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ lorsque X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(t)$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a, b])$.

La fonction f donnée dans la définition vérifie bien les conditions d'une fonction densité.

Voici sa représentation graphique :

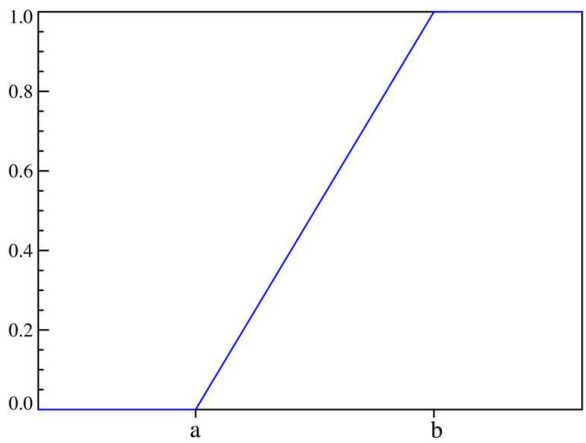


X est p.s. à valeurs dans $[a, b]$ et est donc bornée. Ainsi elle admet des moments à tous ordres.

Proposition 30 Fonction de répartition de $\mathscr{U}([a, b])$
Soit X une VAR quelconque de fonction de répartition F. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a, b])$ si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{x-a}{b-a} 1_{[a,b]}(x) + 1_{]b,+\infty[}(x)$$

Voici la représentation graphique de la fonction de répartition de $\mathscr{U}([a, b])$:



Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{P}(X \in I) = \dfrac{\text{longueur de } I \cap [a,b]}{\text{longueur de } [a,b]}$. Les valeurs de X sont donc « uniformément réparties dans l'intervalle $[a,b]$ ».

Théorème 31 Espérance et variance d'une VAR de loi $\mathscr{U}\big([a,b]\big)$
Soit X une VAR de loi $\mathscr{U}\big([a,b]\big)$. Alors X admet des moments de tous les ordres.
En particulier :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exercice 1 Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$ et $r \in \mathbb{N}$, calculer $E(X^r)$.

Proposition 32 Transformation affine d'une loi uniforme
Soit X une VAR quelconque. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([0,1]\big) \Longleftrightarrow a + (b-a)X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([a,b]\big)$$

Démonstration : On utilise le fait que $Y = \alpha X + \beta$ est aussi à densité, et qu'une de ses densités est la fonction g définie par $g(y) = \dfrac{1}{|\alpha|} f\left(\dfrac{y-\beta}{\alpha}\right)$.

CQFD □

3.2 Loi exponentielle

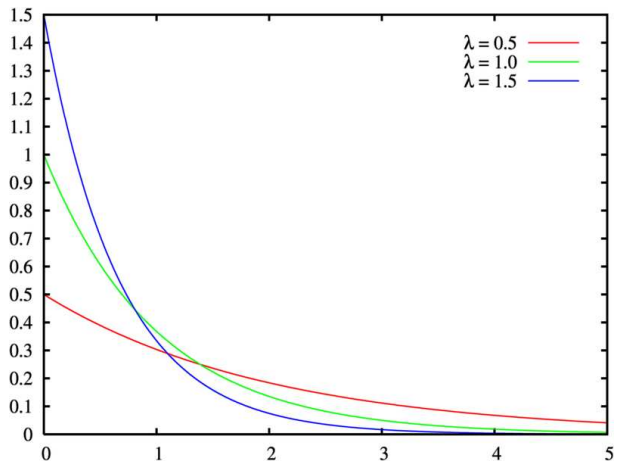
Définition 33 VAR à densité de loi exponentielle
Soit λ un réel tel que $\lambda > 0$. On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ, lorsque X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

La fonction f donnée dans la définition vérifie bien les conditions d'une fonction densité.

Voici sa représentation graphique pour différentes valeurs du paramètre λ :



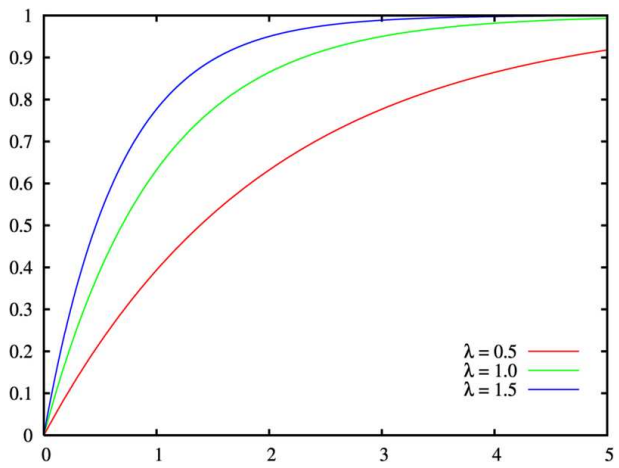
X est p.s. à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Proposition 34 Fonction de répartition de $\mathscr{E}(\lambda)$
Soit X une VAR quelconque. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) 1_{]0,+\infty[}(x)$$

On en déduit que, pour $x > 0$, $\mathbb{P}(X > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$, et pour $x \leq 0$, $\mathbb{P}(X > x) = 1$.

Voici la représentation graphique de la fonction de répartition de $\mathscr{E}(\lambda)$ pour différentes valeurs du paramètre λ :



Théorème 35 Espérance et variance d'une VAR de loi $\mathscr{E}(\lambda)$
Soit X une VAR de loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Alors X admet des moments de tous les ordres.
En particulier :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exercice 2 Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ et $r \in \mathbb{N}$, calculer $E(X^r)$.

Théorème 36 Absence de mémoire de la loi exponentielle
Soit X une VAR presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et qui n'est pas presque sûrement nulle.
On a équivalence de :
(i) X est à densité et suit une loi exponentielle ;
(ii) X vérifie la propriété d'absence de mémoire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{P}(X > x + Y) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(X > y)$$

La loi certaine nulle vérifie aussi la propriété d'absence de mémoire, c'est pourquoi elle a été exclu dans les hypothèses.

Si $\mathbb{P}(X > x) > 0$ la propriété (ii) s'écrit : $\mathbb{P}(X > x + y | X > x) = \mathbb{P}(X > y)$. Les lois exponentielles sont donc une généralisation des lois géométriques dans le cas des VAR à densité. Elles sont utilisées pour modéliser des temps d'attente (par exemple la durée de vie d'un appareil, en négligeant les phénomènes d'usure).

Démonstration : $(i) \Longrightarrow (ii)$ Simple calcul.
$(ii) \Longrightarrow (i)$ On définit une fonction $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par $\pi(x) = \mathbb{P}(X > x)$.
Si $x \geq 0$, on a par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi(nx) = \pi(x)^n$.
En particulier $\pi(n) = a^n$ où on a posé $a = \pi(1) \in [0,1]$.
Si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$, alors $\pi(qr) = a^p = \pi(r)^q$, d'où $\pi(r) = a^{\frac{p}{q}} = a^r$.
Si $x > 0$, on l'approxime par deux suites adjacentes de rationnels, pour obtenir $\pi(x) = a^x$.
La continuité à droite de F_X en 0 donne celle de π. On a donc $\pi(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} a^x$. Comme $\pi(0) = 1$, on a $a > 0$.
Le fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ donne $a < 1$.
On note λ le réel strictement positif tel que $\pi(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$, pour $x > 0$: $\lambda = -\ln(a)$.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

CQFD □

Proposition 37 Transformation affine d'une loi exponentielle
Soit X une VAR quelconque. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathscr{E}(1) \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$$

Démonstration : On utilise le fait que $Y = \alpha X + \beta$ est aussi à densité, et qu'une de ses densités est la fonction g définie par $g(y) = \dfrac{1}{|\alpha|} f\left(\dfrac{y-\beta}{\alpha}\right)$.

CQFD □

3.3 Loi normale

3.3.1 Loi normale centrée réduite

Rappelons pour commencer que l'intégrale de Gauss $intt-\infty+\infty e^{-\frac{t^2}{2}}$ converge et est égale à $\sqrt{2\pi}$.

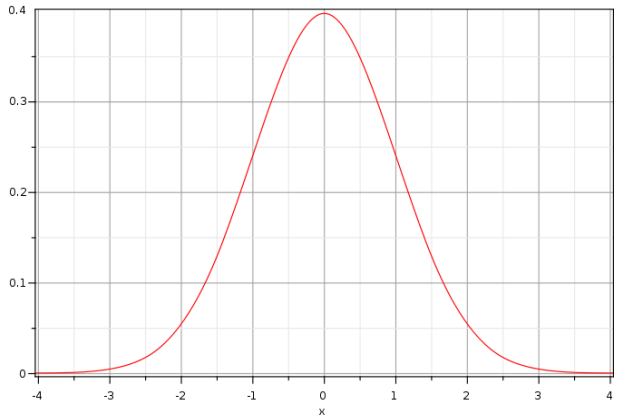
Définition 38 VAR à densité de loi normale centrée réduite
On dit que X suit la loi normale centrée réduite (ou loi de Laplace-Gauss), lorsque X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

La fonction f donnée dans la définition vérifie bien les conditions d'une fonction densité.

Voici sa représentation graphique :



Proposition 39 Fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Sa fonction de répartition est la fonction $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

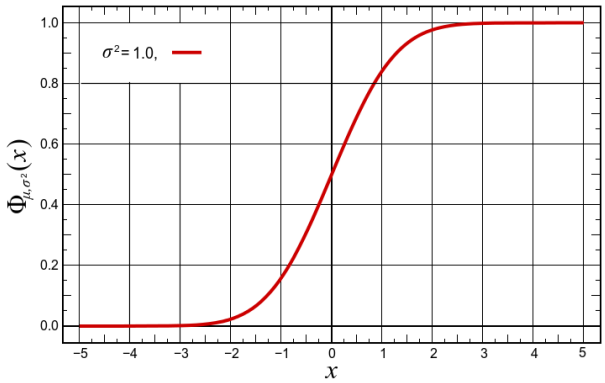
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

Elle vérifie $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

On ne connaît pas d'expression simple de $\Phi(x)$, mais des valeurs approchées sont tabulées.

Voici la représentation graphique de la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$:



Exercice 3 Montrer que pour $x \geq 0$: $\mathbb{P}(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1$ et $\mathbb{P}(|X| \geq x) = 2\big(1 - \Phi(x)\big)$.

Théorème 40 Espérance et variance d'une VAR de loi $\mathcal{N}(0,1)$
Soit X une VAR de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors X admet des moments de tous les ordres.
En particulier :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(X) = 1$$

Donc si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors X est centrée et réduite, d'où le nom de « loi normale centrée réduite ».

Exercice 4 Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $r \in \mathbb{N}$, calculer $E(X^r)$ en fonction de la parité de r.

3.3.2 Loi normale : cas général

Définition 41 VAR à densité de loi normale
Soient μ et σ deux réels tels que $\sigma > 0$. On dit que X suit la loi normale de paramètres (μ, σ^2), lorsque X admet pour densité la fonction f définie par :

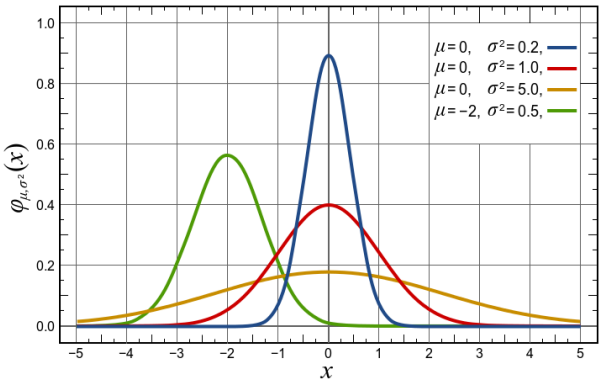
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

La fonction f donnée dans la définition vérifie bien les conditions d'une fonction densité.

⚠ Dans certains ouvrages, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Voici la représentation graphique de la densité pour différentes valeurs des paramètres :



Proposition 42 Transformation affine d'une loi normale
Soit X une VAR quelconque. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Démonstration : On utilise le fait que $Y = \alpha X + \beta$ est aussi à densité, et qu'une de ses densités est la fonction g définie par $g(y) = \dfrac{1}{|\alpha|} f\left(\dfrac{y-\beta}{\alpha}\right)$.

CQFD □

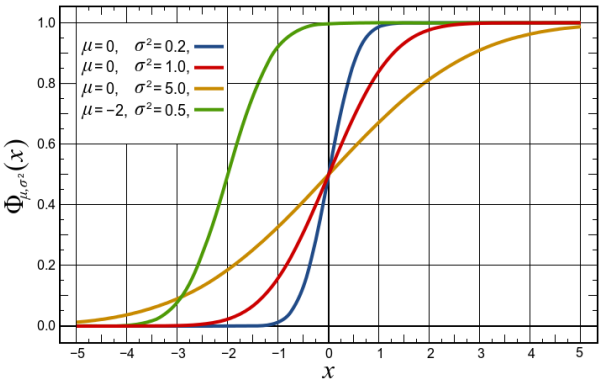
Proposition 43 Fonction de répartition de $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. On note F_X sa fonction de répartition et Φ celle d'une VAR de loi normale centrée réduite. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Voici la représentation graphique de la fonction de répartition de $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ pour différentes valeurs des paramètres :



Théorème 44 Espérance et variance d'une VAR de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
Soit X une VAR de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Alors X admet des moments de tous les ordres.
En particulier :

$$\mathbb{E}(X) = \mu \qquad \text{et} \qquad V(X) = \sigma^2$$

Et donc $\sigma = \sigma(X)$ (écart-type de X).

Démonstration : Écrire $X = \mu Y + \sigma$ où $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ puis utiliser la formule du binôme.

CQFD □

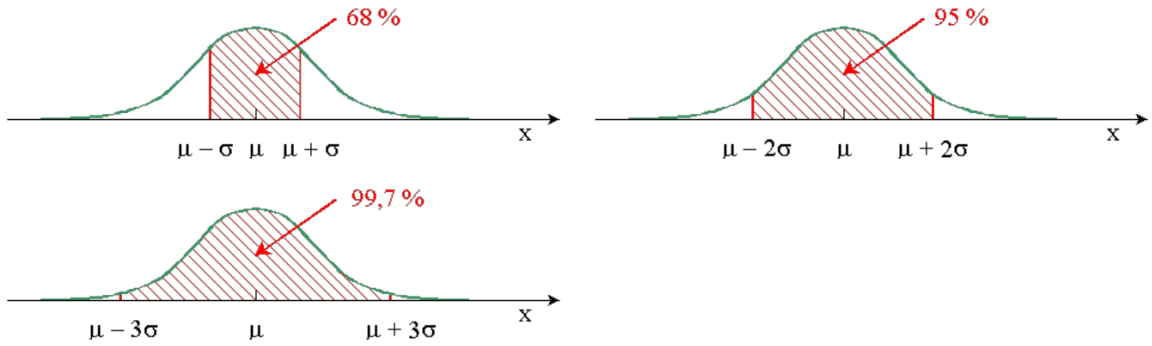
Interprétation graphique des paramètres μ et σ :

• Le paramètre μ correspond à la moyenne. Puisque le graphe de la densité est symétrique par rapport à l'axe $x = \mu$, on a $\mathbb{P}(X \geq \mu) = \mathbb{P}(X \leq \mu) = \dfrac{1}{2}$.

• Le paramètre σ correspond à l'écart-type. On peut aussi montrer que :

$$\mathbb{P}\big(X \in [\mu-\sigma,\mu+\sigma]\big) \simeq 0.68 \qquad \mathbb{P}\big(X \in [\mu-2\sigma,\mu+2\sigma]\big) \simeq 0.95 \qquad \mathbb{P}\big(X \in [\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]\big) \simeq 0.997$$

La largeur de la « cloche » est donc approximativement de 6σ.



4 Exercices

Exercice 5

1. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([-1,2])$, vérifier que X^2 est à densité et donner en une.
2. Même question avec $|X|$.

Exercice 6 Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(X) = x^n \mathbb{1}[0,1](x) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une VAR X à densité. On donnera une densité de X.
2. Montrer que X admet une espérance et une variance et calculer les.

Exercice 7 Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

1. (a) Montrer que $Y = \sqrt{X}$ est à densité et donner en une.
   (b) Montrer que Y admet une espérance et une variance et calculer les.
2. (a) Montrer que X^2 est à densité et donner en une.
   (b) Montrer que X^3 est à densité et donner en une.

Exercice 8 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{c}{x(x+1)} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$.

1. Déterminer $c \in \mathbb{R}$ pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X densité f. Montrer que $Y = \dfrac{1}{X}$ est à densité en donner en une.

Exercice 9 On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$ et de $X - \lfloor X \rfloor$.

Exercice 10 Soit X une VAR de loi $\mathscr{N}(0,1)$. Montrer que X^2 est à densité et donner en une.

Exercice 11 (Simulation de loi par inversion de la fonction de répartition) Soit X une VAR à densité, de fonction de répartition F connue et supposée strictement croissante. Elle admet donc une bijection réciproque $F^{-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où $I = F(\mathbb{R}) \subseteq [0,1]$.
On se donne aussi U VAR de loi $\mathscr{U}([0,1])$.
Montrer que la VAR $F^{-1}(U)$ est à densité et déterminer sa fonction de répartition.
Application : comment simuler une loi $\mathscr{E}(\lambda)$?
Cette méthode se généralise au cas où F est seulement supposée croissante. Elle n'est plus bijective et il faut alors utiliser la notion d'inverse généralisée qui n'est pas au programme...

Exercice 12 Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(X) = x^n \mathbb{1}[0,1](x) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une VAR X à densité. On donnera une densité de X.
2. Montrer que X admet une espérance et une variance et calculer les.

Exercice 13 On pose $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln t)^2\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Vérifier que f est une densité d'une variable aléatoire X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Soit $Y = \ln(X)$. Comparer $\mathbb{E}(\ln X)$ et $\ln\big(\mathbb{E}(X)\big)$.

Exercice 14 On se donne X une VAR telle que la variable $Y = \ln X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1. Exprimer la fonction de répartition F de X en fonction de μ, σ et de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite Π.
2. En déduire que X est une var à densité et donner une densité de X.
3. Montrer que X admet une espérance et calculer là.

Exercice 15 (Loi exponentielle bilatère) On pose : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Donner la fonction de répartition de X, son espérance et sa variance.
3. On pose $Y = |X|$. Montrer que Y suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Exercice 16 (Lois Gamma et gamma) On rappelle que la fonction Γ est définie par :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

1. (a) Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on définit la fonction f par :

$$f(t) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{e}^{\beta x} (\beta x)^{\alpha - 1} \mathbb{1}_{x>0}$$

   Montrer que f est une densité de probabilité.
   Si X est de densité f on le notera $X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, \beta)$. Cette loi, appelée loi « grand gamma » modélise une durée de vie avec vieillissement.

   (b) Reconnaître la loi $\Gamma(1, \beta)$.

   (c) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

2. Pour $\alpha > 0$, on dit que X suit la loi $\gamma(\alpha)$, lorsque $X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, 1)$. Cette loi est appelée loi « petit gamma ».

   (a) Pour $\beta > 0$ montrer que $X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, 1) \iff \beta X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, \beta)$.

   (b) En déduire que $\mathbb{E}(X)$ et $\overrightarrow{(}\ X)$ existent et les calculer.

Exercice 17 (Processus de Poisson) Des voyageurs arrivent de façon aléatoire dans la salle des pas perdus de la gare de Lyon. On suppose que la variable aléatoire N_t égale au nombre de ces voyageurs arrivant entre les instants 0 et t ($t > 0$) suit une loi de Poisson de paramètre alt ($\alpha > 0$).

1. On note X_1 l'instant d'arrivée du premier voyageur.
   Déterminer $\mathbb{P}(X_1 > t)$ pour tout réel t. En déduire la loi de X_1, puis $\mathbb{E}(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. On note X_n l'instant d'arrivée du n-ième voyageur ($n \geq 1$).

   (a) Montrer que, pour $t > 0$, $F_{X_n}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$. En déduire une densité de X_n.

   (b) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $V(X_n)$.

Exercice 18 (Loi Bêta)

1. (a) Soient α et β deux réels. Pour quelles valeurs de α et β, l'intégrale $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

   (b) On suppose que $\alpha>0$ et $\beta>0$. Montrer que $\beta.B(\alpha+1,\beta)=\alpha.B(\alpha,\beta+1)$ et que $B(\alpha,\beta+1)+B(\alpha+1,\beta)=B(\alpha,\beta)$.
   En déduire que $B(\alpha+1,\beta)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$.

   (a) Montrer que f est une densité de probabilité.
   Si X est une variable aléatoire de densité f, on dira que X suit la loi Bêta de paramètres (α,β).

   (b) Soit X de densité f. Montrer que Y admet une espérance et une variance et calculer les.

Exercice 19 (Loi de Pareto)

1. Soient a et α des nombres réels strictement positifs et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\alpha\dfrac{a^\alpha}{x^{\alpha+1}}\mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x)$.

   (a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
   Si X est une variable aléatoire de densité f, on dira que X suit la loi de Pareto de paramètres (α,a).

   (b) Soit X de densité f. Déterminer la fonction de répartition F de X.

   (c) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X admet une espérance, et calculer la dans ce cas.

   (d) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X admet une variance, et calculer la dans ce cas.

2. (a) Soient Y de loi $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda>0$, β un réel strictement positif et γ un réel strictement supérieur à 1.
   Déterminer la loi de la variable $Z=\beta.\gamma^Y$.

   (b) Étudier la réciproque de la propriété ainsi démontrée.

   (c) Soient Z une variable aléatoire qui suit une loi de Pareto de paramètre (α,a) et c un réel strictement positif.
   Déterminer la loi de Z^c.

Exercice 20 Soit X une VAR de densité f, et φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, telle que φ' ne s'annule pas sur I. Alors $Y=\varphi(X)$ est une VAR à densité, à valeurs dans $J=\varphi(I)$, et une densité de Y est la fonction g définie par :

$$\forall y\in J,\quad g(y)=\frac{1}{\left|\varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)\right|}f\left(\varphi^{-1}(y)\right)$$

Exercice 21 Supposons que X suit une loi $\mathscr{N}(0,1)$. On note Φ sa fonction de répartition et on pose :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Q(x)=1-\Phi(x)=\mathbb{P}(X\geq x)$$

La fonction s'appelle la **queue de la loi** $\mathscr{N}(0,1)$.

1. En utilisant deux intégrations par parties, montrer que, pour $x > 0$:
   (i) $Q(x) \leq \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
   (ii) $Q(x) \geq \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - \dfrac{1}{x^3\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
2. En déduire un équivalent de $Q(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 22 (Taux de panne, usure et rodage d'une machine) Une machine tombe en panne à un instant aléatoire T. On suppose que T est p.s. à valeurs positives, et est à densité. On note F sa fonction de répartition et f une de ses densités ; on suppose f nulle sur $\mathbb{R}^-$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$.
Si à l'instant $t > 0$ la panne ne s'est pas produite, le risque de panne immédiate se mesure par le **taux de panne** $h(t) = \lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{\mathbb{P}(t < T \leq t + u | T > t)}{u}$. On dit qu'il y a **usure** lorsque h croît, et **rodage** lorsque h décroît.

1. Déterminer h en fonction de F et f.
2. On pose $\Lambda(t) = \displaystyle\int_0^t h(u)\,\mathrm{d}u$. Montrer que, pour $t > 0$:
$$P(T > t) = \mathrm{e}^{-\Lambda(t)}$$
   Calculer $\mathbb{E}(\Lambda(T))$.
3. Montrer que le taux de panne de T est constant si et seulement si T suit une loi exponentielle.
4. On suppose qu'il y a usure sur $]0, +\infty[$. Montrer que, pour tout $(s, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:
$$\mathbb{P}(T > s + t) \leq \mathbb{P}(T > s)\mathbb{P}(T > t)$$

Exercice 23 Soit X VAR de densité f et admettant un moment d'ordre 2.
Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x - y)^2 f(x) f(y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$.

Chapitre 22

Convergences et approximations en probabilités

On considère une expérience aléatoire modélisée par un triplet $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

1 Convergence en probabilité

1.1 Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, admettant une espérance.

On cherche à estimer la probabilité que X se disperse, c'est-à-dire qu'elle prenne des valeurs éloignées de son espérance. Pour cela on a le résultat général suivant.

Théorème 1 Inégalité de Markov

1. Si X est une variable aléatoire **positive** admettant une espérance, alors :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

2. Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, alors :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\big(|X|\big)}{a}$$

Exemple **:** Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, alors :

$$\lim_{a \to +\infty} \mathbb{P}(X > a) = 0$$

Par convergence monotone, on savait déjà que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X > n) = 0$. Quelle est la différence entre ces deux résultats ?

1.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Sous l'hypothèse que X a un moment d'ordre 2 on a un résultat plus précis.

Théorème 2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Cette inégalité confirme l'utilisation de l'écart-type comme mesure de dispersion.

1.3 Convergence en probabilité

Soient X une VAR définie sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VAR toutes définies sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

On souhaite définir une notion de convergence de la suite X_n vers X, pas en tant que suite de nombres mais en tant que suite de variables aléatoires.

Définition 3 Convergence en probabilité
On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en probabilité** vers X lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(|X_n - X| \geq \varepsilon\big) = 0$$

On le note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

Remarquer que ce ne sont pas les expressions de X_n et X qui interviennent dans cette définition, mais leur loi.

L'inégalité de Markov donne une condition suffisante de convergence en probabilité, dans le cas de variables admettant une espérance :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big(|X_n - X|\big) = 0$$

Si $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne une condition suffisante de convergence en probabilité, dans le cas de variables admettant un moment d'ordre 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} V(X_n - X) = 0$$

On peut généraliser au cas où $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge lorsque $n \to +\infty$, comme nous le verrons en TD.

⚠ Il n'y a pas unicité de la limite.

⚠ Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ on ne peut rien dire que $\mathbb{E}(X_n)$.
Considérer X_n telle que $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{n}$.

Exemple **:** Si X est une variable aléatoire, on pose $X_n = \dfrac{1}{2^n}\lfloor 2^n X \rfloor$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

1.4 Loi faible des grands nombres pour la loi binomiale

Théorème 4 Loi faible des grands nombres pour la loi binomiale
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Alors :

$$\frac{1}{n}X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} p$$

(où p désigne une variable aléatoire presque sûrement constante égale à p).

Ce résultat permet une justification partielle, a posteriori, de la notion de probabilité d'un évènement, introduite intuitivement : « la fréquence de succès sur n essais indépendants converge vers la probabilité d'un succès ».

2 Convergence en loi

Soient X une VAR définie sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (chacune de ses variables est définies sur un espace probabilisé qui lui est propre).

On souhaite définir une notion de convergence de la suite X_n vers X, plus faible que la notion de convergence en probabilité.

Définition 5 Convergence en loi
On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X lorsque :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

en tout point de continuité de F_X. On le note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$.

Dans le cas où X a pour densité f, on a donc :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a < X_n \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Il existe d'autres définitions équivalentes (et très différentes) mais elles ne sont pas au programme d'ECS.

Nous verrons en TD que la convergence en loi est une conséquence de la convergence en probabilité (mais ce n'est pas au programme).

⚠ Il n'y a pas unicité de la limite.

⚠ Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ on ne peut rien dire sur $\mathbb{E}(X_n)$.
Considérer X_n telle que $\mathbb{P}\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$.

Théorème 6 Convergence en loi pour des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$
Si toutes les variables aléatoires X_n, $\in \mathbb{N}$, et X sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} x$ si, et seulement si :

$$\forall k \in X(\Omega), \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

⚠ En général ceci est faux en général pour des variables discrètes !
Contre-exemple : dans l'exemple précédent, $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} 0$ mais $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) \neq 1$.

2.1 Approximation binomiale-Poisson

Théorème 7 Approximation binomiale-Poisson
Soit X_n une VARD de loi $\mathscr{B}(n, p_n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

ie $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{P}(\lambda)$.

Ce résultat explique pourquoi la loi de Poisson est appelée « loi des évènements rares ».

On l'applique souvent avec $p_n = \dfrac{\lambda}{n}$.

2.2 Théorème central limite

Théorème 8 Théorème central limite pour la loi binomiale (de De Moivre Laplace)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.
On considère les variables aléatoires centrées réduites associées :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n^\star = \frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sqrt{V(X_n)}} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Alors :

$$X_n^\star \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1)$$

ie :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \int_a^b f(t)\,dt$$

On peut donc approximer la loi $\mathscr{B}(n, p)$ par la loi $\mathscr{N}\big(np, np(1-p)\big)$ pour de grandes valeurs de n.

Théorème 9 Théorème central limite pour la loi de Poisson
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{P}(n\lambda)$.
On considère les variables aléatoires centrées réduites associées :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n^\star = \frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sqrt{V(X_n)}} = \frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$$

Alors :

$$X_n^\star \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathscr{L}}} \mathscr{N}(0,1)$$

ie :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq b\right) = \int_a^b f(t)\,dt$$

On peut donc approximer la loi $\mathscr{P}(n\lambda)$ par la loi $\mathscr{N}\left(n\lambda, n\lambda\right)$ pour de grandes valeurs de n.

3 Exercices

Exercice 1 (Convergence en loi et lois uniformes)

1. Pour $n \geq 1$, on suppose que $X_n \hookrightarrow \left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\right)$.

   Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} 0$.

2. Pour $n \geq 1$, on suppose que $X_n \hookrightarrow \left(\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}\right)$.

   Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{U}\big([0,1]\big)$.

Exercice 2 Soit X_n de densité :

$$f_n(t) = \frac{1}{n!}\mathrm{e}^{x/n}\left(\frac{x}{n}\right)^{n-1} \mathbb{1}_{x>0}$$

Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1$.

Exercice 3 (Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale)
On considère une urne composée de N boules dont une proportion p de boules blanches. On effectue n tirages d'une boule sans remise et on note X_N le nombre de boules blanches obtenues.
Montrer que $X_N \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{B}(n,p)$.

Exercice 4 (Convergences vers la loi de Poisson)
Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

1. On note F_n l'ensemble des **permutations** de $[\![1,n]\!]$. On choisit au hasard une de ces permutations, et on définit la variable aléatoire Y_n égale au nombre de points fixes de cette permutation.

   (a) Montrer que le nombre d'éléments de F_n n'admettant aucun point fixe vaut :

   $$d_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

   (b) Déterminer la loi de Y_n.

   (c) Montrer que la suite $(Y_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

2. On note E_n l'ensemble des **applications** de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. On choisit au hasard une de ces applications, et on définit la variable X_n égale au nombre de points fixes de cette application.

   (a) Déterminer la loi de X_n.

   (b) Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

Exercice 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = n^2 x\mathrm{e}^{-n^2x^2/2}\mathbb{1}_{x\geq 0}$$

1. Montrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire.
2. Soit X_n de densité f_n. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Exercice 6 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{an}{\pi(1+n^2x^2)}$$

1. Déterminer a pour que f_n soit une densité de variable aléatoire.
2. Soit X_n de densité f_n. Admet-elle des moments ? Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} 0$.

Exercice 7 (Inégalité de grandes déviations)
Dans cet exercice X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de densité :

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \mathrm{e}^{-t}$$

ie de loi $\Gamma(1,n) = \gamma(n)$), avec $n \in \mathbb{N}^*$.
On rappelle que $\mathbb{E}(X) = n$ et $V(X) = n$.

1. Pour tout réel $\lambda > 0$, on pose $\psi(\lambda) = \ln\left(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda(X-\mathbb{E}(X))})\right)$ (transformée de Legendre de X). Calculer $\psi(\lambda)$.
2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a $\psi(\lambda) \leq n\dfrac{\lambda^2}{2}$.
3. (a) Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(X) - X \geq x) \leq \mathrm{e}^{-\lambda x + \psi(\lambda)}$$

   (b) En déduire que pour tout $x > 0$

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(X) - X \geq x) \leq \mathrm{e}^{-x^2/(2n)}$$

4. Comparer l'inégalité que l'on vient d'obtenir avec celle obtenue par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff.

Exercice 8 (Inégalités pour la loi de Poisson)
Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. (a) Montrer que $\mathbb{P}(|X-\lambda| \geq \lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$.
   (b) En déduire l'inégalité $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$.
2. On considère dans toute cette question une variable aléatoire discrète Z définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, d'espérance nulle et de variance σ^2.
   (a) Montrer que

$$\forall\, a > 0, \forall\, x \geq 0, \mathbb{P}(Z \geq a) \leq \mathbb{P}[(Z+x)^2 \geq (a+x)^2]$$

   (b) Montrer que $\forall\, a > 0, \forall\, x \geq 0, \mathbb{P}(Z \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$.
   (c) Montrer que $\forall\, a > 0, \mathbb{P}(Z \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

(d) En déduire que $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda+1}$.

3. Pour tout réel t, on pose $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\, t^k$.

   (a) Pour tout réel t, justifier l'existence de $G_X(t)$ et calculer sa valeur.

   (b) Montrer que : $\forall\, t \geq 1, \forall\, a > 0, \mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{G_X(t)}{t^a}$.

   (c) En déduire que $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda}$.

Exercice 9 (Transformée de Laplace et inégalités exponentielles) Si X est une variable aléatoire réelle, on appelle transformée de Laplace de X (ou fonction génératrice des moments) la fonction $\mathscr{L}_X$ définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \mathscr{L}_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

1. (a) Montrer que $\mathscr{L}_X$ est toujours définie en 0.

   (b) Si X est positive, montrer que $\mathscr{L}_X$ est définie au moins sur $\mathbb{R}^-$.

   (c) Calculer $\mathscr{L}_X$ dans les cas suivants : $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1, n]\!]\right)$, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([a, b]\right)$, $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ et $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0, 1)$. On précisera à chaque fois son ensemble de définition

2. (a) Montrer que si X est une variable aléatoire réelle et $t > 0$ tel que e^{tX} admet une espérance, alors :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathrm{e}^{-ta}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

   (b) Dans le cas où $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0, 1)$ en déduire :

$$\forall\, a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathrm{e}^{-a^2/2}$$

Exercice 10 (Une condition suffisante de convergence en probabilité)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 et telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = a \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0$$

Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

Exercice 11 (Convergence en probabilité et fonctions continues)
Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} f(X)$.

Exercice 12 (La convergence en probabilité donne la convergence en loi) On suppose que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

1. Vérifier que si Y et Z sont deux variables aléatoires réelles, si $c \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ alors :

$$\mathbb{P}(Y \leq c) \leq \mathbb{P}(Z \leq c + \varepsilon) + \mathbb{P}(Z - Y > \varepsilon)$$

2. Soient $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X \leq a - \varepsilon) - \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}(X_n \leq a) \leq \mathbb{P}(X \leq a + \varepsilon) + \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right)$$

3. Conclure que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$.

Exercice 13 On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$, définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, où, pour tout entier naturel $n \geq 1$, X_n suit la loi normale d'espérance nulle et d'écart-type $1/n$.
On définit, pour tout entier naturel n non nul, l'application Y_n par :

$$\forall \omega \in \Omega, Y_n(\omega) = \int_{-1}^{1} \left| X_n(\omega) - t \right| dt$$

On admet que, pour tout entier naturel non nul, Y_n est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n et Φ celle de la loi normale centrée réduite.

1. Exprimer, pour tout réel y, $F_{Y_n}(y)$ en fonction de $\Phi(y)$ et de n.
2. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi.