BÉGYN Arnaud

Cours de mathématiques PSI

Introduction

Ce manuscrit regroupe des notes de cours de mathématiques pour une classe de PSI. J'ai écrit ces notes lors de mes enseignements au lycée Leconte Delisle pendant les années 2014-?.

Ce document n'est absolument pas figé et va beaucoup évoluer. N'hésitez pas à m'envoyer toutes vos remarques et critiques ou à me signaler d'éventuelles erreurs à l'adresse "arnaud.begyn@prepas.org".

Vous pouvez utiliser ce cours à toutes fins utiles, à condition de signaler son auteur et son origine. Les mises à jour sont disponibles sur le site http ://mathcpge.org/.

Table des matières

1 Révisions et compléments d'analyse **13**

1 Étude d'une fonction 14
1.1 Théorèmes liés à la continuité 14
1.2 Théorèmes liés à la dérivabilité 16
2 Majorations classiques 18
3 Trigonométrie 19
4 Fonctions usuelles 20
4.1 Exponentielles, logarithmes 20
4.2 Fonctions puissances 22
4.3 Fonctions trigonométriques 23
4.4 Fonctions hyperboliques 24
4.5 Fonctions arcsin et arccos 25
4.5.1 Rappels de première année 25
4.5.2 Fonctions circulaires réciproques 25
4.6 Fonction arctan 28
5 Intégrale sur un segment d'une fonction continue 29
5.1 Propriétés élémentaires 29
5.2 Théorème fondamental du calcul et applications 30
5.3 Calcul intégral 32
5.4 Intégration par parties 32
5.5 Changement de variable 33
5.6 Calculs de primitives 33
5.7 Sommes de Riemann 34
5.8 Formules de Taylor 34
6 Étude de suites 36
6.1 Propriétés générales 36
6.2 Suites récurrentes usuelles 38
6.3 Croissances comparées 38
6.4 Analyse asymptotique 39
6.5 Recherche d'équivalents 40
6.5.1 Généralités 40
6.5.2 Équivalents d'exponentielle 41
6.5.3 Équivalents de logarithmes 41
6.5.4 Équivalents de sommes 42
6.5.5 Bilan 42
7 Exercices 43

2 Compléments sur les séries numériques **51**
1 Rappels de première année . . . 52
1.1 Rappels sur les sommes finies . . . 52
1.2 Rappels sur les sommes doubles . . . 54
1.3 Rappels généraux sur les séries . . . 56
1.4 Rappels sur les séries à termes positifs . . . 57
1.5 Convergence absolue et semi-convergence . . . 58
1.6 Séries de référence . . . 59
2 Compléments . . . 60
2.1 Compléments sur les séries géométriques . . . 60
2.2 Comparaison série-intégrale . . . 60
2.3 Règle de d'Alembert . . . 61
2.4 Formule de Striling . . . 62
2.5 Théorème des séries alternées . . . 62
2.6 Produit de Cauchy . . . 63
2.7 Plan d'étude d'une série . . . 64
3 Exercices . . . 65

3 Compléments d'algèbre linéaire **69**
1 Notions de base d'algèbre linéaire . . . 70
1.1 Sous-espaces vectoriels . . . 70
1.2 Applications linéaires . . . 71
1.3 Combinaisons linéaires d'un familles de vecteurs . . . 75
1.4 Familles génératrices . . . 77
1.5 Familles libres . . . 78
1.6 Bases . . . 80
1.7 Compléments sur les applications linéaires . . . 82
1.8 Produit cartésien d'espaces vectoriels . . . 85
1.9 Rappels sur les sommes de sev . . . 85
1.10 Compléments sur les sommes de sev . . . 90
2 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie . . . 92
3 Matrices . . . 94
3.1 Produit matriciel . . . 94
3.2 Rang d'une matrice . . . 97
3.3 Opérations élémentaires . . . 98
3.4 Représentations matricielles . . . 100
3.5 Changements de base . . . 104
3.6 Déterminants . . . 106
3.7 Polynômes annulateurs . . . 109
4 Exercices . . . 113

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie et introduction aux fonctions de plusieurs variables **123**
1 Espaces vectoriels normés . . . 124
1.1 Normes . . . 124
1.2 Boules ouvertes, boules fermées et sphères . . . 127
1.3 Parties convexes . . . 129
1.4 Parties bornées . . . 130
2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé . . . 132
2.1 Convergence d'une suite dans un evn . . . 132

2.2 Suites extraites . . . 133
2.3 Cas de la dimension finie . . . 134
3 Topologie d'un espace vectoriel normé . . . 135
3.1 Ouverts, fermés . . . 135
3.2 Intérieur, adhérence, frontière . . . 139
4 Introduction au calcul différentiel . . . 140
4.1 Fonctions numériques de n variables réelles . . . 140
4.2 Dérivées partielles . . . 142
5 Exercices . . . 144

5 Intégrales généralisées 147
1 Définition des intégrales généralisées . . . 148
1.1 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle . . . 148
1.2 Intégrale impropre sur $[a,+\infty[$ . . . 151
1.3 Cas d'un intervalle $[a,b[$ . . . 154
1.4 Cas d'un intervalle $]a,b]$ . . . 155
1.5 Cas d'un intervalle $]a,b[$ . . . 155
1.6 Cas d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ . . . 156
2 Propriétés des intégrales généralisées . . . 157
2.1 Relation de Chasles pour les intégrales généralisées . . . 157
2.2 Linéarité des intégrales généralisées . . . 157
2.3 Positivité des intégrales convergentes . . . 158
2.4 Croissance des intégrales convergentes . . . 159
2.5 Intégrales de références . . . 159
3 Calcul des intégrales généralisées . . . 160
3.1 À l'aide d'une primitive . . . 160
3.2 Intégration par parties . . . 160
3.3 Changement de variables . . . 161
4 Fonctions intégrables . . . 162
4.1 Convergence absolue et fonctions intégrables . . . 162
4.2 Critères de comparaison des fonctions positives . . . 163
4.3 Espaces vectoriels associés aux fonctions intégrables . . . 166
5 Méthodologie pour étudier la nature d'une intégrale généralisée . . . 167
6 Exercices . . . 168

6 Interversions de limite et d'intégrales 173
1 Suites et fonctions définies par une intégrale . . . 174
1.1 Théorème de convergence dominée . . . 174
1.2 Technique d'interversion série-intégrale . . . 175
1.3 Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions . . . 177
2 Intégrales à paramètre . . . 177
2.1 Continuité d'une fonction définie par une intégrale . . . 178
2.2 Dérivation d'une fonction définie par une intégrale . . . 179
3 Exercices . . . 182

7 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées 185
1 Éléménts propres . . . 186
1.1 Sous-espaces stables . . . 186
1.2 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme . . . 187
1.3 Propriétés des éléments propres . . . 188

1.4 Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice 189
2 Diagonalisation et trigonalisation 191
2.1 Diagonalisation en dimension finie 191
2.2 Applications de la diagonalisation 194
2.2.1 Calcul des puissances d'une matrice 194
2.2.2 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants 194
2.3 Trigonalisation 195
3 Exercices 197

8 Suites de fonctions 201
1 Convergence simple, uniforme d'une suite de fonctions 202
1.1 Convergence simple sur un intervalle 202
1.2 Convergence uniforme sur un intervalle 205
1.3 Norme de la convergence uniforme 207
2 Propriétés de la fonction limite 209
3 Interversion limite-intégrale 212
3.1 Intégration sur un segment et convergence uniforme 212
4 Dérivation et convergence uniforme 213
5 Exercices 215

9 Polynômes d'endomorphismes et application à la réduction 221
1 Polynôme caractéristique 222
1.1 Propriétés élémentaires 222
1.2 Lien avec les valeurs propres 224
1.3 Rappels sur les polynômes 225
1.4 Lien avec la dimension des sous-espaces propres 226
1.5 Lien avec la diagonalisation 227
1.6 Lien avec la trigonalisation 228
1.7 Conséquences de la trigonalisation 229
2 Application des polynômes annulateurs à la réduction 230
2.1 Premières propriétés des polynômes annulateurs 230
2.2 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité 230
2.3 Restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable 231
2.4 Théorème de Cayley-Hamilton 232
3 Exercices 233

10 Séries de fonctions 239
1 Modes de convergence d'une série de fonctions 240
1.1 Convergence simple 240
1.2 Convergence uniforme 241
1.3 Convergence normale 243
2 Propriétés des séries de fonctions uniformément convergente 244
2.1 Interversion $\sum$ et limite 244
2.2 Continuité d'une série de fonctions 245
2.3 Intégration des signes somme et intégrale 246
2.4 Dérivation d'une série de fonctions 246
3 Exercices 248

11 Continuité d'une fonction entre deux espaces vectoriels normés **253**
1 Étude locale d'une application, continuité . . . 254
1.1 Limite d'une fonction entre deux espaces vectoriels normés . . . 254
1.2 Opérations sur les limites . . . 255
1.3 Utilisation des coordonnées . . . 256
1.4 Continuité . . . 256
2 Continuité d'une fonction sur une partie . . . 257
2.1 Définition . . . 257
2.2 Opérations sur les fonctions continues sur une partie . . . 258
2.3 Fonctions lipschitziennes . . . 258
2.4 Propriétés topologiques des fonctions continues . . . 259
2.5 Exemples usuels de fonctions continues sur un evn . . . 259
2.5.1 Applications linéaires . . . 259
2.5.2 Applications multilinéaires . . . 260
2.5.3 Applications polynômiales à plusieurs variables . . . 260
2.6 Théorème des bornes atteintes . . . 260
3 Exercices . . . 262

12 Espaces probabilisés **267**
1 Dénombrement . . . 268
1.1 Ensembles finis, ensembles dénombrables . . . 268
1.2 Dénombrement associés aux ensembles finis . . . 270
1.2.1 Dénombrement dans un ensemble fini . . . 270
1.2.2 Dénombrement de p-listes . . . 271
1.2.3 Dénombrement des applications entre ensembles finis . . . 272
1.3 Coefficients binômiaux . . . 273
1.4 Techniques de dénombrement . . . 275
2 Vocabulaire et axiomatique des probabilités . . . 277
2.1 L'univers . . . 277
2.2 Évènements . . . 278
2.3 Opérations sur les évènements . . . 279
2.4 La tribu des évènements . . . 281
2.5 Systèmes complets d'évènements . . . 282
2.6 Probabilités sur un espace probabilisé quelconque . . . 283
2.7 Construction d'une probabilité sur un univers donné . . . 284
2.7.1 Cas d'un univers fini . . . 284
2.7.2 Cas d'un univers infini dénombrable . . . 286
2.8 Exemple d'univers infini non dénombrable : $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. . . . 287
2.9 Propriétés de continuité monotone pour une probabilité . . . 287
2.10 Évènements négligeables et presque sûrs . . . 288
3 Probabilités conditionnelles . . . 289
3.1 Définition . . . 289
3.2 Formule des probabilités composées . . . 290
3.3 Formule des probabilités totales . . . 291
3.4 Formule de Bayes . . . 294
4 Indépendance . . . 295
4.1 Indépendance de deux évènements . . . 295
4.2 Indépendance mutuelle . . . 296
4.2.1 Cas de n évènements . . . 296

4.2.2 Cas d'une famille infinie d'évènements . . . 296
4.2.3 Propriétés de l'indépendance . . . 297
4.3 Compléments sur la formule des probabilités totales : propriété de Markov 298
5 Exercices . . . 300

13 Variables aléatoires discrètes infinies 309
1 Variables aléatoires discrètes . . . 310
1.1 Définitions . . . 310
1.2 Évènements associés à une VARD . . . 311
1.3 Loi de probabilité d'une VARD . . . 312
1.4 Fonction de répartition d'une VARD . . . 314
1.5 L'expérience a-t-elle une fin ? . . . 315
1.6 Transfert de loi . . . 318
2 Espérance mathématique d'une VARD . . . 319
2.1 Espérance mathématique d'une VARD . . . 319
2.2 Théorème de transfert . . . 321
2.3 Variance d'une VARD . . . 322
3 Lois usuelles . . . 324
3.1 Loi certaine . . . 324
3.2 Loi uniforme . . . 325
3.3 Loi de Bernoulli . . . 326
3.4 Loi binomiale . . . 327
3.5 Loi géométrique . . . 328
3.6 Loi de Poisson . . . 331
4 Exercices . . . 333

14 Espaces préhilbertiens et euclidiens 339
1 Produit scalaire et norme associée . . . 340
1.1 Produit scalaire . . . 340
1.2 Norme euclidienne . . . 341
2 Orthogonalité . . . 343
3 Bases orthonormales . . . 344
4 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie . . . 348
5 Formes linéaires sur un espace euclidien . . . 352
6 Exercices . . . 353

15 Séries entières 361
1 Généralités . . . 362
1.1 Rayon de convergence . . . 362
1.2 Calcul du rayon de convergence . . . 366
1.3 Opérations algébriques sur les séries entières . . . 368
1.4 Séries entières d'une variable réelle . . . 370
2 Fonctions développables en série entière . . . 371
2.1 Définitions . . . 371
2.2 DSE usuels . . . 373
3 Applications des séries entières . . . 374
3.1 DSE d'une fonction . . . 374
3.2 Régularité d'une fonction . . . 374
3.3 Équations différentielles . . . 374
3.4 Calcul de la somme d'une série entière . . . 375

3.5 Suites récurrentes, dénombrement . . . 375
3.6 Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète à valeurs entières 375
4 Exemples de séries entières d'une variable complexe . . . 377
5 Exercices . . . 379

16 Endomorphismes des espaces euclidiens 385
1 Endomorphismes orthogonaux, matrices orthogonales . . . 386
1.1 Endomorphismes ortohogonaux . . . 386
1.2 Matrices orthogonales . . . 388
1.3 Groupe spécial orthogonal . . . 389
2 Groupe orthogonal en dimension 2 et 3 . . . 390
2.1 Orientation d'un espace euclidien . . . 390
2.2 Isométries vectorielles d'un plan euclidien . . . 394
2.3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3 . . . 396
3 Endomorphismes symétriques . . . 398
4 Exercices . . . 401

17 Couples discrets 407
1 Couples de variables aléatoires discrètes . . . 408
1.1 Couple discret . . . 408
1.2 Évènements associés à un couple discret . . . 408
1.3 Loi conjointe d'une couple discret . . . 409
1.4 Lois marginales . . . 410
1.5 Lois conditionnelles . . . 412
1.6 Indépendance de VARD . . . 412
1.7 Fonction génératrice d'une somme de VARD . . . 416
2 Covariance d'un couple discret . . . 416
2.1 Théorème de transfert pour les couples discrets de VARD finies . . . 416
2.2 Covariance de deux VARD finies . . . 417
2.3 Variance d'une somme de VARD . . . 419
2.4 Coefficient de corrélation d'un couple de VARD . . . 420
3 Convergences et approximations . . . 421
3.1 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev . . . 421
3.2 Approximation binomiale-Poisson . . . 422
4 Exercices . . . 423

18 Équations différentielles linéaires 429
1 Équations du premier ordre scalaires . . . 430
1.1 Généralités . . . 430
1.2 Problèmes de raccord . . . 432
2 Systèmes différentiels . . . 433
2.1 Généralités . . . 433
2.2 Systèmes linéaires homogènes à coefficients constants . . . 435
3 Équations différentielles linéaires du second ordre . . . 436
3.1 Cas général . . . 436
3.2 Résolution de l'équation avec second membre . . . 438
3.2.1 Méthode générale . . . 438
3.2.2 Recherche de solutions polynomiales . . . 439
3.2.3 Recherche de solutions développables en série entière . . . 440
3.3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants . . . 440

4 Exercices 442

19 Calcul différentiel **447**
1 Fonctions de classe C^1 448
1.1 Rappels 448
1.2 Fonctions de classe C^1 449
1.3 Règle de la chaîne et applications 451
2 Applications géométriques 453
2.1 Courbes dans le plan 453
2.2 Surfaces dans l'espace 457
3 Extremums 460
3.1 Définitions 460
3.2 Points critiques 461
3.3 Recherche d'extremums sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ 462
4 Dérivées partielles d'ordre deux 463
4.1 Généralités 463
4.2 Exemples d'équations aux dérivées partielles 464
4.3 Dérivées successives d'intégrales à paramètres 465
5 Exercices 467

20 Fonctions vectorielles et arcs paramétrées **473**
1 Dérivabilité des fonctions vectorielles 474
1.1 Généralités 474
1.2 Opérations sur les fonctions dérivables 475
1.3 Fonctions de classe C^k 477
2 Arcs paramétrés 478
2.1 Généralités 478
2.2 Tracé d'un arc paramétré plan 479
2.2.1 Réduction de l'intervalle d'étude 479
2.2.2 Étude locale au voisinage d'un point stationnaire 480
2.2.3 Branches infinies des courbes paramétrées 481
2.2.4 Plan d'étude 481
2.2.5 Courbes paramétrées classiques 482
2.3 Longueur d'un arc paramétré de classe C^1 486
2.4 Courbes tracées sur une surface 486
3 Exercices 488

Chapitre 1

Révisions et compléments d'analyse

Sommaire

1 Étude d'une fonction 14
1.1 Théorèmes liés à la continuité 14
1.2 Théorèmes liés à la dérivabilité 16
2 Majorations classiques 18
3 Trigonométrie 19
4 Fonctions usuelles 20
4.1 Exponentielles, logarithmes 20
4.2 Fonctions puissances 22
4.3 Fonctions trigonométriques 23
4.4 Fonctions hyperboliques 24
4.5 Fonctions arcsin et arccos 25
4.6 Fonction arctan 28
5 Intégrale sur un segment d'une fonction continue 29
5.1 Propriétés élémentaires 29
5.2 Théorème fondamental du calcul et applications 30
5.3 Calcul intégral 32
5.4 Intégration par parties 32
5.5 Changement de variable 33
5.6 Calculs de primitives 33
5.7 Sommes de Riemann 34
5.8 Formules de Taylor 34
6 Étude de suites 36
6.1 Propriétés générales 36
6.2 Suites récurrentes usuelles 38
6.3 Croissances comparées 38
6.4 Analyse asymptotique 39
6.5 Recherche d'équivalents 40
7 Exercices 43

1 Étude d'une fonction

1.1 Théorèmes liés à la continuité

Rappelons la définition de la continuité.

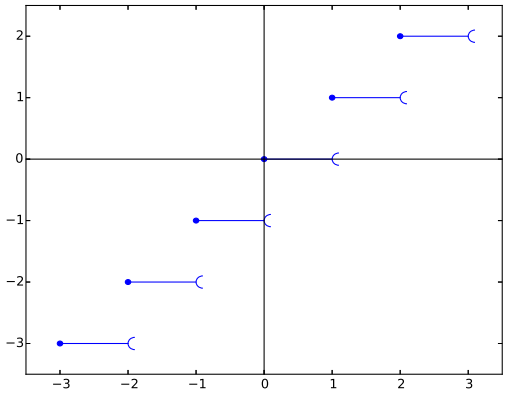
Définition 1 – Continuité d'une fonction

1. Soit f une fonction définie en un point a.
   On dit que f est *continue en a* lorsque : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
   On dit que f est *continue sur I* lorsque f est continue en tout point $a \in I$.

✎ ***Exemple.*** Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition, excepté la fonction partie entière qui est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

On peut affiner cette notion en continuité à droite, à gauche. Une fonction est continue en un point a si, et seulement si, elle est à la fois continue à droite et à gauche.

✎ ***Exemple.*** En tout point $a \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière est continue à droite et discontinue à gauche.



Si f est définie sur un intervalle I privé d'un point a, il est toujours possible de prolonger la fonction en ce point en donnant une valeur arbitraire à $f(a)$. On obtient alors une fonction définie sur I, mais qui n'est en général pas continue en a. Le théorème suivant règle le problème.

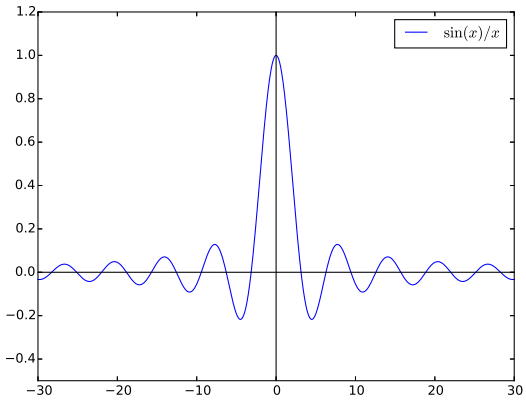
Théorème 2 – Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I privé d'un point a.
Supposons que f admet une limite finie en a, notée ℓ.
On définit la fonction $\widetilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\widetilde{f}(a) = \ell$ et $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \neq a$.
La fonction $\widetilde{f}$ est alors définie et continue sur I.

La plupart du temps, le prolongement $\widetilde{f}$ est encore noté f, pour simplifier les notations.

✎ ***Exemple.*** La fonction $f : x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Comme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, on peut la prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. La fonction f ainsi prolongée est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On aurait pu poser $f(0) = 0$. Dans ce cas la fonction f ainsi prolongée serait définie sur $\mathbb{R}$, mais continue seulement sur $\mathbb{R}^*$.



Les deux principaux théorèmes sont les suivants.

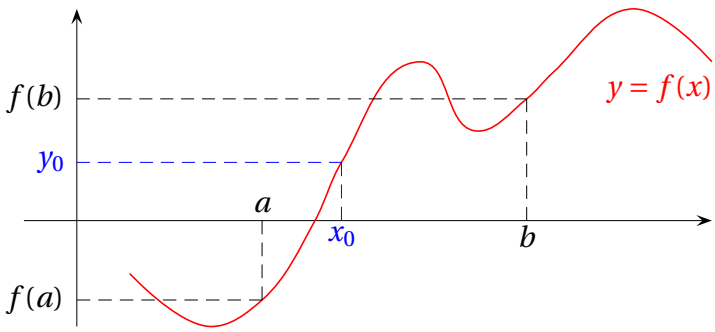
Théorème 3 – Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue sue l'intervalle $[a, b]$, alors f prend toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$:

$$\forall y_0 \in [f(a), f(b)], \quad \exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) = y_0$$

ce qui peut aussi s'écrire plus simplement :

$$[f(a), f(b)] \subseteq f\big([a, b]\big)$$



⚠ Dans la notation $[f(a), f(b)]$, on ne sous-entend pas que $f(a) \leq f(b)$, on peut très bien avoir $f(a) > f(b)$.

Ce théorème a deux corollaires important.

Corollaire 4 – Image d'un intervalle par une fonction continue

Si I est un intervalle et si f est continue sur I alors $J = f(I)$ est aussi un intervalle.

Corollaire 5 – Signe d'une fonction continue sur un intervalle

Soit f continue sur un intervalle I.
• Si f ne s'annule pas sur I, alors f est de signe constant au sens strict sur I :

$$\forall x \in I,\ f(x) > 0 \qquad \text{ou} \qquad \forall x \in I,\ f(x) < 0$$

• Par contraposée si la fonction change de signe sur I

$$\exists (x_1, x_2) \in I^2 \text{ tel que } x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1)f(x_2) \leq 0$$

alors elle s'annule sur I.

Le second théorème est le suivant.

Théorème 6 – Théorème de continuité sur un segment

Soit f continue sur un segment $[a, b]$.
Alors $f\big([a, b]\big)$ est aussi un segment. Précisons : cela signifie que $f\big([a, b]\big) = [m, M]$ où on a posé

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

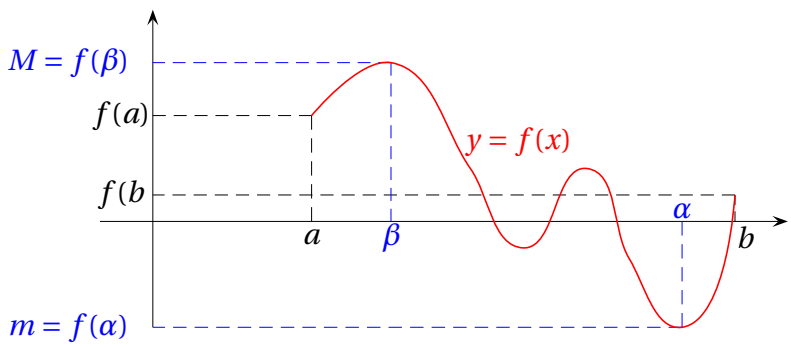
Rappelons que, par définition d'un minimum et d'un maximum, ces bornes sont atteintes, donc :

$$\exists \alpha \in [a, b] /\ m = f(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \exists \beta \in [a, b] /\ M = f(\beta)$$

et ainsi :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$$

Autrement dit : f est **bornée et atteint ses bornes**.



1.2 Théorèmes liés à la dérivabilité

Définition 7 – Dérivabilité d'une fonction

1. Soit f une fonction définie en un point a.
   On dit que f est *dérivable en a* lorsque la taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite finie quand $x \to a$.

Dans ce cas on pose : $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
   On dit que f est *dérivable sur I* lorsque f est dérivable en tout point $a \in I$.

On peut affiner cette notion en dérivabilité à droite, à gauche. Une fonction est dérivable en un point a si, et seulement si, elle est à la fois dérivable à droite et à gauche, et si ses dérivées à gauche et à droite sont égales : $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Rappelons le lien avec la continuité.

Théorème 8 – Dérivable implique continue

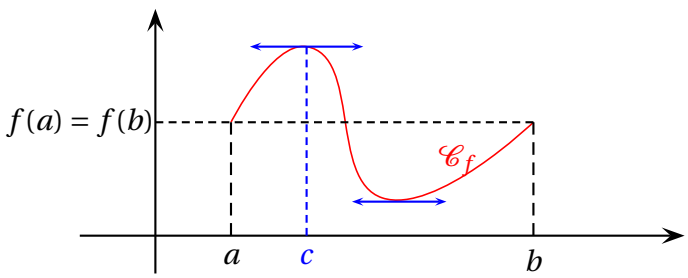
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

✎ ***Exemple.*** Les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition, exceptées :
- les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ pour $0 < \alpha < 1$ qui sont continues sans être dérivables en 0 ;
- les fonctions arcsin et arccos qui sont continues sans être dérivables en -1 et 1.

Premier théorème important.

Théorème 9 – Théorème de Rolle

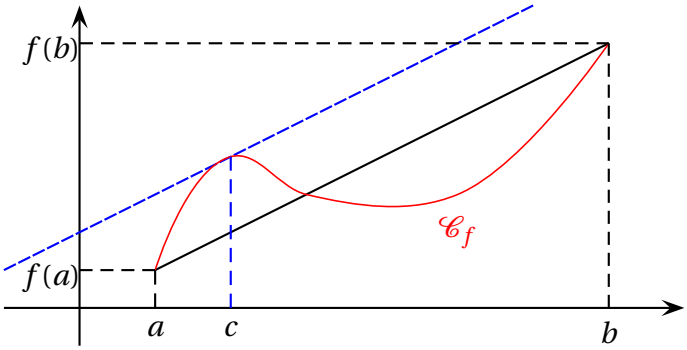
1. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue* sur $[a, b]$, *dérivable* sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
   Alors :
   $$\exists c \in]a, b[/ \ f'(c) = 0$$
2. Si f est de classe C^n sur $[a, b]$ et s'annule $n + 1$ fois, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.



✎ ***Exemple.*** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Montrer que P' est lui aussi scindé à racines simples.

Théorème 10 – Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue* sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors :
$$\exists c \in]a, b[/ \ f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Corollaire 11 – Inégalité des accroissements finis

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :
(i) f est dérivable sur I ;
(ii) $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$.
Alors :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq M \times |y - x|$$

2 Majorations classiques

Quelques inégalités classiques à connaître et à utiliser en analyse :

1. En remarquant que, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $(a+b)^2 \geq 0$ et $(a-b)^2 \geq 0$, on obtient :

$$\boxed{|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}}$$

2. Pour $2n$ réels $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\boxed{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}}$$

   C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisée avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

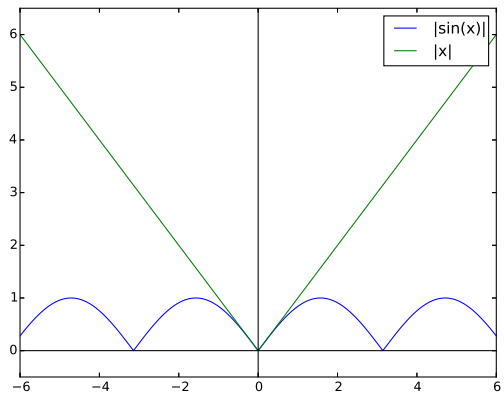
3.

   Il est bien connu que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\left|\sin(x)\right| \leq 1}, \quad \boxed{\left|\cos(x)\right| \leq 1}$$

   L'inégalité des accroissements finis donne une autre inégalité intéressante pour x proche de 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\left|\sin(x)\right| \leq |x|}$$

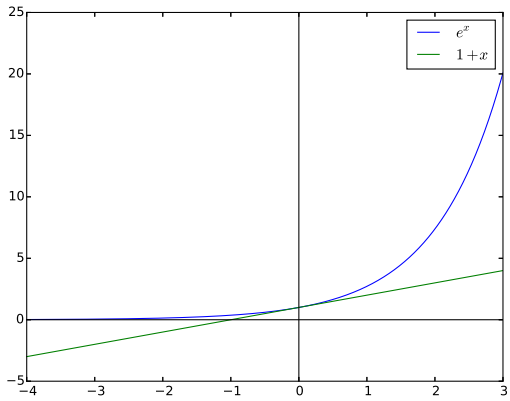


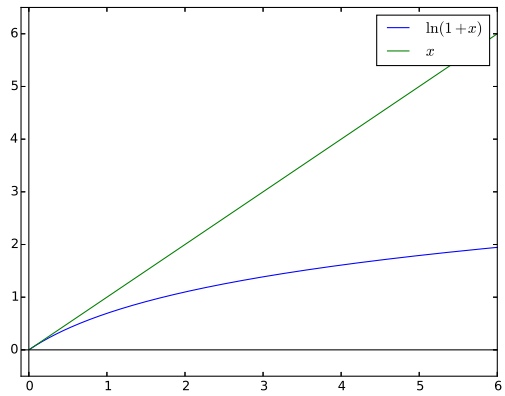
4. Avec le théorème des accroissements finis on montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{e^x \geq 1 + x}$$

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \boxed{\ln(1+x) \leq x}$$

On peut aussi démontrer ces inégalités par des études élémentaires de fonction.





✎ ***Exemple.*** Montrer que la fonction de deux variables

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

est bornée ie montrer que : $\exists M > 0 / \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x, y)| \leq M$

3 Trigonométrie

Les fondamentales :

$$\begin{array}{rcl|rcl} \cos(a+b) & = & \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \operatorname{ch}(a+b) & = & \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \\ \cos(a-b) & = & \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) & \operatorname{ch}(a-b) & = & \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \\ \sin(a+b) & = & \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & \operatorname{sh}(a+b) & = & \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) \\ \sin(a-b) & = & \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) & \operatorname{sh}(a-b) & = & \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \cos(2a) & = & \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \\ \sin(2a) & = & 2\sin(a)\cos(a) \\ \operatorname{ch}(2a) & = & \operatorname{ch}^2(a) + \operatorname{sh}^2(a) = 2\operatorname{ch}^2(a) - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2(a) \\ \operatorname{sh}(2a) & = & 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(a) \end{array}$$

Formules de linéarisation :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos^2(a) & = & \dfrac{\cos(2a)+1}{2} \\ \sin^2(a) & = & \dfrac{1-\cos(2a)}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{ch}^2(a) & = & \dfrac{\mathrm{ch}(2a)+1}{2} \\ \mathrm{sh}^2(a) & = & \dfrac{\mathrm{ch}(2a)-1}{2} \end{array}}$$

Remarque. Il est impossible de se tromper sur ces formules. Il suffit (pour les fonctions hyperboliques) de faire $a = 0$ et $a \to +\infty$: La formule suivante est fausse :

$$\mathrm{ch}(2a) = 1 - 2\,\mathrm{sh}^2(a)$$

($a \to +\infty$ ne va pas !)

Remarque. Lorsqu'on rencontre un groupement $\sqrt{1+\cos(\theta)}$ ou $\sqrt{1-\cos(\theta)}$, penser à l'angle moitié :

$$\boxed{\sqrt{1+\cos(\theta)} = \sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}, \quad \boxed{\sqrt{1-\cos(\theta)} = \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

On retrouve rapidement les autres à partir des formules de base :

$$\begin{array}{rcl} \cos(a)\cos(b) & = & \dfrac{1}{2}\big[\cos(a+b)+\cos(a-b)\big] \\ \sin(a)\sin(b) & = & \dfrac{1}{2}\big[\cos(a-b)-\cos(a+b)\big] \\ \sin(a)\cos(b) & = & \dfrac{1}{2}\big[\sin(a+b)+\sin(a-b)\big] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \cos(p)+\cos(q) & = & 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p)+\sin(q) & = & 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1+\tan^2(x) & = & \dfrac{1}{\cos^2(x)} \\ \tan(a+b) & = & \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \\ \tan(a-b) & = & \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} \\ \tan(2a) & = & \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)} \end{array}$$

4 Fonctions usuelles

4.1 Exponentielles, logarithmes

Exponentielle en base a : $\boxed{a^x = e^{x\ln a}}$ $(a > 0)$

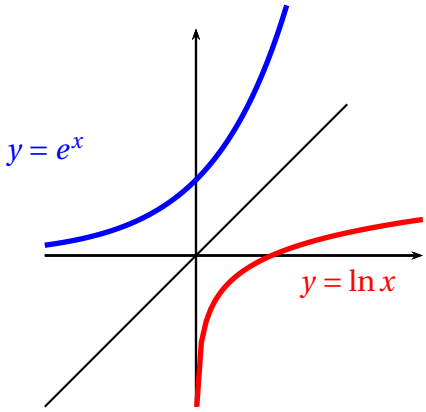


FIGURE 1.1 – Exponentielle et logarithme

Logarithme en base a : $\boxed{\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}}$

On connaît un développement limité de e^x au voisinage de 0 :

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

en particulier à l'ordre 2 :

$$\boxed{\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right)}$$

On en déduit l'équivalent usuel suivant au voisinage de 0 :

$$\boxed{\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

Rappelons que $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

✎ ***Exemple.*** Trouver un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = 2^{\cos(x)}$ $\left(\text{solution } f(x) \underset{x\to 0}{=} 2 - x^2.\ln(2) + o\left(x^2\right)\right)$.

On connaît un développement limité du logarithme $\ln(y)$ pour y au voisinage de 1 :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$$

en particulier à l'ordre 2 :

$$\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}$$

d'où l'équivalent :

$$\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

✎ ***Exemple.*** Trouver un $DL_2(0)$ de la fonction définie par $f(x) = \log_2\left(\dfrac{2-x}{3+x}\right)$
$\left(\text{solution } f(x) \underset{x\to 0}{=} \log_2(2/3) - \dfrac{5}{6\ln 2}x - \dfrac{5}{72\ln 2}x^2 + o\left(x^2\right)\right)$.

Remarque. Si vous devez manipuler une fonction (ou une suite) où la variable (l'indice) est en exposant, passer sous forme exponentielle :

$$\boxed{f(x) = \alpha(x)^{\beta(x)} = e^{\beta(x)\ln\alpha(x)}}$$

$$\boxed{u_n^{v_n} = e^{v_n \ln(u_n)}}$$

On appellera cette technique **méthode d'exponentiation**.

✎ ***Exemple.*** Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

4.2 Fonctions puissances

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit

$$\begin{array}{rccl} f_\alpha : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \boxed{x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}} \end{array}$$

✎ ***Exemple.*** Comparer x^α et x^β pour $x > 0$. Visualiser ce résultat sur la figure 1.2.

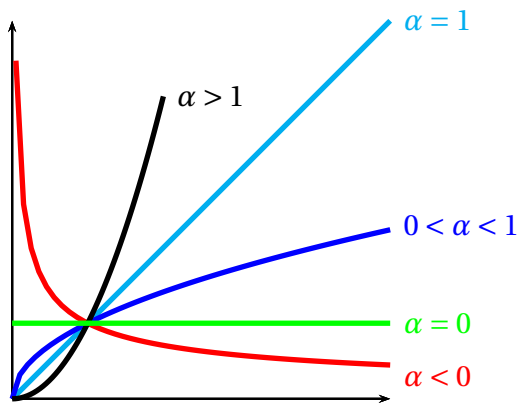


FIGURE 1.2 – Fonctions puissances

On connaît un développement limité d'une fonction puissance y^α pour y au voisinage de 1 sous la forme :

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$$

en particulier à l'ordre 2 :

$$\boxed{(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o\left(x^2\right)}$$

On en déduit l'équivalent usuel :

$$\boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x}$$

Remarque. Attention, dans la formule précédente, α ne dépend pas de la variable x. Si c'est le cas, penser à la méthode d'exponentiation !

✎ ***Exemple.*** Donner un $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}$, $\dfrac{1}{1-x}$.

✎ ***Exemple.*** Donner un $DL_2(0)$ de $\sin\left(\sqrt{1+x}\right)$ et $(1+x)^x$.

4.3 Fonctions trigonométriques

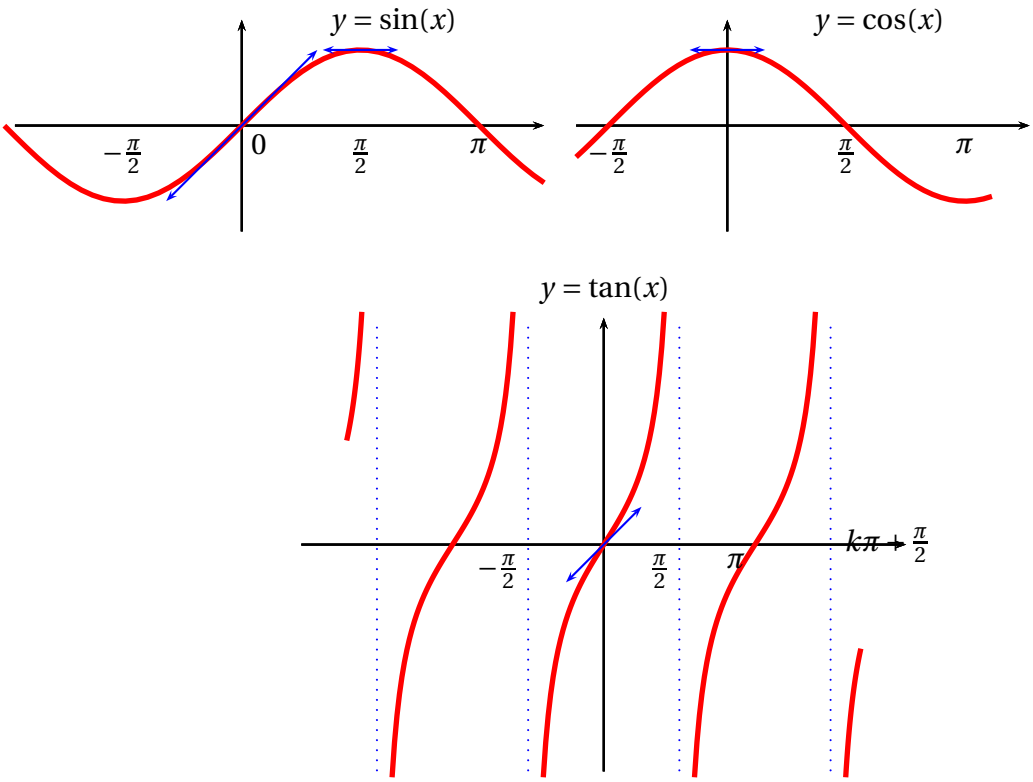


FIGURE 1.3 – Fonctions sin, cos et tan

Elles sont reliées à l'exponentielle complexe par les formules d'Euler :

$$\boxed{\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$$

On connaît leur développement limité en 0 :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

en particulier à l'ordre 4 :

$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)}$$

et à l'ordre 3 :

$$\boxed{\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)}$$

On en déduit les équivalents usuels :

$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

$$\boxed{1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}}$$

Rappelons que $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

On définit la fonction tangente sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi+\frac{\pi}{2}\}$ par $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On connaît par coeur son $DL_4(0)$:

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^4\right)}$$

et son équivalent usuel en 0 :

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

✎ ***Exemple.*** En utilisant l'équation différentielle vérifiée par la tangente trouver son $DL_4(0)$:

$$\tan'(x)=1+\tan^2(x)$$

4.4 Fonctions hyperboliques

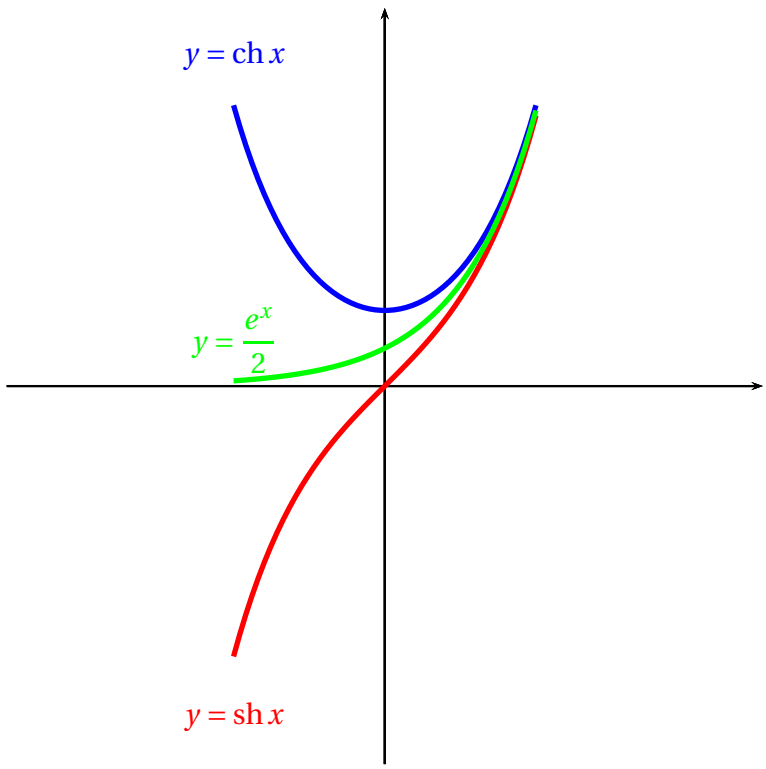


FIGURE 1.4 – Fonctions sh et ch

Elles sont définies à partir de l'exponentielle réelle (partie paire et impaire) par :

$$\boxed{\operatorname{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}}$$

On connaît leur développement limité en 0 :

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

en particulier à l'ordre 3 :

$$\boxed{\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)}$$

et à l'ordre 4 :

$$\boxed{\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)}$$

d'où les équivalents usuels :

$$\boxed{\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

4.5 Fonctions arcsin et arccos

4.5.1 Rappels de première année

On rappelle que si f est une fonction **continue** et **strictement croissante** sur un **intervalle** I, alors :

- l'ensemble $J = f(I)$ est lui aussi un intervalle de $\mathbb{R}$ (on le détermine à l'aide du tableau de variations de f) ;
- f est une bijection de I sur J ;
- la bijection réciproque f^{-1} est continue sur J ;
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ si, et seulement si, $\lim\limits_{y\to b} f^{-1}(y) = a$;
- les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

De plus si f est **dérivable** sur I et f' **ne s'annule pas** sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\forall y \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

Si f est dérivable en $a \in I$ mais $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $b = f(a) \in J$ (par symétrie par rapport à $y = x$, une tangente horizontale devient verticale).

✎ ***Exemple.*** $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, et $\ln^{-1} = \exp$.

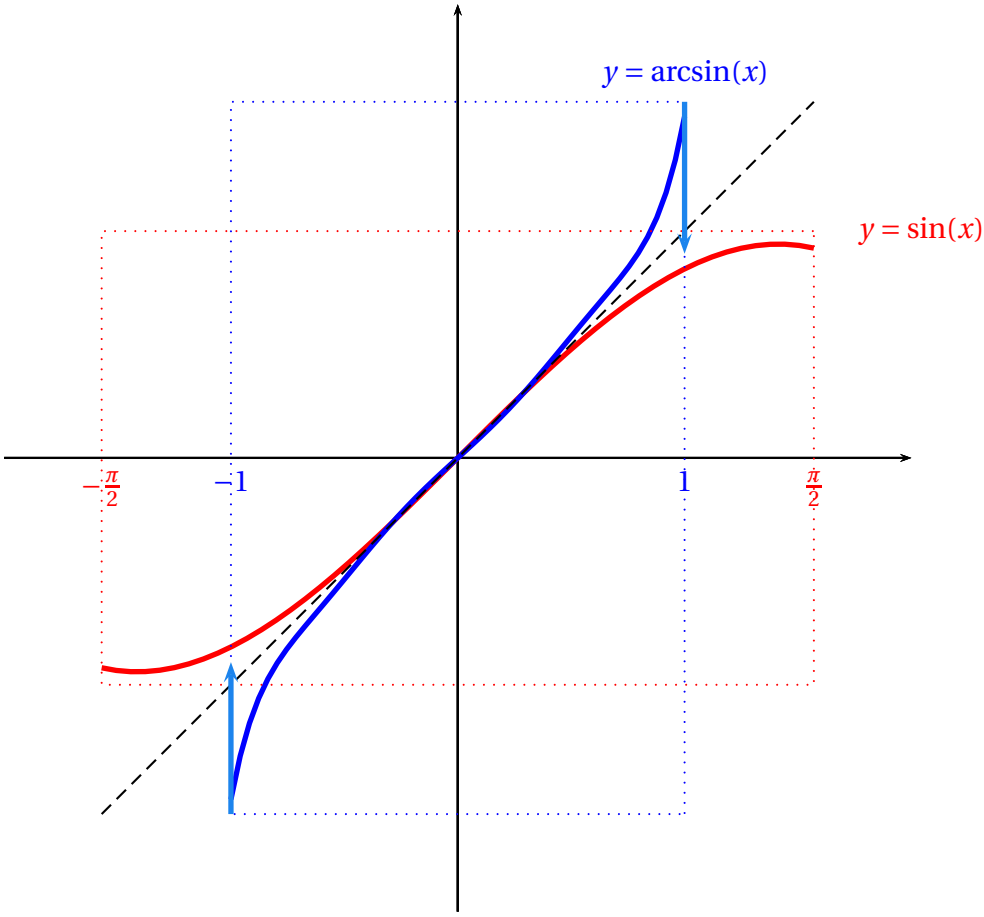
✎ ***Exemple.*** Pour $\alpha \neq 0$, $x \longmapsto x^\alpha$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, de bijection réciproque $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.

4.5.2 Fonctions circulaires réciproques

La **restriction** de la fonction sin au segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1, 1]$. La fonction arcsin est la bijection réciproque de cette restriction.

Quelques valeurs particulières à connaître :

$$\begin{aligned}
\arcsin(0) &= 0 \\
\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{6} \\
\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{\pi}{4} \\
\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{\pi}{3} \\
\arcsin(1) &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$



Remarque. Attention à ne pas simplifier abusivement : $\arcsin\big(\sin(x)\big)$ qui est défini sur $\mathbb{R}$.

Uniquement :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin\big(\sin(x)\big) = x$$

$$\boxed{(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a}}$$

On connaît un équivalent de arcsin au voisinage de 0 :

$$\boxed{\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

On obtient un $DL_n(0)$ de arcsin au voisinage de 0 par primitivation du DL de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$.

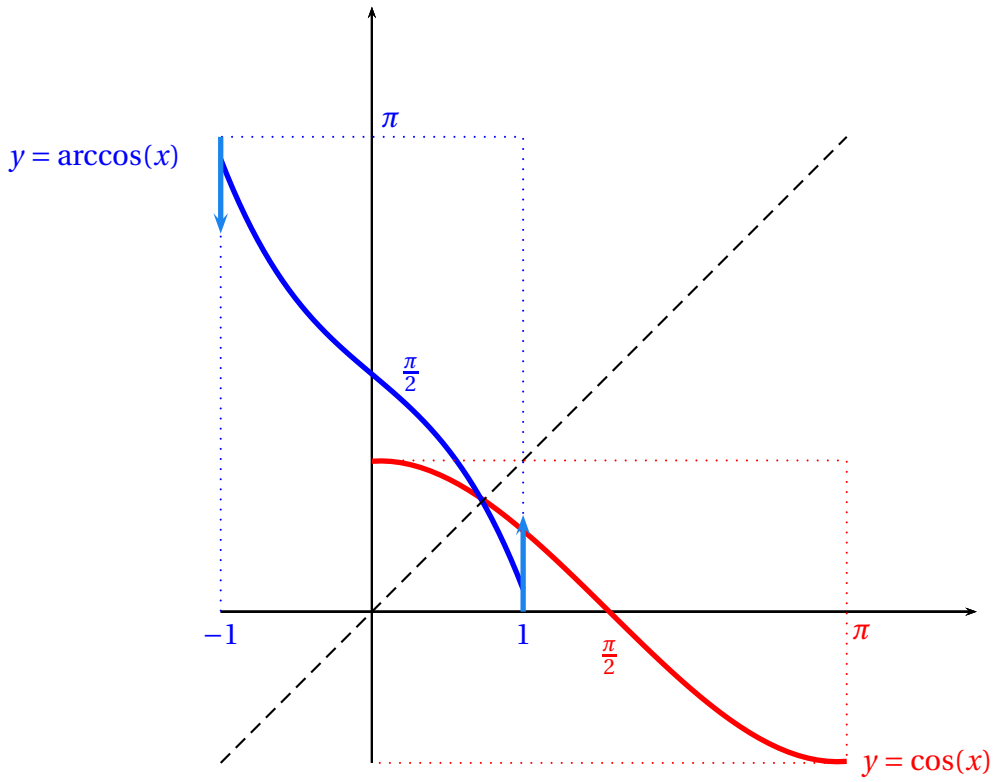
✎ ***Exemple.*** Donner le $DL_3(0)$ de $\arcsin(x)$.

Sur $[0,\pi]$, la fonction cosinus est continue strictement décroissante vers $[-1,1]$. On définit sa bijection réciproque arccos : $[-1,1] \mapsto [0,\pi]$.

La relation suivante lie les fonctions arcsin et arccos. En pratique, on transforme la fonction arccos en arcsin dans les études de fonctions :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \boxed{\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

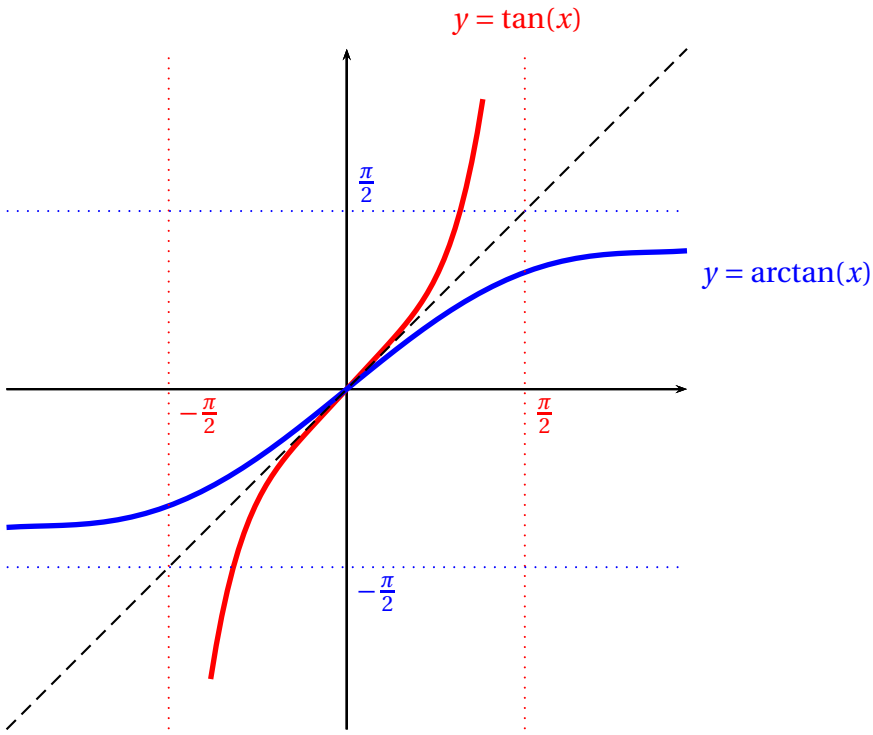


Quelques valeurs particulières à connaître :

$$\begin{aligned}\arccos(0) &= \frac{\pi}{2}\\ \arccos(1/2) &= \frac{\pi}{3}\\ \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{\pi}{4}\\ \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{\pi}{6}\\ \arccos(1) &= 0\end{aligned}$$

4.6 Fonction arctan

Sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction tangente est continue strictement croissante vers $\mathbb{R}$. On définit sa bijection réciproque $\arctan : \mathbb{R} \mapsto \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.



Quelques valeurs particulières à connaître :

$$\begin{aligned}\arctan(0) &= 0\\ \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{\pi}{6}\\ \arctan(1) &= \frac{\pi}{4}\\ \arctan(\sqrt{3}) &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Remarque. Ne pas simplifier abusivement $\arctan\big(\tan(x)\big)$ en x, ce n'est valable que si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

z La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Une primitive très importante :

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}}$$

On connaît un $DL_{2n+2}(0)$ obtenu en primitivant le $DL_{2n+1}(0)$ de $\dfrac{1}{1+x^2}$:

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\big(x^{2n+2}\big)$$

en particulier à l'ordre 3 :

$$\boxed{\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o\big(x^4\big)}$$

d'où l'équivalent usuel :

$$\boxed{\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

On dispose de la relation suivante qui permet d'obtenir le comportement de arctan au voisinage de $\pm\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \boxed{\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{signe}(x) \times \frac{\pi}{2}}$$

✎ ***Exemple.*** Trouver un équivalent lorsque $x \to +\infty$ de $\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right)$.

5 Intégrale sur un segment d'une fonction continue

5.1 Propriétés élémentaires

Dans le prolongement du programme de première année, une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ n'existe que si la fonction f est *continue* sur le *segment* $[a, b]$.

⚠ On ne sait donc pas justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \ldots$

En général, on ne peut pas permuter *sans preuve* les symboles limites et intégrales : à priori $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) \neq \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t$. Pour calculer la limite d'une intégrale, on commence toujours par comprendre *intuitivement* ce qu'il se passe afin de deviner la valeur de la

limite. Pour montrer *rigoureusement* le résultat, on majore l'*erreur* (ou *reste*, i.e. la différence entre l'intégrale et la limite devinée), en valeur absolue.

Pour majorer une intégrale, n'utiliser que les propriétés fondamentales suivantes :

Inégalité triangulaire $\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt}$ $(a \leq b)$

Croissance $\boxed{\forall t \in [a,b],\ f(t) \leq g(t) \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt}$ $(a \leq b)$

Cauchy-Schwarz $\boxed{\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)^{1/2} \times \left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)^{1/2}}$

✎ ***Exemple.*** Trouver la limite des suites de terme général

$$I_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{\sin(x^n)}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

✎ ***Exemple.*** Déterminer les limites

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

✎ ***Exemple.*** Soit f une fonction de classe C^1 sur le segment $[a,b]$. Vérifier que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt\right) = 0$$

Théorème 12 – Une fonction continue, positive d'intégrale nulle est nulle

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que
- f est *continue* sur $[a,b]$,
- $\forall t \in [a,b],\ f(t) \geq 0$,
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$.

Alors $\forall t \in [a,b],\ f(t) = 0$.

De manière équivalente, si f est *continue* et *positive* sur $[a,b]$, et *non identiquement nulle* $\left(\exists t_0 \in [a,b] / f(t_0) \neq 0\right)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

5.2 Théorème fondamental du calcul et applications

Le théorème fondamental fait le lien entre calcul différentiel et calcul intégral :

Théorème 13 – Le théorème fondamental du calcul

- Soit un *intervalle* I.
- Soit une fonction f *continue* sur I.

Soit un point $a \in I$. Alors la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Ce théorème montre l'existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle I : la fonction F du théorème fondamental est l'unique primitive de f sur l'intervalle I qui s'annule en a.

On se sert du théorème fondamental pour étudier une fonction définie par une intégrale où la variable x n'apparaît qu'aux bornes de l'intégrale. On se sert du corollaire suivant lorsque la variable apparaît aux deux bornes.

Corollaire 14 – Dérivée d'une intégrale fonction de ses bornes

- Soit une fonction f *continue* sur un *intervalle* I,
- Soient $u, v : J \longrightarrow I$ deux fonctions *dérivables* sur *l'intervalle* J à valeurs dans I.

Alors la fonction

$$G : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt \end{array}$$

est dérivable sur l'intervalle J et

$$\forall x \in J, \quad \boxed{G'(x) = v'(x) \times f[v(x)] - u'(x) \times f[u(x)]}$$

✎ ***Exemple.*** Étudier la fonction définie par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sh} t}{t}\,dt$$

✎ ***Exemple.*** Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et T-périodique. On définit sa moyenne sur une période :

$$m(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,dt$$

Montrer que $m(f)$ est indépendant de a.

Remarque. Une variante du théorème fondamental permet de relier une fonction f à sa dérivée à l'aide d'une intégrale.

Corollaire 15 – Théorème fondamental deuxième forme

Soit une fonction f de classe C^1 sur l'intervalle I et $a \in I$. La formule suivante relie f et sa dérivée par une intégrale. Pour tout $x \in I$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt}$$

On retrouve le fait qu'une fonction continue sur un intervalle admet une infinité de primitives, toutes égales à une constant additive près. De plus si g est continue sur $[a,b]$ et G est une de ses primitives :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a) \overset{\text{notation}}{=} \big[G(t)\big]_{t=a}^{t=b}$$

✎ ***Exemple.*** À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer l'inégalité de Poincaré : il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que des bornes a et b telle que

$$\forall f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \text{ telle que } f(a) = 0, \quad \int_a^b f(t)^2\,dt \leq C \int_a^b f'(t)^2\,dt$$

5.3 Calcul intégral

Notation : si f est une fonction continue sur un intervalle I, note $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ une primitive de f sur I. Cette notation n'est pas correcte car elle ne précise ni l'intervalle I, ni la primitive choisie (on rappelle que f en admet une infinité !). Mais elle rend tout de même service en simplifiant les notations dans les calculs de primitives.

5.4 Intégration par parties

Théorème 16 – Intégration par parties (IPP)

1. Version intégrale. Si u et v sont deux foctions de classe C^1 sur $[a,b]$ alors :

$$\int_a^b u'(t).v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t).v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t).v'(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Version primitive. Si u et v sont deux foctions de classe C^1 sur un intervalle I alors :

$$\int u'(x).v(x)\,\mathrm{d}x = u(x).v(x) - \int u(x).v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Méthode : Penser à ce théorème lorsqu'apparaissent :
• des termes en $x^n.f(x)$ qu'on simplifie en dérivant n fois x^n ;
• des bijections réciproques f^{-1} ;
• des termes en sin, cos, exp dont la dérivée est proche de la fonction intiale.

✎ ***Exemple.*** Déterminer les primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer les primitives de arctan sur $\mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^2 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^t \cos(t)\,\mathrm{d}t$.

5.5 Changement de variable

Ce théorème est l'analogue du théorème de changement d'indice dans une somme discrète $\sum$.

Théorème 17 – Théorème de changement de variable

Si f est continue sur $[a,b]$ et si φ est de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$ vérifiant les conditions :

$$\varphi(\alpha) = a \quad \text{et} \quad \varphi(\beta) = b$$

alors on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big).\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

En pratique : pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, on pose $t = \varphi(x)$. On a alors $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ et on détermine α et β tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$ en posant $x = \mathrm{e}^t$.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $x = \sin(t)$.

5.6 Calculs de primitives

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^3}$ puis $\displaystyle\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t)^3}$.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^3}$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^3}$.

Quelques primitives usuelles qu'il est bon de connaître :

— $\boxed{\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right)}$ par changement de variable $x = t/a$

— $\boxed{\displaystyle\int \frac{dt}{t^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|}$ car $\displaystyle\frac{1}{t^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t+a}\right)$

— $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \arcsin\left(\frac{t}{a}\right)$ par changement de variable $x = t/a$

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

5.7 Sommes de Riemann

On rappelle aussi le théorème suivant.

Théorème 18 – Sommes de Riemann

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue*. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt$$

Remarque. Lorsque le terme général d'une suite comporte un signe $\sum$ et fait apparaître des groupements k/n, penser aux sommes de Riemann.

✎ ***Exemple.*** Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}$.

5.8 Formules de Taylor

En effectuant des intégrations par parties à partir du théorème fondamental, on montre la formule de Taylor-intégrale :

Théorème 19 – Formule de Taylor avec reste intégral

Soit une fonction f de classe C^{n+1} sur un intervalle I, et deux points $a, x \in I$. Alors

$$\boxed{f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt}$$

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

La fonction T_n est polynomiale de degré n et la fonction R_n s'appelle le reste de Taylor à l'ordre n.

Elle permet d'approximer f par un polynôme T_n, appelé polynôme de Taylor de f d'ordre n, tout en ayant une formule exacte pour l'erreur d'approximation.

En ramenant les bornes à $[0,1]$ par un changement de variables, on obtient une majoration du reste :

Théorème 20 – Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit une fonction f de classe C^{n+1} sur un intervalle I et un point $a \in I$. Alors, si $x \in I$, on peut écrire $f(x)$ comme somme du polynôme de Taylor et d'un reste $R_n(x)$:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

avec la majoration suivante du reste :

$$\boxed{\left|R_n(x)\right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}(x)}$$

où

$$\boxed{M_{n+1}(x) = \sup_{t \in [a,x]} \left|f^{(n+1)}(t)\right|}$$

Cette inégalité permet de contrôler l'erreur d'approximation par le polynôme de Taylor. On l'utilise parfois pour calculer des sommes de séries, comme le montre l'exemple suivant.

✎ ***Exemple.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\mathrm{e}^x - \left(1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| \leq \frac{|x|^{n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!}$$

En déduire que $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

Théorème 21 – Formule de Taylor-Young

Soit f de classe C^{n+1} sur un intervalle I, et $a \in I$. Alors il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I$,

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + (x-a)^n \varepsilon(x)}$$

où $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{=} T_n(x) + o\left[(x-a)^n\right]}$$

La formule de Taylor-Young fournit une information *locale* sur le reste $R_n(x)$, alors que l'inégalité de Taylor-Lagrange permet d'obtenir une majoration *globale* du reste sur un segment $[a, x]$. On ne les utilise donc pas dans les mêmes situations.

On rappelle les DLs usuels à connaître :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\
\tan(x) &= x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

✎ ***Exemple.*** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$.

6 Étude de suites

6.1 Propriétés générales

Rappelons le théorème d'encadrement.

Théorème 22 – Théorème d'encadrement

1. Limite finie. Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
   - À partir d'un certain rang, $a_n \leq u_n \leq b_n$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell \in \mathbb{R}$

   Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
2. Limite $+\infty$. Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
   - À partir d'un certain rang, $a_n \leq u_n$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

   Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Limite $-\infty$. Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
   - À partir d'un certain rang, $u_n \leq b_n$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$

Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

L'étude de suites extraites recouvrantes permet aussi de montrer la convergence.

Théorème 23 – Théorème des suites extraites recouvrantes

Soit une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Remarque. Ce théorème est vrai avec des suites divergentes vers $\pm\infty$ (divergentes de première espèce).

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ n'existe pas, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

Dans le cas d'une suite monotone on a le théorème fondamental suivant.

Théorème 24 – Théorème de la limite monotone

Si (u_n) est une suite *croissante*, on a l'alternative suivante :

- Si (u_n) est majorée, alors (u_n) converge vers $\ell = \sup\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.
- Sinon, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque. Si une suite (u_n) est croissante et converge vers ℓ, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell$.

Les suites adjacentes sont très utiles.

Définition 25 – Suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes lorsque :
(i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante a.p.c.r. ;
(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Sous les conditions (i) et (ii), on a $u_n \leq v_n$ a.p.c.r..

Théorème 26 – Théorème des suites adjacentes

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent vers une même limite.

✎ ***Exemple.*** Si $x \in \mathbb{R}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.
Ces deux suites sont à valeurs dans $\mathbb{Q}$, sont adjacentes, et convergent vers x.

6.2 Suites récurrentes usuelles

Suites arithmétiques. Si $u_{n+1} = u_n + r$ alors $u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_p + (n-p)r$.

Suites géométriques. Si $u_{n+1} = q.u_n$ alors $u_n = q^n.u_0$ et $u_n = q^{n-p}.u_p$.

Suites arithméco-géométrique. Si $u_{n+1} = a.u_n + b$ on calcule ℓ tel que $\ell = a.\ell + b$, et on remarque que la suite $(u_n - \ell)$ est géométrique.

✎ ***Exemple.*** $u_8 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 3$.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Si $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, on résout l'équation caractéristique $z^2 = az + b$.

1. $\boxed{\text{Si } \Delta > 0}$ (E) a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Il existe alors un unique couple de réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
2. $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ (E) a une seule racine réelle r_0. Il existe alors un unique couple de réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) r_0^n$.
3. $\boxed{\text{Si } \Delta < 0}$ (E) a deux racines complexes pures conjuguées $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$. Il existe alors un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n \big(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\big)$.

✎ ***Exemple.*** $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n + 3u_{n-1}$.

✎ ***Exemple.*** $u_0 = 1,\ u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

✎ ***Exemple.*** $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

6.3 Croissances comparées

Théorème 27 – Comparaison de n^b, $n!$, a^n

1. Si $b \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{si } b > 0 \\ 1 & \text{si } b = 0 \\ 0 & \text{si } b < 0 \end{cases}$
2. Si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n}{n!} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^b}{n!} = 0$;
   et si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^b}{a^n} = 0$.

De manière mnémotechnique, on peut retenir que si $a > 1$: $n^b \ll a^n \ll n!$

Théorème 28 – Comparaison de n^α, $\ln^\beta(n)$ et $e^{\gamma n}$

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$. Plus généralement si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln^\beta(n)}{n^\alpha} = 0$.
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{e^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} ne^{-n} = 0$.

Plus généralement si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{e^{\gamma n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha e^{-\gamma n} = 0$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{e^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n)e^{-n} = 0$.

   Plus généralement si $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln^\beta(n)}{e^{\gamma n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln^\beta(n)e^{-\gamma n} = 0$.

De manière mnémotechnique, on peut retenir que si $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$: $(\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll e^{\gamma n}$

6.4 Analyse asymptotique

Définition 29 – Domination

On dit que la suite (u_n) est *dominée* par la suite (v_n) et on écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ lorsque

$$\boxed{\exists M \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad |u_n| \leq M|v_n|}$$

Si la suite (v_n) *ne s'annule pas*, cette propriété est équivalente au fait que la suite

$$\boxed{\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est } \textit{bornée}.}$$

On a une définition similaire pour deux fonctions. On dit que f est dominée par g au voisinage du point a lorsque f/g est bornée au voisinage de a (si g ne s'annule pas).

Définition 30 – Suite Négligeable

La suite (u_n) est *négligeable* devant la suite (v_n) et on écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ lorsque

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N \quad |u_n| \leq \varepsilon|v_n|}$$

Si la suite (v_n) *ne s'annule pas*, cette propriété est équivalente au fait que la suite

$$\boxed{\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Remarque. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$

De même, $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ au voisinage de a lorsque $f/g \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Définition 31 – Suites équivalentes

La suite (u_n) est *équivalente* à la suite (v_n) et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ lorsque

$$\boxed{u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)}$$

Si la suite (v_n) ne s'annule pas, il suffit de vérifier que

$$\boxed{\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$$

On montre que :

- la relation $\sim$ est une relation d'équivalence (= réflexive, symétrique et transitive) sur l'ensemble des suites,
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n ont même signe.

6.5 Recherche d'équivalents

6.5.1 Généralités

Rappelons les règles de calcul sur les équivalents.

Proposition 32 – Règles de calcul pour la relation $\sim$

On se donne des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Valeur absolue. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donne $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.
2. Produit. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ donnent $u_n \times a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \times b_n$.
3. Puissance. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donne $u_n^p \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^p$.
   Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$ (à condition que ces suites soient définies).
4. Inverse. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
5. Quotient. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{a_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b_n}{v_n}$.

⚠ Il n'est pas possible de faire les opérations suivantes.

• **Somme**

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ ne donnent pas $u_n + a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + b_n$.

• **Composition par une fonction**

Si f est une fonction, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(v_n)$.

• **Puissance dépendante de n**

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $u_n^{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^{\alpha_n}$ (penser à **exponentier**).

⚠ Par contre ces opérations sont autorisées pour la relation de négligeabilité, et donc pour les développements limités. C'est ce qui fait leur force !

Il y a une infinité de suites équivalentes à une suite donnée.
Lorsqu'on demande de trouver « un »équivalent, on attend la suite la plus simple qui ne fait

intervenir que des **produits-quotients** de suites de référence.

$$n^2+n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2+\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2+\sin n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{2\ln n+1/\ln n}\dots$$

En pratique, ne pas utiliser le signe + à droite du symbole $\underset{n\to+\infty}{\sim}$:

$$n^2+n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$$

Remarques :

- Si $u_n = v_n + w_n$ avec $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, c'est la définition !
  En particulier le premier terme d'un développement limité donne un équivalent.

  $$\sin(x) = x - x^3/6 + o\left(x^3\right) \qquad \text{donne} \quad \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{n}$$

  Ne pas utiliser systématiquement un DL pour chercher un équivalent, il y a souvent bien plus simple en partant des équivalents usuels et des règles de calcul données ci-dessus.
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ n'a rien à voir avec $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

6.5.2 Équivalents d'exponentielle

Ne pas prendre l'exponentielle d'équivalents. On a :

$$\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{v_n} \Longleftrightarrow u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

En pratique, si u_n est une somme de termes, on garde les termes qui ne tendent pas vers 0.

✎ ***Exemple.*** Trouver un équivalent des suites de terme général

(a) $u_n = (n^2+n)^n$

(b) $u_n = \left(1-\dfrac{a}{n}\right)^{n^2}$

6.5.3 Équivalents de logarithmes

Justifier avant de prendre des logarithmes d'équivalents : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$,

$$u_n = v_n[1+u_n]$$

$$\ln u_n = \ln v_n + \ln(1+u_n)$$

Puisque $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, si v_n ne tend pas vers 1, on a $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n$.

Lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, utiliser l'équivalent usuel $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, ie :

$$\ln u_n = \ln\left[1+u_n-1\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1$$

Remarque. Il est souvent utile de factoriser dans une somme le terme dominant.

✎ ***Exemple.*** Trouver un équivalent lorsque $x\to+\infty$ et $x\to 0^+$ de $f(x) = \ln\left(|\ln x| + x^2\right)$

6.5.4 Équivalents de sommes

Pour trouver un équivalent d'une somme $u_n = a_n + b_n$, commencer par comparer les deux suites en cherchant un équivalent de a_n et b_n : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_n$, $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n$.

Lorsque l'un des deux équivalents est négligeable devant l'autre ou lorsque leur somme n'est pas nulle, on s'en sort facilement.

Lorsque la somme des équivalents est nulle, utiliser les équivalents usuels ou les développements limités.

✎ ***Exemple.*** Trouver un équivalent de :

(a) $u_n = \sin(e^{-n}) - \tan\left(\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right)$

(b) $u_n = \sqrt{1+\sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)} - \cos\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$

(c) $u_n = e^{\dfrac{1}{2^n}} + \sqrt{1+\dfrac{1}{2^n}} - 2$

6.5.5 Bilan

Pour chercher une limite d'une fonction ou d'une suite :

- Chercher un *équivalent* simple de tous les facteurs : on peut faire des produits-quotients d'équivalents.
- Pour trouver un équivalent d'une somme, utiliser les développements limités.
- Si la fonction est de la forme $a(x)^{b(x)}$, utiliser la méthode d'exponentiation : $a(x)^{b(x)} = e^{b(x)\ln\left[a(x)\right]}$.

7 Exercices

Fonctions usuelles

Exercice 1

Soit $0 < a \leqslant b$. On pose $f : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Etudier la monotonie de f et en déduire que $\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2$.

Exercice 2

Montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale d'un entier $n > 0$ est $\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$.

Exercice 3

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $b \neq 0 \quad [2\pi]$, calculer simultanément

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$$

Exercice 4

Soient $x_1, \ldots, x_{13}$ des réels. Montrer qu'il existe i et j dans $\{1, \ldots, 13\}$ tels que $i \neq j$ et

$$0 \leqslant \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leqslant 2 - \sqrt{3}$$

Hint : appliquer le principe des tiroirs aux $\alpha_i = \arctan(x_i)$.

Exercice 5 – Fonction hyperboliques réciproques

1. (a) Montrer que la fonction ch induit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$.
   (b) On note argch sa bijection réciproque. Vérifier que :
   $$\forall y \geq 1, \quad \operatorname{argch}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$
   (c) En déduire que si $a > 0$, on a : $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \operatorname{argch}\left(\frac{t}{a}\right) = \ln\left(t + \sqrt{t^2 - a^2}\right)$ sur $]a, +\infty[$.
2. (a) Montrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) On note argsh sa bijection réciproque. Vérifier que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

(c) En déduire que si $a > 0$, on a : $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}} = \operatorname{argsh}\left(\frac{t}{a}\right) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+a^2}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Dresser le tableau de variations et donner l'allure de la courbe de la fonction tangente hyperbolique th définie par $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

(b) Montrer que la fonction th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

(c) On note argth sa bijection réciproque. Vérifier que :

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \operatorname{argth}'(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

(d) Montrer que argth est dérivable sur $]-1,1[$ et vérifier que :

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \operatorname{argth}'(y) = \frac{1}{1-y^2}$$

Exercice 6

Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
Montrer que $\operatorname{th}\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}$, $\operatorname{th}x = \sin y$ et $\operatorname{ch}x = \frac{1}{\cos y}$.

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, observer

$$\operatorname{th}((n+1)x) - \operatorname{th}(nx) = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}(nx)\operatorname{ch}((n+1)x)}$$

Calculer

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((k+1)x)}$$

Exercice 8

1. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}$.
2. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan\frac{\pi x}{4}}$.
3. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$

Intégration sur un segment

Exercice 9 – Un calcul de série

1. Calculer
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
2. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
3. Justifier
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}$$
4. En déduire que $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 10 – Formule de la moyenne

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues avec $g \geqslant 0$.
Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 11 – Seconde formule de la moyenne

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec f décroissante et positive.

1. On introduit G la primitive de g s'annulant en a.
Montrer que
$$f(a) \times \min_{[a,b]} G \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(a) \times \max_{[a,b]} G$$
2. En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ vérifiant
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$$
3. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues avec f monotone.

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 12

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \{0,1,\dots,n\}, \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$.

Exercice 13

1. Observer
$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\mathrm{d}t$$
2. En déduire
$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 14

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est dérivable et que
$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t)\,\mathrm{d}t$$
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
3. Achever la résolution de cette équation différentielle.

Exercice 15

Pour p et q entiers naturels, on pose :

$$I_{p,q} = \int_{-1}^1 (1+t)^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$$

1. Former une relation de récurrence liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.

2. Donner une expression de $I_{p,q}$ à l'aide de factoriels.

Exercice 16

1. Calculer la primitive $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ sur $I=\mathbb{R}$.
2. Calculer les primitives $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin^2 x+1}\,dx$ sur $\mathbb{R}$ (poser $t=\cos(x)$).
3. Calculer les primitives $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$ sur $]-\pi,\pi[$
   $\big($ poser $t=\tan(x/2)$ et remarquer que $\cos(x)=(1-t^2)/(1+t^2)\big)$.
4. Calculer $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{x}$ sur $I=]0,1[$ $\left(\text{poser } y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

Exercice 17

Calculer les limites de

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ et } \sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{1}{\sqrt{k+n}}$$

lorsque $n\to+\infty$.

Hint : se ramener avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n}}$

Suites

Exercice 18 – Suites récurrentes couplées

Soient $0<b<a$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0=a \\ v_0=b \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont bien définies et qu'elles sont strictement positives.
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n<u_n$.
3. Établir que (v_n) est croissante et (u_n) est décroissante.
4. (a) Vérifiez que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_{n+1}-v_{n+1}<\frac{1}{2}(u_n-v_n)$
   (b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. Déterminer la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 19 – Changements de suite

1. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n-2}{u_n+2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $u_n > 1$, pour $n \geq 3$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1}$, est bien définie.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (c) Donner u_n en fonction de n et calculer $\lim u_n$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$.
   (a) Montrer que cette suite est bien définie.
   (b) On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer qu'elle est bien définie et donner une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis la nature de (u_n) et son éventuelle limite.

Exercice 20 – γ la constante d'Euler

On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\phi(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) - \ln(x+1) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1).$$

1. Étudier le signe des fonctions ϕ et ψ sur $]0, +\infty[$.
2. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définies par : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.
3. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 21 – Obtention d'un équivalent par encadrement

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$.
2. En déduire la limite et un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 22 – Théorème de Césaro

Montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors la suite (S_n) des moyennes définie par

$$S_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

converge également vers ℓ.

Exercice 23 – Comparaison logarithmique

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs, telle que à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.

Exercice 24 – Calculs d'équivalents

Donner un équivalent simple et la limite éventuelle de chacune des suites (u_n) définies par :

1. $u_n = n^2 - 2n$
2. $u_n = \sqrt{n} + (\ln(n))^{12} + \sin(n)$
3. $u_n = 2^n + n^2$
4. $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$
5. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
6. $u_n = \sin\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$
7. $u_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$
8. $u_n = \dfrac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\cos\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}$

Exercice 25

Montrer que $\forall n \geq 2$, il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $x_n - \ln(x_n) = n$.
Trouver la limite puis un équivalent simple de la suite (x_n).

Exercice 26

On considère la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = \sin(u_n) \end{cases}$$

1. Étudier la convergence de la suite (u_n).
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $(v_n) = (u_n^\alpha)$ et $(w_n) = (v_{n+1} - v_n)$. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la suite (w_n) converge vers une limite non-nulle (on trouve $\alpha = -3$).
3. En utilisant Césaro, trouver un équivalent simple de (u_n).

Chapitre 2

Compléments sur les séries numériques

Sommaire

1 Rappels de première année 52

1.1 Rappels sur les sommes finies 52

1.2 Rappels sur les sommes doubles 54

1.3 Rappels généraux sur les séries 56

1.4 Rappels sur les séries à termes positifs 57

1.5 Convergence absolue et semi-convergence 58

1.6 Séries de référence 59

2 Compléments 60

2.1 Compléments sur les séries géométriques 60

2.2 Comparaison série-intégrale 60

2.3 Règle de d'Alembert 61

2.4 Formule de Striling 62

2.5 Théorème des séries alternées 62

2.6 Produit de Cauchy 63

2.7 Plan d'étude d'une série 64

3 Exercices 65

1 Rappels de première année

1.1 Rappels sur les sommes finies

• Sommes dont le terme général est constant :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1 = \text{nombre de termes}}$$

et :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a = \text{nombre de termes } \times a \quad (a \in \mathbb{C})}$$

• Sommes télescopiques :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} \left(a_{k+1} - a_k\right) = \left(\cancel{a_{p+1}} - a_p\right) + \left(\cancel{a_{p+2}} - \cancel{a_{p+1}}\right) + \left(\cancel{a_{p+3}} - \cancel{a_{p+2}}\right) + \cdots + \left(a_{n+1} - \cancel{a_n}\right) = a_{n+1} - a_p}$$

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

• Formule du binôme :

$$\boxed{\text{si } (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Pour calculer les coefficients $\binom{n}{k}$ pour de petites valeurs de n, on utilise le triangle de Pascal :

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Par exemple $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Dans le cas général, on dispose de la formule $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ et des règles de calcul :

— Factorisation : si $p \neq 0$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

— Addition ou formule de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

— Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

— $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{n-2}$.

✎ ***Exemple.*** À l'aide du lemme des bergers, retrouver que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (a-1)^k 2^{n-1-k}$.

⚠ Ne pas confondre avec $\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ qui vérifie :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right) = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

• Sommes d'Euler :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{(somme arithmétique)}}$$

et :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

✎ ***Exemple.*** Calculer $\sum_{k=2}^{n-1} k$.

• Il faut connaître parfaitement les sommes géométriques : pour $x \in \mathbb{R}$ ou $x \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ (n+1) & \text{si } x = 1 \end{cases}}$$

et si $p \neq n$:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{k=p}^{n} x^k = x^p + x^{p+1} + \cdots + x^n &= \begin{cases} x^p \dfrac{1-x^{n-p+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ (n-p+1) & \text{si } x = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{premier terme} \times \dfrac{1-x^{\text{nombre de termes}}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ \text{nombre de termes} & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{aligned}}$$

✎ ***Exemple.*** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ lorsque $a \neq b$ et $b \neq 0$.

Méthodologie pour calculer une somme :

- Utiliser la linéarité du symbole $\sum$: pour calculer $\sum_k (u_k + v_k)$ on se ramène à $\sum_k u_k + \sum_k v_k$.
- Mettre en facteur les constantes : $\sum_k \lambda . u_k = \lambda . \sum_k u_k$.
- Une fois eliminées les cas où le terme général est constant, on doit faire apparaître un des trois cas connus : somme télescopique, formule du binôme ou somme géométrique.
  - Si le terme général ne contient pas de puissance k : somme télescopique.
  - Si le terme général contient une puissance k : formule du binôme ou somme géométrique.
    - Si il y a un facteur du type $\binom{n}{k}$ ou même $k!$: formule du binôme ;
    - sinon : somme géométrique.

1.2 Rappels sur les sommes doubles

Si $(x_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ est un « tableau » de nombres à n lignes et p colonnes on note :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} x_{ij} = \text{ somme de tous les nombres du tableau}$$

Visualisons le tableau :

$$\begin{array}{ccc|c|cc}
x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1p} \\
x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2p} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{ip} \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{np}
\end{array}$$

Il est clair que la somme des sommes partielles obtenues pour chaque ligne (resp. chaque colonne) donne la somme de tous les nombres du tableau. On en déduit le théorème suivant sur les sommes doubles.

Théorème 1 – Théorème de Fubini

On a :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)$$

Dans un calcul de sommes **finies**, on peut donc permuter deux signes Σ consécutifs.

✎ ***Exemple.*** Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A[i,i]$.

Montrer que si $(A, b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Examinons maintenant le cas plus complexe d'un tableau triangulaire $(x_{ij})_{1\leq j\leq i\leq n}$ à n lignes et n colonnes. On note :

$$\sum_{1\leq \boxed{j\leq i} \leq n} x_{ij} = \text{ somme de tous les nombres de ce tableau}$$

Visualisons le :

$$\begin{array}{ccc|c|ccccc}
x_{11} & & & & & & & \\
x_{21} & x_{22} & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\
x_{j1} & x_{j2} & \dots & x_{jj} & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & & \\
\hline
x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{ii} & & \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{ni} & \dots & x_{nn}
\end{array}$$

Avec le même raisonnement que ci-dessus on obtient le théorème suivant.

Théorème 2 – Théorème de Fubini

On a :

$$\sum_{1\leq \boxed{j\leq i} \leq n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\boxed{i}} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=\boxed{j}}^{n} x_{ij}\right)$$

✎ ***Exemple.*** On appelle permutation de $[\![1,n]\!]$ toute bijection de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$; les n éléments sont permutés mais certains peuvent reprendre leur position initiale (on parle de *point fixe*).
On appelle dérangement de $[\![1,n]\!]$ toute permutation sans point fixe. On note d_n le nombre de ces dérangements.
Le lemme des bergers donne que $n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_k$.
On en déduit que puis que $n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k! = d_n$.

Nous allons maintenant voir une formule pour calculer le produit de deux sommes.
⚠ Malheureusement $\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\times\left(\sum_{i\in I} b_i\right) \neq \sum_{i\in I} a_i\times b_i$!
Le théorème suivant donne la bonne formule. Remarquons que le résultat est une somme double.

Théorème 3 – Produit de deux sommes

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles finies de nombres complexes, on a :

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\times\left(\sum_{j\in J} b_j\right)=\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i\times b_j\right)=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_i\times b_j\right)$$

Ce résultat est à rapprocher du produit de Cauchy qui permettra de multiplier deux séries (voir fin du chapitre).

1.3 Rappels généraux sur les séries

Rappelons les principaux résultats sur les séries numériques :
- la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes ;
- la convergence est une notion linéaire.
- si $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$ alors $u_n=S_n-S_{n-1}$.

Dans le cas d'une série *convergente*, on peut définir son reste.

Théorème 4 – Reste d'une série convergente

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k\geq n} u_k$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} u_k=0$$

$R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé reste d'ordre n ; si la série converge on a donc $\lim_{n\to+\infty} R_n=0$.

Si $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$ est la somme partielle de rang n d'une série *convergente*, on a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n=S_n+R_n \quad \text{(relation de Chasles généralisée)}$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k=\sum_{k=0}^{n} u_k+\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

La généralisation de la notion de somme télescopique donne un nouvel outil pour étudier la convergence d'une suite.

Théorème 5 – Dualité suites-séries

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \iff \sum_{n\geq 0}\left(u_{n+1}-u_n\right) \text{ converge}$$

Dans ce cas pour $p\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=p}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell - u_p$$

où $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

✎ ***Exemple.*** On pose $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$. Montrer que (u_n) converge.

1.4 Rappels sur les séries à termes positifs

Le théorème de la limite monotone donne le résultat suivant.

Théorème 6 – Nature d'une série à termes positifs

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série à termes positifs. Pour $n \geq n_0$, on note $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ sa somme partielle de rang n. Alors :

1. $(S_n)_{n\geq n_0}$ est croissante.
2. $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge $\iff (S_n)_{n\geq n_0}$ est majorée. Dans ce cas si M est un majorant de $(S_n)_{n\geq n_0}$:
$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq M$$
3. Si $(S_n)_{n\geq n_0}$ non majorée, alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge et $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Pour montrer qu'une série à termes positifs converge, sans calculer sa somme, le résultat principal est le théorème de comparaison par inégalité.

Théorème 7 – Théorème de comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$.
Alors : $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, et dans ce cas $0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.
Donc par contraposée : $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n\geq n_0} v_n$ diverge.

✎ ***Exemple.*** Redémontrer la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ en utilisant que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ si $n \geq 2$.

Corollaire 8 – Théorème de comparaison par équivalents pour des séries à termes positifs

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \geq 0$ a.p.c.r..

Alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ sont de même nature.

Le résultat est donc plus fort que pour la comparaison par inégalité, puisque les deux séries sont de même nature

✎ ***Exemple.*** Nature de $\sum_{n\geq 1}\left[\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{(-1)^n}{n^3}\right]$.

1.5 Convergence absolue et semi-convergence

Corollaire 9 – Théorème de comparaison par « petit o » pour des séries à termes positifs

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites telles que $v_n \geq 0$ a.p.c.r., et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
Alors : $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n\geq n_0} u_n$ converge absolument.
Donc par contraposée : $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n\geq n_0} v_n$ diverge.

⚠ ATTENTION : cette fois les deux séries ne sont pas de même nature.

✎ ***Exemple.*** Nature des séries $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(n)}{2^n}$.

On a bien évidemment le même résultat avec un « grand o ».

On appelle série *semi-convergente*, une série *convergente* qui n'est *pas absolument convergente*.

Les séries semi-convergentes sont « pathologiques ». On a en particulier le résultat suivant, du à Riemann.

Théorème 10 – Commutativité des termes dans un série convergente

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série convergente.

1. Si elle est absolument convergente, alors on peut commuter ses termes sans changer la valeur de sa somme. Autrement dit, pour tout bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ on a :
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$
2. Si elle est semi-convergente, alors toute commutation des termes peut changer la valeur de la somme. On peut même montrer que pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ on a :
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ell$$
C'est le théorème de réarrangement de Riemann.
En particulier, en modifiant l'ordre des termes, une série semi-convergente peut devenir divergente.

Ce théorème est hors-programme, il ne faut pas l'apprendre ! Mais on peut retenir que pour une série **absolument convergente**, l'ordre des termes n'intervient pas dans le calcul de la somme. Ce résultat aura notamment son importance dans le chapitre sur les variables aléatoires discrètes.

1.6 Séries de référence

On commence par les séries de Riemann.

Théorème 11 – Séries de référence de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

Dans ce cas la convergence est absolue, puisque la série est à termes positifs.

Corollaire 12 – Règles du $n^\alpha u_n$ pour des séries à termes positifs

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série à termes positifs.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge (absolument).
2. S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge.

En pratique, il est conseillé de redémontrer ce critère à chaque fois. Il est très utilise si on le combine avec les croissances comparées.

✎ ***Exemple.*** Les série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln^3(n)}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^5}{3^n}$ et $\sum_{n\geq 0} n.\sin\left(\frac{1}{n}\right).\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ sont convergentes.

✎ ***Exemple.*** La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ diverge.

Viennent ensuite les séries géométriques.

Théorème 13 – Séries géométriques

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum_{n\geq 0} x^n \text{ converge} \iff |x| < 1$$

Dans ce cas la convergence est absolue et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n=p}^{+\infty} x^n = \frac{x^p}{1-x}$$

Ces formules sont à connaître parfaitement.

2 Compléments

2.1 Compléments sur les séries géométriques

Le corollaire suivant sera démontrée dans le chapitre sur les séries entières.

Corollaire 14 – Dérivées de la série géométrique

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{n \geq p} n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1)x^{n-p} \text{ converge} \Longleftrightarrow |x| < 1$$

Dans ce cas la convergence est absolue et on a :

$$\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1)x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1)x^{n-p} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

De manière mnémotechnique, on peut retenir que :

$$\text{« } \sum_{n=0}^{+\infty} \text{ dérivée } p \text{ fois de } x^n = \text{ dérivée } p \text{ fois de } \frac{1}{1-x} \text{ »}$$

Les formules les plus souvent utilisées sont les suivantes, valables pour $|x| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

et pour $|x| < 1$ et $x \neq 0$:

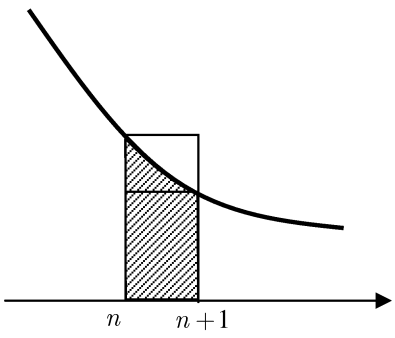
$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

✎ ***Exemple.*** Nature et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

2.2 Comparaison série-intégrale

Si f est continue et monotone, on peut encadrer les sommes partielles $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.

Par exemple si f est décroissante sur l'intervalle $[n, n+1]$:



On a l'inégalité :

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n)$$

Si f est croissante sur $[n, n+1]$ l'inégalité est inversée :

$$f(n) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n+1)$$

Ensuite on additionne ces inégalités, pour différentes valeurs de n, afin de faire apparaître un encadrement des sommes partielles de la série étudiée.

✎ ***Exemple.*** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, de terme général $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$, converge.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

2.3 Règle de d'Alembert

La règle de d'Alembert permet d'étudier la nature de nombreuses séries, dont on ne sait pas trouver un équivalent du terme général.

Théorème 15 – Règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels non nuls a.p.c.r.. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \overset{\text{existe}}{=} \ell \in [0, +\infty]$. Alors :

- si $\ell < 1$, alors la série $\sum_n u_n$ converge absolument ;
- si $\ell > 1$, alors la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement ;
- si $\ell = 1$, on ne peut rien dire dans le cas général.

✎ ***Exemple.*** Nature des séries $\sum_{n\geq 0} \frac{n^4}{n!}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$.

⚠ Cette règle ne s'utilise qu'avec des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang !

On ne peut pas l'appliquer pour la série de terme général $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

2.4 Formule de Striling

Le théorème de dualité suites-séries permet de déterminer un équivalent de $n!$. Cet équivalent n'est pas intuitif mais il s'avèrera très utile en pratique.

Théorème 16 – Formule de Stirling

On :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

✎ ***Exemple.*** Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$.

2.5 Théorème des séries alternées

Théorème 17 – Critère spécial des séries alternées

On considère une série $\sum(-1)^n v_n$.

- À partir d'un certain rang n_0, $v_n \geq 0$.
- La suite (v_n) est *décroissante* à partir du rang n_0.
- $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Alors :

- la série $\sum(-1)^n v_n$ converge ;
- À partir du rang n_0, on dispose d'une majoration du reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^n v_n$ par la valeur absolue du premier terme $\left|(-1)^{n+1} v_{n+1}\right| = v_{n+1}$:

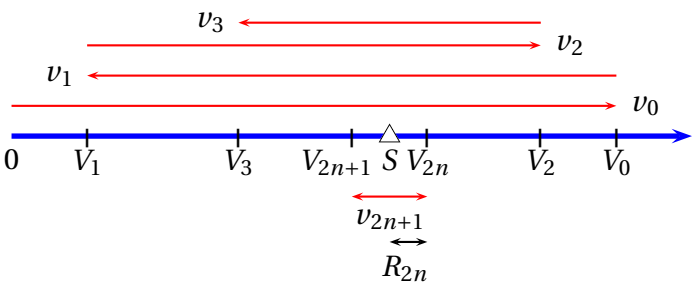
$$\boxed{\forall n \geq n_0, \quad |R_n| \leq v_{n+1}}$$

- Le signe du reste R_n est le même que le premier terme négligé :

$$\boxed{\text{signe}(R_n) = \text{signe}\left((-1)^{n+1}\right)}$$

donc positif si n impair, négatif si n pair.

On visualise la situation sur la figure suivante :



⚠ Pour vérifier qu'une série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n v_n$ est alternée, le point souvent délicat consiste à montrer que la suite (v_n) est *décroissante* à partir d'un certain rang. Porter un soin particulier à cette vérification ! Pour cela :
• on montre que $v_{n+1} - v_n \leq 0$ pour n assez grand ;
• on peut aussi montrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ pour n assez grand, mais seulement si on sait que $v_n > 0$.

✎ ***Exemple.*** Convergence de $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

✎ ***Exemple.*** Étudier la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

En déduire un contre-exemple ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ sont de nature différente $\left(\text{considérer } u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

2.6 Produit de Cauchy

Pour terminer, nous donnons le théorème permettant de multiplier deux séries **absolument convergentes**.

Définition 18 – Produit de Cauchy

On considère deux séries complexes $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$. On appelle *produit de Cauchy* de ces séries, la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}}$$

Théorème 19 – Convergence d'un produit de Cauchy

On suppose que les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont absolument convergentes.
Alors la série $\sum_{n\geq} w_n$ est absolument convergente, et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)}$$

✎ ***Exemple.*** Si $z \in \mathbb{C}$ montrer que la série $\sum_{n\geq 0}\dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument.

On pose alors : $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$.

Établir que, si $(z, z') \in \mathbb{C}^3$, $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{z'}$.

⚠ Les séries doubles ne sont pas au programme, et donc le théorème de Fubini pour les séries (permutation des signes $\sum$) ne l'est pas non plus.

2.7 Plan d'étude d'une série

Dans l'ordre :
- Est-ce une série de référence ?
- Divergence grossière ?
- Tester la convergence absolue :
  - Règle de d'Alembert.
  - Chercher un équivalent du terme général.
  - Utiliser la règle du $n^\alpha u_n$.
- Pour la semi-convergence :
  - Théorème des séries alternées.
  - Développement limité du terme général.

3 Exercices

Nature et/ou calcul de la somme d'une série

Exercice 1 – Un calcul de somme

On admettra dans cet exercice que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente.
2. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $T_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$.
   (a) Établir que si $N \geq 1$:
   $$S_{2N} = \frac{1}{4} T_N - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad T_{2N} = \frac{1}{4} T_N + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$$
   (b) En déduire que pour $N \geq 1$: $S_{2N} = \frac{1}{2} T_N - T_{2N}$.
   (c) Conclure que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 2

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$
2. $u_n = \frac{n^2-5}{n(2n^+1)}$
3. $u_n = \frac{n-2}{2^n-1}$
4. $u_n = \frac{\sqrt[n]{2}-1}{2n+3}$
5. $u_n = n\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$
6. $u_n = \frac{n}{n+1}$
7. $u_n = \frac{\cos(n!)}{n^3+\cos(n!)}$
8. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Exercice 3

Montrer la convergence de la série de terme général u_n puis calculer sa somme :

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n \geq 1$
2. $u_n = \frac{6}{5^{n+2}}$, $n \geq 0$
3. $u_n = \ln\left(\frac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right)$, $n \geq 2$
4. $u_n = \frac{(n+1).(-1)^n}{n!}$, $n \geq 0$

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n en fonction des paramètres indiqués :

1. $u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$
2. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right),\ \alpha \in \mathbb{R}$
3. $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$

Hint : utiliser un équivalent ou un DL du terme général.

Exercice 5

On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \frac{\sin\left(\pi e^n\right)}{2^n}$.

1. Montrer que cette série converge.
2. On note S la somme de la série, et S_n sa somme partielle de rang n. Vérifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |S - S_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$$
3. Écrire un programme Python qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

Exercice 6 – Séries dont le terme général n'est pas de signe constant

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = (-1)^n.\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right),\ \alpha \in \mathbb{R}$
2. $u_n = (-1)^n.\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),\ \alpha \in \mathbb{R}$
3. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$
4. $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$
5. $u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$
6. $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$

Exercice 7

1. Étudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.
2. Établir la convergence de la suite $(P_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)$.

Exercice 8

Convergence et calcul de $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Hint : Remarquer que $S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left[\frac{\left((2N)!\right)^2}{2^{4N}(N!)^4}(2N+1)\right] \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Nature d'une série par comparaison

Exercice 9 – Transformation d'Abel (IPP discrète)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs, convergente vers 0, et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}(a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.
2. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} a_n(S_n - S_{n-1})$ est convergente.
3. Établir que pour $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

Exercice 10

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.
   Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{u_n}{u_1+u_2+\cdots+u_n}$.
   Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.
   Hint : on pourra utiliser $\ln(1-v_n)$ *dans le cadre de la divergence*

Exercice 11

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \sin(x) - x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis montrer que (u_n) est strictement positive et convergente vers 0^+.
2. (a) À l'aide de l'étude la série $\sum_{n\geqslant 0} u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n^3$ converge.
   (b) À l'aide de l'étude la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ diverge.

Exercice 12

On considère un entier naturel non nul n, et la fonction f_n définie par $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution. On notera a_n cette solution.
2. Écrire un programme en Python qui détermine et affiche une valeur approchée de a_n à 10^{-2} près, pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

3. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et convergente.
4. Quelle est la nature de la série $\sum_n a_n$?
5. Quelle est la nature de la série $\sum_n n^\alpha \left(a_n - \frac{2}{n^2}\right)$?

Exercice 13 – Séries de Bertrand

La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou $\big(\alpha = 1$ et $\beta > 1\big)$/

Exercice 14 – Critère de Cauchy

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,+\infty]$.

1. Si $\ell \in [0,1[$, montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$, montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.
3. Nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{4^n}{n^n}$?

Exercice 15 – Règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel α tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. En utilisant le principe de comparaison logarithmique, montrer que si $\alpha < 1$ alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.
2. De même, montrer que si $\alpha > 1$ alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Chapitre 3

Compléments d'algèbre linéaire

Sommaire

1 Notions de base d'algèbre linéaire 70

1.1 Sous-espaces vectoriels 70

1.2 Applications linéaires 71

1.3 Combinaisons linéaires d'un familles de vecteurs 75

1.4 Familles génératrices 77

1.5 Familles libres 78

1.6 Bases 80

1.7 Compléments sur les applications linéaires 82

1.8 Produit cartésien d'espaces vectoriels 85

1.9 Rappels sur les sommes de sev 85

1.10 Compléments sur les sommes de sev 90

2 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie 92

3 Matrices 94

3.1 Produit matriciel 94

3.2 Rang d'une matrice 97

3.3 Opérations élémentaires 98

3.4 Représentations matricielles 100

3.5 Changements de base 104

3.6 Déterminants 106

3.7 Polynômes annulateurs 109

4 Exercices 113

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les *scalaires* (ie les éléments de $\mathbb{K}$) seront notés avec une lettre minuscule de l'alphabet grec : α, λ, μ ...

Les $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels* seront notés avec une lettre majuscule de l'alphabet latin, avec « deux barres » : $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ ...

Les *vecteurs* (ie les éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$) seront notés avec une lettre minuscule de l'alphabet latin, surmontée d'une flèche : $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{x}$ ...

Les *familles de vecteurs* seront notées avec une lettre majuscule de l'alphabet latin, version « cursive » : $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, ...

Les *applications linéaires* seront notées avec une lettre minuscule de l'alphabet latin : f, g, h ...

1 Notions de base d'algèbre linéaire

1.1 Sous-espaces vectoriels

Définition 1 – Sous-espace vectoriel

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathbb{F}$ une partie de $\mathbb{E}$.
On dit que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ (noté sev de $\mathbb{E}$) lorsque :
(i) $\mathbb{F} \neq \emptyset$;
(ii) $\mathbb{F}$ stable pour « + » : $\forall\left(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2\right) \in \mathbb{F}^2$, $\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2 \in \mathbb{F}$;
(iii) $\mathbb{F}$ stable pour « . » : $\forall\left(\lambda, \overrightarrow{x}\right) \in \mathbb{K} \times \mathbb{F}$, $\lambda.\overrightarrow{x} \in \mathbb{F}$

✎ ***Exemple.*** Un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ a toujours deux sev triviaux : $\{\overrightarrow{0_E}\}$ et $\mathbb{E}$.

Proposition 2 – Propriété du vecteur nul

Si $\mathbb{F}$ est un sev d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$, alors $\overrightarrow{0_E} \in \mathbb{F}$.

Pour montrer que $\mathbb{F} \neq \emptyset$, on vérifie donc la plupart du temps que $\overrightarrow{0_E} \in \mathbb{F}$.

✎ ***Exemple.*** $\emptyset$ n'est jamais un sev d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.

Théorème 3 – Caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$

Soit $\mathbb{F}$ une partie d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$. Alors $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ si et seulement si :
(i) $\mathbb{F} \neq \emptyset$;
(ii) $\mathbb{F}$ stable par combinaison linéaire : $\forall\left(\lambda, \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2\right) \in \mathbb{K} \times \mathbb{F}^2$, $\lambda.\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2 \in \mathbb{F}$

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{F}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$, $\mathbb{F}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y=1\}$ et $\mathbb{Z}^2$ ne sont pas des sev de $\mathbb{R}^2$. Par contre $\mathbb{F}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y=0\}$ en est un.

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$.

✎ ***Exemple.*** $T_n^+(\mathbb{K})$, $T_n^-(\mathbb{K})$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

⚠ $Gl_n(\mathbb{K})$ n'est pas un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: il ne contient pas le vecteur nul et n'est pas non plus stable par addition !

Théorème 4 – Un sev est un $\mathbb{K}$-ev

Si $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev et $\mathbb{F}$ un sev de $\mathbb{E}$, alors les restrictions à $\mathbb{F}$ des opérations « + » et « . » de $\mathbb{E}$, munissent $\mathbb{F}$ d'une structure de $\mathbb{K}$-ev.

En pratique, pour montrer qu'un ensemble $\mathbb{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (8 conditions), on cherche un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ contenant $\mathbb{F}$ (ie $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$), et on montre que $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ (seulement 2 conditions).

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{K}_n[X]$ est un K-ev puisque c'est un sev de $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 5 – Intersection de sev

1. Si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ est aussi un sev de $\mathbb{E}$.
2. Plus généralement, si $(\mathbb{F}_i)_{i \in I}$ est une famille de sev de $\mathbb{E}$, alors $\bigcap_{i \in I} \mathbb{F}_i$ est aussi un sev de $\mathbb{E}$.

⚠ ATTENTION : en général $\mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ n'est pas un sev de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** On pose $\mathbb{F} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$ et $\mathbb{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\}$. $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev de $\mathbb{R}^2$, mais $\mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ n'en est pas un.

✎ ***Exemple.*** Si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ est aussi un sev de $\mathbb{E}$ si et seulement si $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{G}$ ou $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{F}$.

✎ ***Exemple.*** $D_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1.2 Applications linéaires

Définition 6 – Application linéaire

Soit f une application définie sur $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathbb{F}$: $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$.
On dit que f est *linéaire* lorsque :

1. $\forall (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \in \mathbb{E}^2$, $f(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}) = f(\overrightarrow{x_1}) + f(\overrightarrow{x_2})$
2. $\forall (\alpha, \overrightarrow{x_1}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}$, $f(\alpha.\overrightarrow{x_1}) = \alpha.f(\overrightarrow{x_1})$

On note $\mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.

Si $\mathbb{E} = \mathbb{F}$, $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$ est noté plus simplement $\mathscr{L}(\mathbb{E})$. Les éléments de $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ sont appelés **endomorphismes de** $\mathbb{E}$. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ est bijective de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$, alors f est appelée **isomorphisme de** $\mathbb{E}$ **sur** $\mathbb{F}$. Si f est à la fois un endomorphisme de $\mathbb{E}$ et un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}$, c'est-à-dire que $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ est linéaire et bijective de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}$, alors f est appelée **automorphisme de** $\mathbb{E}$. L'ensemble des automorphismes de $\mathbb{E}$ est noté $Gl(\mathbb{E})$.

Si $\mathbb{F} = \mathbb{K}$ alors les applications linéaires $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ sont appelées **formes linéaires sur** $\mathbb{E}$.

Théorème 7 – Critère de linéarité

Soit $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ une application. On a équivalence de :

1. f est linéaire ;
2. $\forall (\alpha, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2$, $f(\alpha.\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}) = \alpha.f(\overrightarrow{x_1}) + f(\overrightarrow{x_2})$

C'est ce critère qu'on utilise en pratique pour montrer qu'une application est linéaire.

✎ ***Exemple.*** Un exemple de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \overrightarrow{u} = (x,y,z) & \longmapsto & f(\overrightarrow{u}) = f(x,y,z) = (2x - z, x + y + z) \end{array}$$

Elle est linéaire, ce qui se note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Proposition 8 – Propriétés des applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

1. $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) \in \mathbb{E}^n$, $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{x_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . f(\overrightarrow{x_k})$

Théorème 9 – Opérations sur les applications linéaires

1. Restriction. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, si $\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$, et si $\mathbb{H}$ est un sev de $\mathbb{F}$ tel que $f(\mathbb{G}) \subseteq \mathbb{H}$, alors $f_{|\mathbb{G}}^{|\mathbb{H}} \in \mathscr{L}(\mathbb{G},\mathbb{H})$.
2. Somme et multiplication par un scalaire. Si $(f,g) \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $f + g \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $\alpha.f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.
   On en déduit que $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}^{\mathbb{E}}$).
3. Composition. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{G})$.
4. Bijection réciproque. Si f est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$, alors f^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{E}$.

En particulier $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ est aussi un $\mathbb{K}$-ev.

⚠ Si on restreint un *enndomorphisme* $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ à un sev $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$, on n'obtient pas toujours un endomorphisme de $\mathbb{F}$, mais seulement une application linéaire de $\mathbb{F}$ vers $\mathbb{E}$. Pour que $f_{|\mathbb{F}}$ soit un endomorphisme de $\mathbb{F}$, il faut et il suffit que $\mathbb{F}$ soit *stable* par f : $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{F}, \quad f(\overrightarrow{x}) \in \mathbb{F}$

Définition 10 – Noyau et image

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

1. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, on appelle noyau de f la partie de $\mathbb{E}$ suivante :

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{\overrightarrow{0_F}\}) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{E} / \ f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}\}$$

   On a donc pour $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$:

$$\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$$

2. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, on appelle image de f la partie de $\mathbb{F}$ suivante :

$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{E}) = \{f(\overrightarrow{x}) \in \mathbb{F} / \ \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}\}$$

   On a donc pour $\overrightarrow{y} \in \mathbb{F}$:

$$\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(f) \Longleftrightarrow \exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{E} / \ \overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$$

Le noyau et l'image sont deux notions importantes puisque ce sont aussi des sev : on pourra donc en déterminer une base, ainsi que leur dimension.

Théorème 11 – $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des $\mathbb{K}$-ev

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sev de $\mathbb{E}$ et $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de $\mathbb{F}$.

✎ ***Exemple.*** On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \overrightarrow{u} = (x, y, z) & \longmapsto & f(\overrightarrow{u}) = f(x, y, z) = (2x - z, x + y + z) \end{array}$$

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Trois exemples importants.

✎ ***Exemple.*** Soient deux applications linéaires $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$
. On a $\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.

✎ ***Exemple.*** $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$.

✎ ***Exemple.*** Soient deux applications linéaires $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ qui commutent : $f \circ g = g \circ f$.
Alors $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f.

⚠ ATTENTION : en particulier $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ ne donne pas $f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ ou $g = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$. Prendre par exemple $f(x, y) = (x, x)$ et $g(x, y) = x - y$.

⚠ ATTENTION : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ ne donne pas que $f = g$. Prendre par exemple $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = x + y$.

Théorème 12 – Critères d'injectivité et de surjectivité

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$. Alors :

1. f est injective sur $\mathbb{E} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
2. f est surjective de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F} \iff \mathrm{Im}(f) = \mathbb{F}$.

Cas d'une restriction : Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $\mathbb{H}$ sev de $\mathbb{E}$, on a $\mathrm{Ker}(f_{|\mathbb{H}}) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathbb{H}$. Donc si f est injective, $f_{|\mathbb{H}}$ l'est encore.
On a aussi $\mathrm{Im}(f_{|\mathbb{H}}) \subseteq \mathrm{Im}(f)$, mais dans le cas général, on ne peut rien dire de plus.
Si on choisit comme espace d'arrivée $f(\mathbb{H})$, alors $f_{|\mathbb{H}}^{|f(\mathbb{H})}$ est surjective de $\mathbb{H}$ sur $f(\mathbb{H})$.

Les projections sont des exemples importants d'endomorphismes.

Définition 13 – Projection

Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$, tels que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.
L'application :

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_F} + \overrightarrow{x_G} & \longmapsto & p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x_F} \end{array}$$

est appelée projection sur $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$.
De même l'application :

$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_F} + \overrightarrow{x_G} & \longmapsto & q(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x_G} \end{array}$$

est appelée projection sur $\mathbb{G}$ parallèlement à $\mathbb{F}$.
p et q sont appelés projections associées à la somme directe $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

Proposition 14 – Propriétés des projections

1. p et q sont des endomorphismes de $\mathbb{E}$;
2. $p + q = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$;
3. $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$, $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$;
4. Pour $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$: $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(p) \iff p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Im}(p) \iff p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$;
5. $\mathrm{Ker}(p) = \mathbb{G} = \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p - \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$ et
   $\mathrm{Im}(p) = \mathbb{F} = \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_{\mathbb{E}}) =$ ensemble des points fixes de p

⚠ ATTENTION : si p et q sont deux projections de $\mathbb{E}$, on n'a pas en général $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$! Sauf si p et q sont deux projecteurs **associés**, ie si $p + q = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.

Définition 15 – Projecteurs

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{E}$. On dit que f est un projecteur lorsque $f \circ f = f$.

Théorème 16 – Caractérisation des projections

Soit p un endomorphisme de $\mathbb{E}$. Alors p est une projection si et seulement si p est un projecteur, ie $p \circ p = p$.
On a alors $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

✎ ***Exemple.*** Calculer $(\mathrm{id}_{\mathbb{E}} + p)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque p est un projecteur de $\mathbb{E}$.

⚠ ATTENTION : si f est un endomorphisme de $\mathbb{E}$, qui n'est pas un projecteur, alors on ne peut pas dire que $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Noter que $0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ sont deux projecteurs associés de $\mathbb{E}$ associés à la somme directe $\mathbb{E} = \mathbb{E} \oplus \{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\}$.

Symétries. On peut aussi définir la symétrie s parallèlement à $\mathbb{F}$ dans la direction $\mathbb{G}$.
On a $s = 2p - \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$, $\mathbb{F} = \ker(s - \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$ et $\mathbb{G} = \ker(s + \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$.
Une symétrie s est caractérisée par la relation $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.

1.3 Combinaisons linéaires d'un familles de vecteurs

Définition 17 – Familles de scalaires/vecteurs

Soit un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{E}$.

- Une *famille de scalaires* indicée par un ensemble quelconque I est une application $\lambda : I \mapsto \mathbb{K}$ notée $(\lambda_i)_{i \in I}$.
- Une *famille de vecteurs* indicée par un ensemble quelconque I est une application $I \mapsto \mathbb{E}$ notée $\left(\overrightarrow{u_i}\right)_{i \in I}$.
- On dit qu'une famille de scalaires est *à support fini* lorsque l'ensemble $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}\}$ est fini (les λ_i sont tous nuls, sauf un nombre fini d'entre eux).

Une famille est dite *finie* si I est fini (c'est le cas étudié en première année), et « à n éléments » si I est de cardinal n. Si $I = [\![1, n]\!]$, les familles $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $\left(\overrightarrow{u_i}\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont identifiées aux n-uplets $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\right)$.

⚠ On peut avoir $i \neq j$ et $\lambda_i = \lambda_j$ ou $\overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{u_j}$, ie que les éléments d'une famille ne sont pas nécessairement deux à deux distincts.

✎ ***Exemple.*** $\left(X^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille infinie de « vecteurs » de $\mathbb{R}[X]$.

Définition 18 – Combinaison linéaire

1. <u>Cas d'une famille finie</u>.
   Soit $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\right)$ une famille finie de p vecteurs de $\mathbb{E}$.
   On dit que $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ est combinaison linéaire (= CL) des vecteurs de $\mathscr{F}$ lorsqu'il

existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que :

$$\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \overrightarrow{u_k}$$

2. Cas d'une famille infinie.
On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ est *combinaison linéaire* d'une famille de vecteurs $\left(\overrightarrow{u_i}\right)_{i \in I}$ lorsqu'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ à *support fini* telle que $\overrightarrow{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{u_i}$ (cette somme est finie donc elle existe).

Définition 19 – Notation $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$

1. Cas d'une famille finie. Soit $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$ une famille *finie* de vecteurs de $\mathbb{E}$. On note $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{E}$ qui sont combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$:

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i . \overrightarrow{u_i} \Big/ \forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

et donc pour $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$:

$$\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \Longleftrightarrow \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \Big/ \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i . \overrightarrow{u_i}$$

2. Cas d'une famille infinie. Soit $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_i}\right)_{i \in I}$ une famille *infinie* de vecteurs de $\mathbb{E}$. On note $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{E}$ qui sont combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$:

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i . \overrightarrow{u_i} \Big/ \forall i \in I, \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ et } (\lambda_i)_{i \in I} \text{ à support fini} \right\}$$

Noter que si $\mathscr{F}$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$, on a $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbb{E}$. On adopte aussi la convention : $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.

Théorème 20 – Propriétés de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

1. $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est un sev de $\mathbb{E}$ qui contient $\mathscr{F}$: $\mathscr{F} \subseteq \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$;
2. C'est le plus petit sev de $\mathbb{E}$ contenant $\mathscr{F}$:
si $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ tel que $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{F}$, alors $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbb{F}$.

Important : ce résultat peut servir à montrer très rapidement qu'une partie $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ est un sev.

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big/ x + 2y = z\right\} = \mathrm{Vect}\left[(1, 0, 1); (0, 1, 2)\right]$.

Corollaire 21 – Inclusions de Vect

Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux familles de vecteurs de $\mathbb{E}$:
$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$ donne $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subseteq \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$.

Corollaire 22 – Règles de calcul sur les Vect

Soit $\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}}\right)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

1. Si $\overrightarrow{u_{p+1}}$ est CL de la famille $\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\right)$, alors on peut « l'enlever du Vect » :
$$\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}}\right) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\right)$$
2. On peut additionner à un vecteur toute CL des autres. Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^{p-1}$, alors :
$$\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \overrightarrow{u_p}\right) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \overrightarrow{u_p} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i . \overrightarrow{u_i}\right)$$
3. On peut multiplier un vecteur par un scalaire non nul. Si $\alpha \neq 0$, alors :
$$\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \overrightarrow{u_p}\right) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \alpha . \overrightarrow{u_p}\right)$$
4. $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\right)$ ne dépend pas de l'ordre des vecteurs. Si $\sigma : [\![1, p]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$ est bijective, alors :
$$\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\right) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_{\sigma(1)}}, \ldots, \overrightarrow{u_{\sigma(p)}}\right)$$
5. On peut « enlever le vecteur nul d'un Vect » :
$$\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{0_E}\right) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\right)$$

1.4 Familles génératrices

Définition 23 – Famille génératrice

On dit qu'une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs est *génératrice* de $\mathbb{E}$ lorsque tout vecteur $x \in \mathbb{E}$ s'écrit comme combinaison linéaire (*finie*) de vecteurs de la famille, ie :
$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \mathbb{E}$$

Autrement dit, $\left(\overrightarrow{u_i}\right)_{i \in I}$ est génératrice de $\mathbb{E}$ si, pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$, il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ à support fini et telle que :
$$\overrightarrow{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{u_i}$$

Théorème 24 – Ajout de vecteurs dans une famille génératrice

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux familles finies de vecteurs de $\mathbb{E}$. On suppose que :
(i) $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$;

(ii) $\mathscr{F}$ est génératrice de $\mathbb{E}$.
Alors $\mathscr{G}$ est aussi une famille génératrice de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x+2y=z\}$ est aussi engendré par $\Big((1,0,1);(0,1,2);(1,1,3)\Big)$.

Ainsi, toute sur-famille d'une famille génératrice de $\mathbb{E}$ est encore génératrice de $\mathbb{E}$. Noter qu'en pratique ce résultat n'a que très peu d'intérêt.

Théorème 25 – Enlever des vecteurs dans une famille génératrice

Si $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_{p-1}},\overrightarrow{u_p}\right)$ est génératrice de $\mathbb{E}$, et si $\overrightarrow{u_p}$ est CL de la famille $\widetilde{\mathscr{F}} = \left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_{p-1}}\right)$, alors $\widetilde{\mathscr{F}}$ est encore génératrice de $\mathbb{E}$.

Ce résultat est énoncé dans le cas d'une famille finie, mais il est encore valable dans le cas d'une famille infinie.

On peut donc retenir que dans une famille génératrice de $\mathbb{E}$, si un vecteur est CL des autres, alors on peut l'ôter de la famille tout en gardant une famille génératrice de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** Si $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\left[(1,0);(1,-1);(0,1)\right]$ alors $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\left[(1,0);(0,1)\right]$.

1.5 Familles libres

Définition 26 – Famille libre

1. <u>Cas d'une famille finie</u>. Soit $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\right)$ une famille finie de p vecteurs de $\mathbb{E}$. On dit que $\mathscr{F}$ est une *famille libre*, ou que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, …, $\overrightarrow{u_p}$ sont *linéairement indépendants*, lorsque, pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$:
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{0_E} \Longrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$
2. <u>Cas d'une famille infinie</u>. On dit qu'une famille infinie de vecteurs $\left(\overrightarrow{u_i}\right)_{i\in I}$ est *libre* si, et seulement si, pour toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ *à support fini*,
$$\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{u_i} = 0_E \Longrightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$
3. Lorsqu'une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est *liée*.

Le résultat suivant permet de comprendre la notion de famille liée.

Théorème 27 – Caractérisation des familles liées

Soit $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_i}\right)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors :

$$\mathscr{F} \text{ est liée} \iff \text{un des vecteurs de } \mathscr{F} \text{ est CL des autres}$$

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^2$, $\big((1,2);(1,3)\big)$ est libre et $\big((1,0);(1,1);(0,2)\big)$ est liée.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^3$, $\big((1,0,1);(0,1,0);(0,0,1)\big))$ est libre.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $\big((X-1)^2, X, 1, X^2\big)$ est liée.

✎ ***Exemple.*** Dans l'espace des fonctions $\mathbb{E}=\mathbb{R}^{[0,2\pi]}$, la famille $\big(x\mapsto cos^n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est liée.

✎ ***Exemple.*** Dans l'espace des fonctions $\mathbb{E}=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille $(f_\alpha)_{\alpha>0}$ où $f_\alpha : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\x&\longmapsto&x^\alpha\end{array}$ est libre.

✎ ***Exemple.*** On note $f_n : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\t&\longmapsto&\sin(nt)\end{array}$. La famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre (intégrer entre 0 et π).

Donnons un critère classique de liberté d'une famille de polynômes.

Proposition 28 – Famille de polynômes de degrés étagés

Dans l'espace des polynômes $E=\mathbb{K}[X]$, une famille $(P_i)_{i\in I}$ de polynômes *non-nuls* et de *degrés deux à deux distincts* est libre.

✎ ***Exemple.*** $\big(X^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple la famille $\big(X^k(X-1)^{n-k}\big)$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$ et pourtant les polynômes de cette famille sont tous de même degré n.

Théorème 29 – Enlever des vecteurs dans une famille libre

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux familles finies de vecteurs de $\mathbb{E}$. On suppose que :
(i) $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{G}$;
(ii) $\mathscr{G}$ est libre.
Alors $\mathscr{F}$ est libre.

✎ ***Exemple.*** $\big((1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,0,1)\big)$ est libre.

On peut donc retenir que toute sous-famille d'une famille libre est libre, et donc par contraposée, toute sur-famille d'une famille liée est liée. Noter qu'en pratique ce résultat n'a que très peu d'intérêt.

Théorème 30 – Ajout d'un vecteur dans une famille libre

Si $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$ est libre, alors :

$$\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}}\right) \text{ est libre} \iff \overrightarrow{u_{p+1}} \notin \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$$

et donc par contraposée :

$$\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}}\right) \text{ est liée} \iff \overrightarrow{u_{p+1}} \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right) \iff \overrightarrow{u_{p+1}} \text{ est CL de } \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$$

On peut donc retenir que si on a une famille libre de $\mathbb{E}$, alors on peut lui ajouter un vecteur qui n'est pas CL des vecteurs de la famille, tout en gardant une famille libre.

✎ ***Exemple.*** Former une famille libre à trois vecteurs à partir de $\Big((1,2,0);(2,1,0)\Big)$.

1.6 Bases

Définition 31 – Base

On dit qu'une famille de vecteurs $\left(\overrightarrow{u_i}\right)_{i\in I}$ est une *base* lorsqu'elle est libre et génératrice.

On dit qu'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est de *dimension finie* lorsqu'il admet une famille *génératrice finie* : dans ce cas il admet toujours une base.

De plus, dans un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de $\mathbb{E}$. Par convention, $\dim\left(\{\overrightarrow{0}\}\right) = 0$.

Si $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_i}\right)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$, alors on a équivalence de :
- $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{E}$;
- $\mathscr{F}$ est une famille libre à n éléments ;
- $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{E}$ à n éléments.

Dans un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension n, toute famille libre a au plus n éléments, et toute famille génératrice a au moins n éléments.

Par conséquent, si $\mathbb{E}$ admet une famille libre infinie, alors $\mathbb{E}$ est de dimension infinie.

✎ ***Exemple.*** $\mathscr{B} = \Big((1,0,1);(0,1,2)\Big)$ est une base de $\mathbb{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+2y = z\right\}$.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Base canonique de } \mathbb{K}^n}$ On pose $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\right)$, avec $\overrightarrow{e_i} = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{i–ième position}}}{1}, 0, \dots, 0)$, pour $i \in [\![1,n]\!]$. On a vu au paragraphe 2.3. que $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$, et au paragraphe 2.4. qu'elle est libre. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Base canonique de } \mathbb{K}_n[X]}$ On pose $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. On a vu au paragraphe

2.3. que $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, et au paragraphe 2.4. qu'elle est libre. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Base canonique de } \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ On pose $\mathscr{B} = (E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$. On a vu au paragraphe 2.3. que $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et au paragraphe 2.4. qu'elle est libre. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

✎ ***Exemple.*** Dans l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{K}[X]$, la famille $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}[X]$.

✎ ***Exemple.*** Dans l'espace des suites réelles $\mathbb{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la famille $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ où $e_i = (\delta_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ est libre mais pas génératrice :

$$e_i = \underbrace{(0,0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{terme de rang i}}}{1},0,0,\dots)}_{\text{suite=infinité de termes}}$$

En effet, la suite constante $(1,1,1,\dots,1,\dots)$ ne s'exprime pas comme combinaison linéaire *finie* de vecteurs e_i (mais comme une combinaison linéaire *infinie*, ce qui est exclu de la définition).

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ (avec $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ de dimension finie) sont de dimension *finie* :

$$\begin{array}{ll} \dim\left(\mathbb{K}^n\right) = n & \dim\left(\mathbb{K}_n[X]\right) = n+1 \\ \dim\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right) = np & \dim\left(\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})\right) = \dim(\mathbb{E})\times\dim(\mathbb{F}) \end{array}$$

Par contre $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^I$ et $C^n(I,\mathbb{K})$ sont de dimension *infinie*.

Le théorème suivant est vrai avec des bases infinies, mais nous nous limiterons à des bases finies par souci de simplicité.

Théorème 32 – Caractérisation des bases

Soit $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}\right)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors on a équivalence de :
(i) $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{E}$;
(ii) pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$, $\exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{\varepsilon_k}$.

Définition 33 – Coordonnées dans une base

Soit $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}\right)$ une base de $\mathbb{E}$. Le théorème précédent donne que tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ est caractérisé par l'unique p-liste $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{\varepsilon_k}$.
Les scalaires $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ sont appelés coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}$. On le note :

$$\overrightarrow{x} = (\lambda_1,\dots,\lambda_p)^{\mathscr{B}}$$

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Coordonnées dans la base canonique de } \mathbb{K}^n}$ Elles sont égales aux composantes du vecteur. Par exemple, si $\overrightarrow{x} = (2,1,3)$, alors ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont $(2,1,3)$.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Coordonnées dans la base canonique de } \mathbb{K}_n[X]}$ Elles sont égales aux coefficients de la fonction polynômes. Par exemple, $P = X^2 + 2X + 1$ a pour coordonnées $(1,2,1)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Coordonnées dans la base canonique de } \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ Elles sont égales aux coefficients de la matrice. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(1,-1,1,2,0,1)$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_{23}(\mathbb{R})$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x+2y = z\}$. Une base de $\mathbb{F}$ est $\mathscr{B} = \big((1,0,1);(0,1,2)\big)$. Par exemple : $\overrightarrow{x} = (1,1,3) = (1,1)^{\mathscr{B}}$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $\big(1, X-1, (X-1)^2\big)$, quelles sont les coordonnées de $P = X^2 + 2X + 1$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{E}$ muni d'une base $\big(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}\big)$, quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{\varepsilon_k}$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$?

Nous définissons une nouvelle notion qui sera utile dans le paragraphe sur les sommes de sev.

Définition 34 – Base adaptée à un sev

Si $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ on dit qu'une famille de vecteurs $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{E}$ adaptée à $\mathbb{F}$, lorsque $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ où $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathbb{F}$ et $\mathscr{B}_2$ est une famille (nécessairement libre) de vecteurs de $\mathbb{E}$.

On sait que $\mathbb{G} = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_2)$ est nécessairement un *supplémentaire* de $\mathbb{F}$: $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, l'existence d'une base adaptée à $\mathbb{F}$ est assurée par *le théorème de la base incomplète* : on se donne une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{F}$ qu'on complète en une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{E}$, qui est par construction adaptée à $\mathbb{F}$.

1.7 Compléments sur les applications linéaires

Le théorème suivant permet de déterminer à coup sûr une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Théorème 35 – Image d'une famille de vecteurs

Soient $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

1. On a : $f\big(\mathrm{Vect}[\mathscr{F}]\big) = \mathrm{Vect}\big[f(\mathscr{F})\big]$
2. En particulier si $\mathscr{B}$ est génératrice (ou une base) de $\mathbb{E}$: $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big[f(\mathscr{B})\big]$

Le résultat suivant est fondamental et permet de représenter les applications linéaires par des matrices (en dimension finie).

Théorème 36 – Une application linéaire est définie par l'image d'une base

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ et $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ une base de $\mathbb{E}$. Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{F}$ et une famille de vecteurs de $\mathbb{F}$, $(\overrightarrow{f_i})_{i\in I}$. Il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ telle que

$$\forall i \in I, \quad u(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{f_i}$$

De plus,

— u est injective si et seulement si la famille $(\overrightarrow{f_i})_{i\in I}$ est libre dans $\mathbb{F}$.
— u est surjective si et seulement si la famille $(\overrightarrow{f_i})_{i\in I}$ est génératrice dans $\mathbb{F}$.
— u est bijective si et seulement si la famille $(\overrightarrow{f_i})_{i\in I}$ est une base de $\mathbb{F}$.

Le dernier point peut s'énoncer ainsi : $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ est un isomorphisme si, et seulement si, elle transforme une base en une base. Dans ce cas, cette propriété est vraie pour toutes les bases.

✎ ***Exemple.*** Utiliser ce théorème pour démontrer la formule de Taylor dans $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Pour calculer une dimension on peut procéder par isomorphisme.

Théorème 37 – Isomorphisme et dimension

Si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ est un isomorphisme et si $\mathbb{E}$ ou $\mathbb{F}$ est de dimension finie, alors $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont tous deux de dimension finie et $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F})$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer la dimension de l'espace vectoriel :

$$\mathbb{E} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n\right\}$$

Le lemme suivant permet de démontrer le théorème du rang.

Lemme 38 – Isomorphisme supplémentaire du noyau - image

Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, et une application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.
Soit $\mathbb{H}$ un supplémentaire quelconque de $\ker u$ dans $\mathbb{E}$.
Alors la restriction de u à $\mathbb{H}$:

$$u_{|\mathbb{H}}^{|\mathrm{Im}(u)} : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathrm{Im}\, u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

En d'autres termes, $\operatorname{Im} u$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\ker u$.

On rappelle la notion de rang pour une application linéaire.

Définition 39 – Rang d'une application linéaire

Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et une application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$. On suppose que $\mathbb{E}$ est de dimension finie. On appelle *rang* de u, l'entier

$$\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im} u)$$

Le théorème suivant est fondamental car il relie les notions de noyau et d'image d'une application linéaire, lorsque l'espace de départ est de dimension finie.

Théorème 40 – Théorème du rang

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\mathbb{E}$ de dimension finie. On a la formule du rang :

$$\boxed{\dim \mathbb{E} = \dim\big(\ker u\big) + \operatorname{rg}(u)}$$

Très important. On en déduit que si $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) < +\infty$ (ce qui est le cas pour *un endomorphisme*) :

$$u \text{ bijective} \iff u \text{ injective} \iff u \text{ surjective}$$

⚠ Ce résultat est faux en dimension infinie. Considérer par exemple l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X] : P \longmapsto P'$.

✎ ***Exemple.*** L'application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ & P & \longmapsto & P - 2XP' \end{array}$$

est bijective.

Théorème 41 – Invariance du rang par composition avec un isomorphisme

1. Si $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$,

$$\boxed{\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min\big(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)\big)}$$

2. Soient quatre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[r, "u"] & \mathbb{F} \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{E}' \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "v=\psi\circ u\circ\phi"'] & \mathbb{F}' \end{tikzcd}$$

Si ϕ et ψ sont des isomorphismes, alors

$$\boxed{rg(\psi \circ u \circ \phi) = \operatorname{rg} u}$$

3. En particulier,
   — Si $\mathbb{E}' \xrightarrow{\phi} \mathbb{E} \xrightarrow{u} \mathbb{F}$ et si ϕ est un isomorphisme, $\boxed{\operatorname{rg}(u \circ \phi) = \operatorname{rg}(u)}$.
   — Si $\mathbb{E} \xrightarrow{u} \mathbb{F} \xrightarrow{\psi} \mathbb{F}'$ et si ψ est un isomorphimse, $\boxed{\operatorname{rg}(\psi \circ u) = \operatorname{rg}(u)}$.

1.8 Produit cartésien d'espaces vectoriels

On considère n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n$.

Définition 42 – Produit cartésien $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$

Le produit cartésien $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$ est défini comme étant l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 \in \mathbb{E}_1$ et $x_2 \in \mathbb{E}_2$ et ...et $x_n \in \mathbb{E}_n$, ie :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad x_k \in \mathbb{E}_k$$

Pour $n = 2$ un n-uplet est appelé *couple*, et pour $n = 3$ un n-uplet est appelé *triplet*.

Si $\mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_2 = \cdots = \mathbb{E}_n = \mathbb{E}$, alors $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$ est noté $\mathbb{E}^n$.

Sur $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$ on définit les opérations suivantes :
— si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$:

$$\underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)}_{\text{addition dans } \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_n} = (\underbrace{x_1 + y_1}_{\text{dans } \mathbb{E}_1}, \underbrace{x_2 + y_2}_{\text{dans } \mathbb{E}_2}, \ldots, \underbrace{x_n + y_n}_{\text{dans } \mathbb{E}_n})$$

— si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$:

$$\underbrace{\lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\text{dans } \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_n} = (\underbrace{\lambda.x_1}_{\text{dans } \mathbb{E}_1}, \underbrace{\lambda.x_2}_{\text{dans } \mathbb{E}_2}, \ldots, \underbrace{\lambda.x_n}_{\text{dans } \mathbb{E}_n})$$

Théorème 43 – Structure d'espace vectoriel de $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$

Muni des deux opérations précédentes, $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$ a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Le vecteur nul est $0_{\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_n} = \left(0_{\mathbb{E}_1}, 0_{\mathbb{E}_2}, \ldots, 0_{\mathbb{E}_n}\right)$.
Si $\mathbb{E}_1$, $\mathbb{E}_2$, ..., $\mathbb{E}_n$ sont de dimension finie, alors $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$ l'est aussi et on a la formule :

$$\dim\left(\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \cdots \times \mathbb{E}_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \dim\left(\mathbb{E}_k\right)$$

1.9 Rappels sur les sommes de sev

Définition 44 – Somme de deux parties de $\mathbb{E}$

On considère $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux parties de $\mathbb{E}$.
On appelle somme de $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$, notée $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$, la partie de $\mathbb{E}$ suivante :

$$\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2=\left\{\overrightarrow{x}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\Big/\ \overrightarrow{u_1}\in\mathbb{F}_1 \text{ et } \overrightarrow{u_2}\in\mathbb{F}_2\right\}$$

On a donc $\overrightarrow{x}\in\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$ si et seulement si il existe $\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\in\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2$ tel que $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$.

En général il n'y pas unicité des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ tels que $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$, comme le montre l'exemple suivant.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathbb{F}_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big/\ x+y-z=0\right\}$ et $\mathbb{F}_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big/\ z=0\right\}$.
Alors $(1,1,1)=\underbrace{(0,1,1)}_{\in\mathbb{F}_1}+\underbrace{(1,0,0)}_{\in\mathbb{F}_2}=\underbrace{(1,0,1)}_{\in\mathbb{F}_1}+\underbrace{(0,1,0)}_{\in\mathbb{F}_2}$.

On a les cas particuliers suivants.

Proposition 45 – Cas particuliers

On a $\mathbb{E}+\mathbb{E}=\mathbb{E}$, $\mathbb{E}+\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}=\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}+\mathbb{E}=\mathbb{E}$ et $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}+\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}=\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.

Théorème 46 – Propriétés d'une somme de deux sev

On suppose que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont des sev de $\mathbb{E}$. Alors :

1. $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$ est un sev de $\mathbb{E}$, contenant $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$;
2. c'est le plus petit sev de $\mathbb{E}$ contenant $\mathbb{F}_i$ et $\mathbb{F}_2$, c'est-à-dire que si $\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ vérifant $\mathbb{F}_1\subseteq\mathbb{G}$ et et $\mathbb{F}_2\subseteq\mathbb{G}$, alors $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2\subseteq\mathbb{G}$.

Théorème 47 – Famille génératrice d'une somme de deux sev

Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. On suppose qu'on a $\mathscr{F}$ une famille génératrice de $\mathbb{F}_1$ et $\mathscr{G}$ une famille génératrice de $\mathbb{F}_2$. Alors $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$ est une famille génératrice de $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$:

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F})+\mathrm{Vect}(\mathscr{G})=\mathrm{Vect}(\mathscr{F}\cup\mathscr{G})$$

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Vect}\left[(1,0,1);(0,1,1)\right]+\mathrm{Vect}\left[(1,0,0);(0,1,0)\right]=\mathrm{Vect}\left[(1,0,1);(0,1,1);(1,0,0);(0,1,0)\right]$$

⚠ Ce résultat est *faux avec des familles libres*, comme le montre le contre-exemple suivant.

✎ ***Exemple.*** $\mathscr{F}=\left(\underbrace{(1,0,1)}_{=\overrightarrow{u_1}};\underbrace{(0,1,1)}_{=\overrightarrow{u_2}}\right)$ et $\mathscr{G}=\left(\underbrace{(1,0,0)}_{=\overrightarrow{u_3}};\underbrace{(0,1,0)}_{=\overrightarrow{u_4}}\right)$ sont libres (car composées de deux vecteurs non colinéaires), mais $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}=\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3},\overrightarrow{u_4}\right)$ ne l'est plus car :

$$\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}=(1,-1,0)=\overrightarrow{u_3}-\overrightarrow{u_4}$$

Pour avoir de meilleures propriétés, on a besoin d'une notion plus forte : la notion de somme directe.

Définition 48 – Somme directe de deux sev

Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$.
On dit que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe, ou que la somme $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$ est directe, lorsque $\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2 = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
Dans ce cas $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$ est notée $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$.

Si la somme est directe, on a unicité de la décomposition d'un vecteur en somme d'un vecteur de $\mathbb{F}_1$ et d'un vecteur de $\mathbb{F}_2$: c'est en même une caractérisation.

Théorème 49 – Première caractérisation d'une somme directe

Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. Alors :
$\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe si, et seulement si, tout vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}$ avec $\overrightarrow{f_1} \in \mathbb{F}_1$ et $\overrightarrow{f_2} \in \mathbb{F}_2$.

On peut restreindre la condition de l'unicité de la décomposition au vecteur nul.

Corollaire 50 – Somme directe et décomposition du vecteur nul

Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. Alors :
$\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe si, et seulement si :

$$\forall \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}\right) \in \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2, \quad \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{0}$$

ie que la seule décomposition de $\overrightarrow{0}$ dans $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$ est $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}$.

Si la somme est directe, l'union d'une famille libre de $\mathbb{F}_1$ et d'une famille libre de $\mathbb{F}_2$ donne une famille libre.

Théorème 51 – Famille libre d'une somme directe

Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$, en somme directe. Alors l'union d'une famille libre de $\mathbb{F}_1$ et d'une famille libre de $\mathbb{F}_2$ donne une famille libre de $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$.

On en déduit la seconde caractérisation des sommes directes.

Corollaire 52 – Seconde caractérisation d'une somme directe

Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. Alors :
$\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe si, et seulement si, l'union d'une base de $\mathbb{F}_1$ et d'une

base de $\mathbb{F}_2$ donne une base de $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$.
Ce résultat est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$.

On peut désormais rappeler la définition de deux sev supplémentaires.

Définition 53 – Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$.
On dit qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$ lorsque $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2 = \mathbb{E}$.

⚠ Ne pas confondre *supplémentaire* et *complémentaire*. Par exemple, si l'on sait que $E = E_1 \oplus E_2$, pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout vecteur de E, ne pas distinguer deux cas : $\vec{x} \in E_1$ et $\vec{x} \in E_2$.
C'est une faute très courante !
Penser plutôt à *décomposer* le vecteur : $\vec{x} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \ldots$

On dispose des caractérisations suivantes pour démontrer que deux sev sont supplémentaires.

Théorème 54 – Caractérisations des sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. On a équivalence de :

1. $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$: $\mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$;
2. $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 = \mathbb{E}$ et $\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2 = \{\vec{0_E}\}$;
3. l'union d'une base de $\mathbb{F}_1$ et d'une base de $\mathbb{F}_2$ donne une base de $\mathbb{E}$;
4. tout vecteur $\vec{e} \in \mathbb{E}$ se décompose de manière unique sous la forme $\vec{e} = \vec{f_1} + \vec{f_2}$, avec $\vec{f_1} \in \mathbb{F}_1$ et $\vec{f_2} \in \mathbb{F}_2$.

Dans ce cas l'union de n'importe quelle base de $\mathbb{F}_1$, avec n'importe quelle base de $\mathbb{F}_2$ donne une base de $\mathbb{E}$; on dit qu'on a une **base de $\mathbb{E}$ adaptée** à la somme directe $\mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$.

On peut retenir qu'en coupant une base de $\mathbb{E}$ en deux sous-familles $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, alors $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ engendrent deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{E}$ (d'après le point 3.).

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\big[(1,0)\big] \oplus \mathrm{Vect}\big[(0,1)\big]$, donc $\mathbb{F}_1 = \mathrm{Vect}\big[(1,0)\big]$ et $\mathbb{F}_2 = \mathrm{Vect}\big[(0,1)\big]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Rédaction : Dans la majorité des cas, on utilise le point 4. pour montrer que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$.

On a donc deux choses à démontrer : l'existence et l'unicité de la décomposition de tout vecteur de $\mathbb{E}$. Il est plus facile commencer par vérifier l'unicité de la décomposition (si elle existe), puis de vérifier l'existence d'au moins une décomposition (en en donnant un exemple).

On rédige cette démonstration par **analyse-synthèse** :

• On montre que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont deux sev de $\mathbb{E}$. On a donc $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{E}$.

• On se donne $\vec{e} \in \mathbb{E}$ fixé quelconque.

• **ANALYSE** : on suppose qu'on a trouvé au moins une décomposition de de $\vec{e}$: $\vec{e} = \vec{f_1} + \vec{f_2}$, avec $\vec{f_1} \in \mathbb{F}_1$ et $\vec{f_2} \in \mathbb{F}_2$.
$\hookrightarrow$ *On veut montrer que cette décomposition est unique ; pour cela on cherche à calculer $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ en fonction de $\vec{e}$.*
À ce stade, on a montré que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe ; donc $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{E}$.

• **SYNTHESE** :
$\hookrightarrow$ *On veut montrer que $\vec{e}$ a au moins une décomposition ; pour cela on utilise les formules obtenues dans la partie analyse.*
On définit donc $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ en fonction de $\vec{e}$, à partir des formules obtenues dans la partie analyse. Il reste à vérifier que ceci donne bien une décomposition de $\vec{e}$ dans $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$, c'est-à-dire trois points :
(i) $\vec{f_1} \in \mathbb{F}_1$; (ii) $\vec{f_2} \in \mathbb{F}_2$ et (iii) $\vec{f_1} + \vec{f_2} = \vec{e}$.
On alors montré que $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$; et donc par double-inclusion : $\mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$.

La synthèse n'est qu'une simple vérification, mais elle est indispensable dans le raisonnement, il ne faut donc pas la négliger ! Considérer par exemple $\mathbb{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{F}_1 = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \middle/ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = a_{n+1} + a_{n+2}\right\}$ et $\mathbb{F}_2 = \left\{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \middle/ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} + b_{n+2} = 0\right\}$: la somme est directe mais différente de $\mathbb{E}$!

En dimension finie, on dispose de nouveaux résultats.

Théorème 55 – Sommes de sev et dimension

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev, et $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie.

1. $\mathbb{F} + \mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie et : $\dim(\mathbb{F} + \mathbb{G}) \leq \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$;
2. si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont en somme directe, alors $\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie et : $\dim(\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$.

On peut préciser ce théorème grâce à la formule de Grassmann.

Théorème 56 – Formule de Grassmann

Si $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ sont deux sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie :

$$\boxed{\dim(\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2) = \dim \mathbb{F}_1 + \dim \mathbb{F}_2 - \dim(\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2)}$$

Un résultat fondamental : l'existence de supplémentaires de dimension finie.

Théorème 57 – Existence d'un supplémentaire en dimension finie

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors tout sev $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ admet des supplémentaires $\mathbb{G}$ dans $\mathbb{E}$ (ie $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$), et ils vérifient $\dim(\mathbb{G}) = \dim(\mathbb{E}) - \dim(\mathbb{F})$.

⚠ Il n'y pas unicité d'un supplémentaire mais seulement de sa dimension.

Autre résultat important, la dimension finie donne deux nouvelles caractérisations très simples des sev supplémentaires.

Théorème 58 – Caractérisation des sev supplémentaires

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$. On a équivalence des propositions :

1. $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$: $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$;
2. $\mathbb{F} + \mathbb{G} = \mathbb{E}$ et $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{\overrightarrow{0_E}\}$;
3. l'union d'une base de $\mathbb{F}$ et d'une base de $\mathbb{G}$ donne une base de $\mathbb{E}$ (c'est alors vrai pour toutes les bases) ;
4. tout vecteur $\overrightarrow{e} \in \mathbb{E}$ se décompose de manière unique sous la forme $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$, avec $\overrightarrow{f} \in \mathbb{F}$ et $\overrightarrow{g} \in \mathbb{G}$;
5. $\mathbb{E} = \mathbb{F} + \mathbb{G}$ et $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$;
6. $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\}$ et $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}[(1,1,1)]$ et $\mathbb{G} = \{(x,y,a) \in \mathbb{R}^3 / \ x+y+z=0\} = \mathrm{Vect}\left[(1,0,-1);(0,1,-1)\right]$.
On a $\dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) = 3$ et $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

1.10 Compléments sur les sommes de sev

Définition 59 – Somme d'une famille finie de sev

On considère p sous espaces vectoriels $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_p$ d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$. On définit la *somme* de ces sous-espaces par :

$$\mathbb{E}_1 + \cdots + \mathbb{E}_p = \left\{\overrightarrow{u_1} + \cdots + \overrightarrow{u_p} \Big/ \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right) \in \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_p\right\}$$

Cet ensemble est aussi noté $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathbb{E}_k$.

On montre facilement le théorème suivant.

Théorème 60 – Une somme de sev est un sev

La somme d'une famille finie de sev de $\mathbb{E}$ est encore un sev de $\mathbb{E}$.

On généralise ensuite la notion de somme directe.

Définition 61 – Somme directe

On dit qu'une somme $\mathbb{E}_1 + \cdots + \mathbb{E}_p$ est *directe* si et seulement si

$$\forall (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) \in \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_p, \quad \overrightarrow{u_1} + \cdots + \overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0_{\mathbb{E}}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_1} = \cdots = \overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0_{\mathbb{E}}}$$

On note alors $\mathbb{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}_p$ une telle somme directe, ou encore $\bigoplus_{k=1}^{p} \mathbb{E}_k$.

On retrouve l'unicité de la décomposition pour tout vecteur appartenant à la somme directe.

Théorème 62 – Unicité de la décomposition sur une somme directe

Soit une somme de sev $\mathbb{E}_1 + \cdots + \mathbb{E}_p$.
Alors cette somme est directe si, et seulement si, tout vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}_1 + \cdots + \mathbb{E}_p$ se décompose de façon *unique* $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u_1} + \cdots + \overrightarrow{u_p}$ où $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) \in \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_p$.

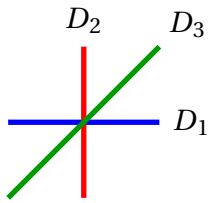
Par contre, si on regarde l'intersection des sev pour savoir si ils sont en somme directe, les choses ne se passent pas aussi bien qu'on le souhaiterait.

Théorème 63 – Caractérisation d'une somme directe

La somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe si et seulement si

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad E_i \cap \Big(\sum_{j \neq i} E_j\Big) = \{\overrightarrow{0_E}\}$$

⚠ Attention à la caractérisation d'une somme directe dans le cas de plus de deux sev ! Dans $E = \mathbb{R}^2$, trois droites vectorielles D_1, D_2, D_3 distinctes sont en somme directe deux à deux, mais la somme $D_1 + D_2 + D_3$ n'est pas directe !



⚠ La caractérisation de la somme directe de plus de deux sev est hors-programme. Ne pas chercher à l'utiliser en pratique. Il faut simplement eviter l'erreur signalée ci-dessus.

✎ ***Exemple.*** On définit les sev des matrices symétriques $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tM = M\}$ et antisymétriques $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tM = -M\}$.
Ces sev sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Le théorème suivant stipule que décomposer l'espace en somme directe, cela revient à découper une base.

Théorème 64 – Base adaptée à une décomposition en somme directe

1. On considère une décomposition en somme directe $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}_p$.
   On suppose que chaque sev $\mathbb{E}_k$ possède une base. Alors la réunion des vecteurs de ces bases est une base de $\mathbb{E}$, appelée *base adaptée à la somme directe* $\mathbb{E}$.
2. Réciproquement, si on fractionne une base de $\mathbb{E}$ en p sous-familles de vecteurs $\mathscr{B}_i$, et si on note $\mathbb{E}_i$ l'espace engendré par $\mathscr{B}_i$, on a $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}_p$.

On en déduit des propriétés sur la dimension d'une somme de sev.

Théorème 65 – Dimension d'une somme

Dans un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie, on considère un nombre fini de sev $\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_p$.

1. On a :
$$\dim(\mathbb{E}_1 + \cdots + \mathbb{E}_p) \leq \sum_{k=1}^{p} \dim \mathbb{E}_k$$
2. On a *égalité* si, et seulement si, la somme est directe.
   En particulier :
$$\dim\left(\bigoplus_{k=1}^{p} \mathbb{E}_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim \mathbb{E}_k$$

On en déduit une nouvelle caractérisation d'une décomposition en somme directe en dimension finie.

Le résutat suivant justifie à lui seul l'utilisation de la notion de somme directe.

Proposition 66 – Application linéaire définie sur une somme directe

Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.

Soit une famille finie de sev telle que $\mathbb{E} = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathbb{E}_k$.

On considère aussi une famille finie d'applications linéaires $u_k \in \mathscr{L}(\mathbb{E}_k, \mathbb{F})$.
Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ telle que $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $u_{|\mathbb{E}_k} = u_k$.

2 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Une forme linéaire est un cas particulier d'application linéaire.

Définition 67 – Formes linéaires

On appelle *forme linéaire* d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, toute application linéaire $\phi : E \mapsto \mathbb{K}$.

Important. Par un argument de dimension, toute forme linéaire φ *non nulle* est *surjective* : $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$.

La notion de forme linéaire permet d'introduire la notion d'hyperplan, même en dimension infinie.

Définition 68 – Hyperplan

On appelle *hyperplan* de $\mathbb{E}$, le noyau d'une forme linéaire non-nulle sur $\mathbb{E}$: $H = \ker \phi$.

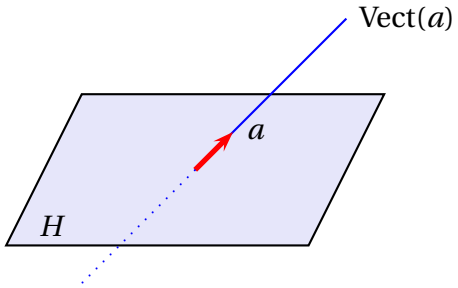
On dit alors que ϕ est une équation cartésienne de $\mathbb{H}$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^3$, l'équation cartésienne $x + y + 2z = 0$ définit un hyperplan.

Donnons une caractérisation plus géométrique des hyperplans.

Théorème 69 – Caractérisation des hyperplans

Soit $\mathbb{H}$ un sev d'un K-ev $\mathbb{E}$.Alors $\mathbb{H}$ est un hyperplan si, et seulement si, $\mathbb{H}$ admet une droite vectorielle comme supplémentaire.
Dans ce cas, toute droite vectorielle du type $\mathrm{Vect}(a)$, où $a \notin \mathbb{H}$, est supplémentaire de $\mathbb{H}$.



En dimension finie, on en déduit que tous les hyperplans sont de même dimension.

Théorème 70 – Dimension d'un hyperplan

Si E est de dimension finie $n \geq 1$, les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces de E de dimension $(n-1)$.

En dimension 2 les hyperplans sont donc les droites, et en dimension 3 ce sont les plans.

Théorème 71 – Formes linéaires de même noyau

Soient ϕ et ψ deux formes linéaires non nulles sur E. Alors :

$$\ker\phi = \ker\psi \iff \exists\lambda \in \mathbb{K},\ \psi = \lambda\phi$$

On en déduit qu'un hyperplan peut être définie par plusieurs équations cartésiennes, mais celles-ci sont toutes proportionnelles entre elles.

3 Matrices

3.1 Produit matriciel

Définition 72 – Produit de matrices

Soit deux matrices $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $B = ((b_{ij})) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit la *matrice produit* $AB = ((c_{ij})) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad \boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}}$$

Remarque. Avant de faire un produit matriciel avec des matrices qui ne sont pas carrées, vérifier la compatibilité des tailles : $\underset{n\times q}{A} \times \underset{q\times p}{B} = \underset{n\times p}{AB}$

Théorème 73 – Cas de matrices triangulaires/diagonales

Soient $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$.Soient $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$

1. Si $(A,B) \in \left(T_n^+(\mathbb{K})\right)^2$ alors : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(AB)[i,i] = A[i,i] \times B[i,i]$. Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & \lambda_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ 0 & \mu_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & & \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

2. En particulier, si A et B sont deux matrices *diagonales* $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $B = \mathrm{Diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)$, alors :

$$AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix} = BA$$

Corollaire 74 – Produit de matrices triangulaires/diagonales

1. Le produit de deux matrices *triangulaires supérieures* (resp. inférieures) donne une matrice *triangulaire supérieure* (resp. inférieures), autrement dit le produit matriciel laisse stable $T_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $T_n^-(\mathbb{K})$).
2. Le produit de deux matrices *diagonales* donne une matrice *diagonale*, autrement dit le produit matriciel laisse stable $D_n(\mathbb{K})$.
   De plus, deux *matrices diagonales commutent* toujours entre elles.

⚠ En général, une matrice diagonale ne commute pas avec une matrice quelconque.

Pour calculer les puissances d'une matrice, on utilise souvent la formule du binôme.

✎ ***Exemple.*** On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour tout entier naturel n.

Théorème 75 – Produit de matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Pour deux matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a la formule importante suivante qui donne leur produit :

$$\boxed{E_{ij}E_{kl} = \delta_{ik}E_{jl}}$$

On rappelle que $E_{ij}[k,l] = \delta_{i,k} \times \delta_{j,l}$.

✎ ***Exemple.*** Les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices sont les matrices scalaire, ie les matrices de la forme $\lambda.I_n$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Théorème 76 – Produit par blocs

Soient des matrices $A, A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D, D' \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C, C' \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On calcule « par blocs »le produit matriciel des matrices $(p+q) \times (p+q)$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}}$$

On peut généraliser ce calcul à d'autres découpages par blocs, à condition que les tailles des différentes matrices soient compatibles avec le produit matriciel.

On a aussi :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + A' & B + B' \\ C + C' & D + D' \end{pmatrix}$$

et :

$$\lambda.\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.A & \lambda.B \\ \lambda.C & \lambda.D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix}$$

✎ ***Exemple.*** Si $A = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$, alors $A^2 = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$.

✎ ***Exemple.*** Soient deux matrices $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ avec $p < n$. Alors $\det(AB) = 0$.

✎ ***Exemple.*** Produit de matrices diagonales par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_nB_n \end{pmatrix}$$

Définition 77 – Matrice inversible

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible (à gauche et à droite) lorsqu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

On dispose de beaucoup de caractérisations des matrices inversibles.

Théorème 78 – Matrices inversibles

L'ensemble des matrices carrées inversibles est noté $Gl_n(\mathbb{K})$, appelé « groupe linéaire » d'ordre n sur $\mathbb{K}$.

1. Une matrice est inversible si, et seulement si, elle représente un endomorphisme bijectif dans une base.
2. Une matrice est inversible si, et seulement si, elle est *injective* :
$$A \in Gl_n(\mathbb{K}) \iff \left(\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = 0_{n,1} \implies X = 0_{n,1}\right)$$
3. Une matrice est inversible si et seulement si elle est inversible à droite (ou à gauche).
4. Si on connaît un polynôme annulateur d'une matrice,
$$a_pA^p + \dots + a_1A + a_0I_n = 0$$
avec $a_0 \neq 0$, on sait que A est inversible et on connaît l'expression de son inverse :
$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(a_pA^{p-1} + \dots + a_2A + a_1I_n\right)$$

✎ ***Exemple.*** Soit $A = ((a_{ij})) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice à *diagonale dominante* :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Alors A est inversible (**Théorème d'Hadamard**).

✎ ***Exemple.*** Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est telle que $A^3 + A + 2I_n = 0_n$ alors A est inversible.

✎ ***Exemple.*** Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente alors elle n'est pas inversible.

3.2 Rang d'une matrice

Définition 79 – Rang d'une matrice

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a pour vecteurs colonnes $C_1, \dots, C_p$, alors le rang de A est défini par :

$$\mathrm{rg}(A) = \dim\big(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)\big)$$

✎ ***Exemple.*** $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 2.$

Notons que deux matrices semblables ont même rang.

Le rang d'une matrice est lié à la notion de rang des applications linéaires.

Théorème 80 – Lien avec les applications linéaires

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ représente $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ dans des bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$, alors :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u)$$

Le rang permet de caractériser l'inversibilité, sans avoir à calculer l'inverse.

Théorème 81 – Rang et inversibilité

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a : A inversible $\iff \mathrm{rg}(A) = n$.

Il faut aussi connaître le résultat suivant.

Théorème 82 – Rang de la transposée

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\big({}^tA\big)$.

Toutes les propriétés du rang énoncée ci-dessus par rapport aux colonnes d'une matrice sont aussi valables pour les lignes.

3.3 Opérations élémentaires

Les opérations élémentaires effectuées sur les lignes d'une matrice (ou d'un système linéaire), permettent de la (le) mettre sous forme triangulaire.

On obtient ainsi un algorithme permettant de déterminer le rang d'une matrice, l'inverse d'une matrice ou encore son déterminant...

Définition 83 – Matrices de dilatation/permutation/transvection

On définit les matrices suivantes :

1. Matrices de dilatation ($\lambda \neq 0$, $i \in [\![1, n]\!]$) :

$$D_\lambda(i) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$$

2. Matrices de permutation ($i \neq j$) :

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$$

3. Matrices de transvection ($\lambda \neq 0$, $i \neq j$) :

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & \lambda & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + \lambda E_{ij}$$

Ces matrices donnent une interprétation des opérations élémentaires en terme de produit matriciel.

Théorème 84 – Propriétés des matrices de dilatation/permutation/transvection

1. Les matrices élémentaires sont inversibles et on calcule facilement leur déterminant et leur inverse :
   (a) $\det\big(D_\lambda(i)\big) = \lambda$, $D_\lambda(i)^{-1} = D_{1/\lambda}(i)$
   (b) $\det\big(P_{ij}\big) = -1$, $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$
   (c) $\det\big(T_{ij}(\lambda)\big) = 1$, $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice quelconque.
   Multiplier à gauche la matrice A par une matrice élémentaire correspond à une opération élémentaire sur les lignes de la matrice A :
   (a) $D_\lambda(i) \times A : L_i \leftarrow \lambda L_i$
   (b) $P_{ij} \times A : L_i \leftrightarrow L_j$
   (c) $T_{ij}(\lambda) \times A : L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
3. Multiplier à droite la matrice A par une matrice élémentaire correspond à une opération élémentaire sur les colonnes de la matrice A :
   (a) $A \times D_\lambda(i) : C_i \leftarrow \lambda C_i$
   (b) $A \times P_{ij} : C_i \leftrightarrow C_j$
   (c) $A \times T_{ij}(\lambda) : C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

Grâce à ces matrices, on peut mettre en place l'algorithme de Gauss-Jordan, qui permet de mettre une matrice sous forme *échelonné* en un nombre fini d'opérations élémentaires. Rappelons qu'une matrice est *échelonée* lorsque :
(i) si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes sont nulles ;
(ii) si le premier terme non nul de la ligne i est en position j, soit la $(i+1)^{\text{ième}}$ est nulle, soit le premier terme non nul de la $(i+1)^{\text{ième}}$ ligne est en position k avec $k > j$.
Autrement dit : d'une ligne à l'autre il y a <u>au moins une</u> inconnue en moins « sur la gauche ».

Proposition 85 – Algorithme du rang

En effectuant un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice, on ne modifie pas son rang. On dispose ainsi d'un algorithme qui permet de calculer le rang d'une matrice en la transformant en matrice échelonnée.

On peut aussi résoudre un système linéaire grâce à cet algorithme.

Théorème 86 – Transformation en système triangulaire

Soit une matrice inversible $A \in Gl_n(\mathbb{K})$ et le système de Cramer associé $AX = B$. On peut transformer à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ce système en un système équivalent triangulaire supérieur en $\mathscr{O}(n^3)$ multiplications scalaires. La résolution est alors zn $\mathscr{O}(n^2)$ multiplications scalaires.

Cet algorithme permet aussi de calculer un déterminant.

Théorème 87 – Calcul d'un déterminant

Si on transforme A en une matrice triangulaire supérieure T (non réduite) via l'algorithme de Gauss-Jordan, alors $\det(A)$ est égal à $\det(T)$, éventuellement multiplié par -1 si on a effectuée un nombre impair d'échanges de lignes au cours de l'algorithme (pour obtenir des pivots non nuls).
Le coût en opérations de cet algorithme est en $\mathcal{O}(n^3)$.

On utilise aussi cet algorithme pour déterminer l'inverse d'une matrice.

Théorème 88 – Calcul de l'inverse d'une matrice

On dispose de deux méthodes permettant de calculer l'inverse d'une matrice carrée.

1. Méthode du miroir. On effectue des opérations sur les colonnes d'une matrice A pour la transformer en la matrice I_n. En effectuant les mêmes opérations à partir de la matrice I_n, on obtient à la fin la matrice A^{-1}.
2. Méthode du système linéaire. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et X, Y sont deux matrices colonnes, on résout le système linéaire $AX = Y$. S'il est de Cramer, alors A est inversible et l'unique solution est $X = A^{-1}Y$.
3. Ces deux méthodes sont en $\mathcal{O}(n^3)$ multiplications scalaires.

✎ ***Exemple.*** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 10 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

3.4 Représentations matricielles

Rappelons la définition de la matrice représentative d'une famille de vecteurs dans une base.

Définition 89 – Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $\mathbb{E}$.
Si $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$, on lui associe la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que la j-ième colonne de A est égale aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u_j}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathcal{F}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \overrightarrow{u_1} & \dots & \overrightarrow{u_j} & \dots & \overrightarrow{u_p} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow \overrightarrow{\varepsilon_1} \\ \vdots \\ \leftarrow \overrightarrow{\varepsilon_i} \\ \vdots \\ \leftarrow \overrightarrow{\varepsilon_n} \end{array} \end{array}$$

où on a posé : $\forall j \in [\![1,p]\!], \quad \overrightarrow{u_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.\overrightarrow{\varepsilon_k}$

On rappelle aussi la définition de la matrice d'une application linéaire par rapport à une base fixée dans l'espace de départ et une base fixée dans l'espace d'arrivée.

Définition 90 – Matrice d'une application linéaire dans des bases

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $p \geq 1$, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de $\mathbb{E}$.
Soient $\mathbb{F}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $\mathbb{F}$.
Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ on lui associe la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$A = \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(f) = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{e_1}) & \dots & f(\overrightarrow{e_j}) & \dots & f(\overrightarrow{e_p}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow \overrightarrow{\varepsilon_1} \\ \vdots \\ \leftarrow \overrightarrow{\varepsilon_i} \\ \vdots \\ \leftarrow \overrightarrow{\varepsilon_n} \end{array} \end{array}$$

où on a posé : $\forall j \in [\![1,p]\!], \quad f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.\overrightarrow{\varepsilon_k}$

Réciproquement : toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définit une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, appelée *application linéaire canoniquement associée.*

Dans le cas d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, on choisit pour simplifier la même base au départ et à l'arrivée.

Définition 91 – Matrice d'un endomorphisme dans une base

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $\mathbb{E}$.
On associe à $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ la matrice $A = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notée plus simplement $\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B})$ ou $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$:

$$A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{\varepsilon_1}) & \dots & f(\overrightarrow{\varepsilon_j}) & \dots & f(\overrightarrow{\varepsilon_n}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow \overrightarrow{\varepsilon_1} \\ \vdots \\ \leftarrow \overrightarrow{\varepsilon_i} \\ \vdots \\ \leftarrow \overrightarrow{\varepsilon_n} \end{array} \end{array}$$

où on a posé : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ f(\vec{\varepsilon_j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.\vec{\varepsilon_k}$

Rappelons ensuite l'utilité de ces représentations matricielles.

Si $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}p1(\mathbb{K})$, le produit $A \times X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est donné par :

$$A \times X = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k} \times x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{nk} \times x_k \end{pmatrix} \leftarrow \quad \text{ligne } i$$

ie que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$(AX)[i,1] = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times x_k$$

Théorème 92 – Image d'un vecteur par une application linéaire

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathscr{B}$ et de dimension $p \geq 1$, $\mathbb{F}$ un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathscr{C}$ et de dimension $n \geq 1$, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, $x \in \mathbb{E}$ et $y \in \mathbb{F}$.

On note $A = \mathrm{Mat}((;\mathscr{B},\mathscr{C})f) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K})$ et $Y = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(y) \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Alors :

$$y = f(x) \Longleftrightarrow Y = A \times X$$

On en déduit le résultat important suivant.

Corollaire 93 – Égalité de deux matrices

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. On a :
$$A = B \Longleftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K}), \quad A \times X = B \times X$$
2. On a :
$$A = 0_{np} \Longleftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K}), \quad A \times X = 0_{n1}$$

Le théorème précédent indique aussi comment trouver l'expression analytique d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

✎ ***Exemple.*** On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ z \\ x+2y+z \end{pmatrix}$$

donc $f(x,y,z) = (x+2y+z, z, x+2y+z)$.

On peut aussi définir le noyau et l'image d'une matrice.

Définition 94 – Noyau et image d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. On appelle noyau de A la partie de $\mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K})$ suivante :

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K}) \middle/ AX = 0_{p1} \right\}$$

2. On appelle image de A la partie de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ suivante :

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ AX \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \middle/ X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \right\}$$

3. On dit que A est injective lorsque $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{p1}\}$.
4. On dit que A est surjective lorsque $\mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Notons $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n\right)$ l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors :

$$(x_1, \dots, x_p) \in \mathrm{Ker}(f) \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$$

et donc :

$$f \text{ est injective} \iff A \text{ est injective}$$

De plus en identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$, on peut considérer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(f)$.

De même :

$$(y_1, \dots, y_n) \in \mathrm{Im}(f) \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$$

et donc :

$$f \text{ est surjective} \iff A \text{ est surjective}$$

De plus en identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$, on peut considérer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(f)$.

3.5 Changements de base

Pour établir les formules de changement de base, nous avons besoin de la notion de matrice de passage.

Définition 95 – Matrice de passage

Soit un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ de dimension n et deux bases $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$, $\mathscr{C} = (\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n})$ de l'espace $\mathbb{E}$. On appelle *matrice de passage* de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{C}$, la matrice

$$\boxed{P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n})}$$

Elle est inversible et on a $P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}^{-1}$.

Rappelons la formule de changement de base pour un vecteur.

Définition 96 – Changement de base pour un vecteur

Soit un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ de dimension finie n et une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{E}$.
Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ un vecteur.
On a la formule de changement de base :

$$\boxed{\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} \times \operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}}(x) \qquad X = PX'}$$

Donnons ensuite la formule de changement de base pour une application linéaire.

Définition 97 – Changement de bases pour une application linéaire

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $p \geq 1$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $\mathbb{E}$.
Soient $\mathbb{F}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de $\mathbb{F}$.
Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, on a la formule de changement de base

$$\boxed{\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = P_{\mathscr{C}'\to\mathscr{C}} \times \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \qquad A' = Q^{-1}AP}$$

Terminons par le cas d'un endomorphisme.

Définition 98 – Changement de base pour un endomorphisme

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $p \geq 1$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $\mathbb{E}$.
Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, on a la formule de changement de base

$$\boxed{\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} \times \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \qquad A' = P^{-1}AP}$$

La formule de changement de base pour un endomorphisme amène à introduire la notion de matrice semblable.

Définition 99 – Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices *carrées*.
On dit qu'elles sont *semblables* lorsque

$$\exists P \in Gl_n(\mathbb{K}) \text{ tq } B = PAP^{-1}$$

Deux matrices semblables représentent donc le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Remarque. La relation de similitude sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence (relation réflexive, symétrique et transitive).

La trace est un invariant classique pour la relation de similitude.

Définition 100 – Trace d'une matrice carrée

Soit une matrice *carrée* $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle *trace* de matrice A, le scalaire

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

Les règles de calcul sont les suivantes.

Théorème 101 – Propriétés de la trace

L'application

$$\mathrm{Tr} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{array}$$

est une *forme linéaire* sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\left({}^tA\right) = \mathrm{Tr}(A)}$$

✎ ***Exemple.*** Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $AB - BA = I_n$.

Théorème 102 – Deux matrices semblables ont même trace

Si deux matrices A et B sont semblables, alors elles ont même trace : $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

On peut donc définir la trace d'un endomorphisme.

Définition 103 – Trace d'un endomorphisme en dimension finie

Soit un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ où $\mathbb{E}$ est de dimension finie.
Soit une base $\mathscr{B}$ quelconque de l'espace $\mathbb{E}$.
On appelle trace de l'endomorphisme u, la trace de la matrice $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}u$.
Cette définition est correcte, puisque ce scalaire ne dépend pas de la base **e** choisie pour le calculer.

✎ ***Exemple.*** Soit p un projecteur d'un espace $\mathbb{E}$ de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

3.6 Déterminants

Définition 104 – Définition du déterminant

Le *déterminant* d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est l'unique application $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :

1. f est *multilinéaire*, ie linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ;
2. f est *antisymétrique* par rapport aux colonnes de sa variable ;
3. $f(I_n) = 1$

Cette application est notée det.

Remarque. La formule suivante (vue en MPSI) n'est pas au programme en PSI :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

où S_n désigne le groupe des permutations, et ε la fonction signature.
Mais on peut retenir que le déterminant de A se calcule à partir de sommes et produits des coefficients de A. On dit que $\det(A)$ est un polynôme en les coefficients de A.

Pour calculer le déterminant d'une matrice, on utilise les formules de développements par rapport à une ligne ou une colonne (appelées formules de Laplace).

Définition 105 – Cofacteurs

Soit un déterminant d'une matrice $n \times n$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. On note m_{ij} le déterminant $(n-1) \times (n-1)$ obtenu en barrant la ième ligne et la jième colonne de Δ. m_{ij} s'appelle le *mineur* relatif à a_{ij}
2. On appelle *cofacteur* de Δ relatif à a_{ij}, le scalaire $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$

Sur des exemples non triviaux, le déterminant se calcule alors de la manière suivante.

Théorème 106 – Développement d'un déterminant par rapport à une ligne-colonne

Soit un déterminant $n \times n$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. Développement par rapport à la jième colonne :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$$

2. Développement par rapport à la ième ligne :

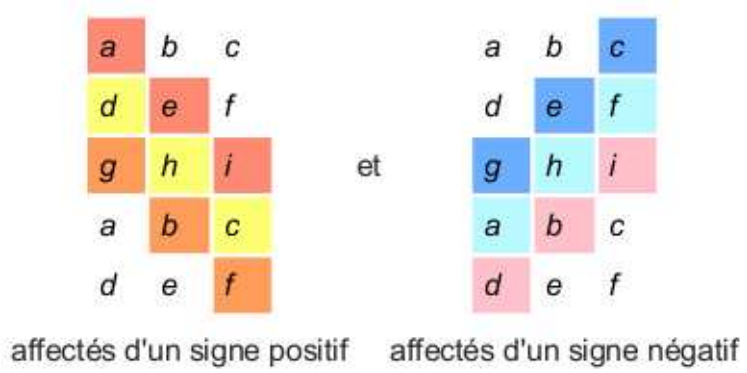
$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$$

✎ ***Exemple.*** Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Remarque. Pour les déterminants d'ordre 3, il existe la formule de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (a.e.i + d.h.c + g.b.f) - (g.e.c + a.h.f + d.b.i)$$

qui se retient de manière visuelle :



⚠ Cette formule *n'est pas au programme*, il est donc déconseillé de l'utiliser.

Terminons par les propriétés générales de la fonction déterminant.

Théorème 107 – Propriétés du déterminant d'une matrice

Soient deux matrices carrées $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de l'espace $\mathbb{E}$.
On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A.
On a les propriétés suivantes :

1. (A inversible) $\iff$ ($\det(A) \neq 0$).
   Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
2. $\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)}$.
   En particulier, deux matrices semblables ont même déterminant, et on peut donc définir le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$: $\det(u) = \det(A)$ où $A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$.
3. Opérations élémentaires sur les colonnes.
   • $\det\left(C_1, \dots, C_i - \sum_{k \neq i} \lambda_k . C_k, \dots, C_n\right) = \det(C_1, \dots, C_n)$.
   • $\det(C_1, \dots, \lambda . C_i, \dots, C_n) = \lambda \times \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$.
   Donc $\det(\lambda . A) = \lambda^n \times \det(A)$.
   • On change le signe du déterminant en inversant deux colonnes.
4. $\det(A) = \det({}^tA)$. Grâce à cette remarque, les propriétés citées sur les colonnes de la matrices sont encore vraies sur les lignes.
5. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux :
$$\begin{vmatrix} d_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{vmatrix} = d_1 \dots d_n$$

⚠ Le déterminant est *multilinéaire* :

$$\det(C_1, \dots, C_i + C'_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C'_i, \dots, C_n).$$

Par contre il n'est pas *linéaire* : $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

$$\det(C_1 + C'_1, \dots, C_i + C'_i, \dots, C_n + C'_n) \neq \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \det(C'_1, \dots, C'_i, \dots, C'_n).$$

L'exemple suivant, qui a de nombreuses applications, fait partie du programme de PSI.

Théorème 108 – Calcul d'un déterminant de Vandermonde

Soient n scalaires $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle déterminant de Vandermonde, le déterminant $n \times n$:

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Alors :

$$\boxed{V(a_1, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)}$$

En particulier, la matrice de Vandermonde est inversible si et seulement si tous les scalaires $(a_1, \dots, a_n)$ sont distincts.

Le calcul par blocs simplifie aussi les calculs de déterminants.

Théorème 109 – Déterminant triangulaire par blocs

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Alors on remarque que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$$

On en déduit le déterminant de la matrice $(n+p)$:

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(C)}$$

Remarquer que cette formule est valable en particulier pour une matrice diagonale par blocs :

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix} = \det(A_1) \times \dots \det(A_n)$$

⚠ Attention, en général, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$. N'utiliser en pratique que la formule du théorème précédent et s'y ramener en utilisant des opérations classiques sur les déterminants.

✎ ***Exemple.*** On considère pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$, le déterminant d'ordre $2n$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & & 0 & b & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & a & 0 & & b \\ c & & 0 & d & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & c & 0 & & d \end{vmatrix}$$

Alors $\Delta = (ad - bc)^n$.

3.7 Polynômes annulateurs

Définition 110 – Polynôme d'endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_k X^k$$

On note

$$P(u) = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 u + \dots + a_k u^k$$

On dit que $P(u)$ est un polynôme de l'endomorphisme u.

Remarquer que a_0 devient $a_O\mathrm{id}_E$, donc 1 devient id_E.

L'ensemble des polynômes de l'endomorphisme u est noté $\mathbb{K}[u]$:

$$\mathbb{K}[u] = \left\{P(u) \big/ P \in \mathbb{K}[X]\right\}$$

Théorème 111 – Structure algébrique de $\mathbb{K}[u]$

$\mathbb{K}[u]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{E})$, dont les éléments commutent pour la loi $\circ$ (c'est une sous-algèbre commutative).

⚠ Attention, $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = (Q \times P)(u)$, à ne pas confondre avec $P\big(Q(u)\big) = (P \circ Q)(u)$.

⚠ Pour deux polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, que pensez-vous des notations suivantes ?

- $u^2(x)$,
- $\big(u(x)\big)^2$,
- $P\big[u(x)\big]$,
- $\big[P(u)\big](x)$
- $\big(P \circ u\big)(x)$,
- $P\big[(Q)(u)\big](x)$,
- $P(u) \circ Q(u)(x)$
- $(PQ)(u)(x)$,
- $P(u)(x)Q(u)(x)$

Remarque. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, comme $P(u)$ commute avec u, on sait que $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par u.

Définition 112 – Polynômes annulateurs d'un endomorphisme

Soit un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est un *polynôme annulateur* de u lorsque $P(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$.

⚠ Ne pas dire que u est racine de P ! En effet, les racines de P sont des élements de $\mathbb{K}$.
Par exemple le polynôme $X^2 - X$ n'a que *deux racines*, mais annule une *infinité d'endomorphismes* (tous les projecteurs).

Si A représente un endomorphisme u dans des bases, alors P est annulateur de A si, et seulement si, P est annulateur de u.

Les polynômes annulateurs sont utilisés pour étudier la bijectivité, comme le montre les exemples suivants.

✎ ***Exemple.*** Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ vérifiant $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$. Alors f est un automorphisme de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ *nilpotent*, ie qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$. Alors f n'est pas bijectif.

On définit la même notion pour une matrice carrée.

Définition 113 – Polynôme d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k$$

On note

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_k A^k$$

On dit que $P(A)$ est un polynôme de l'endomorphisme A.

Remarquer que a_0 devient $a_O I_n$, donc 1 devient I_n.

L'ensemble des polynômes de la matrice carrée A est noté $\mathbb{K}[A]$:

$$\mathbb{K}[A] = \left\{P(A) \middle/ P \in \mathbb{K}[X]\right\}$$

Théorème 114 – Structure algébrique de $\mathbb{K}[A]$

$\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, dont les éléments commutent pour le produit matriciel (c'est une sous-algèbre commutative).

⚠ Attention, $(P \times Q)(A) = P(A) \circ Q(A) = Q(A) \circ P(A) = (Q \times P)(A)$, à ne pas confondre avec $P\big(Q(A)\big) = (P \circ Q)(A)$.

Définition 115 – Polynômes annulateurs d'une matrice carrée

Soit une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est un *polynôme annulateur* de A lorsque $P(A) = 0_n$.

⚠ Ne pas dire que A est racine de P ! En effet, les racines de P sont des élements de $\mathbb{K}$.

Les polynômes annulateurs sont utilisés pour étudier l'inversibilité d'une matrice carrée, comme le montre les exemples suivants.

✎ ***Exemple.*** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 - A^2 = 4A - 3I_n$. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

✎ ***Exemple.*** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 - 2A^2 - 8A = 0_3$ et en déduire que A n'est pas inversible.

Ils sont aussi utilisés pour calculer des puissances de matrices carrées.

✎ ***Exemple.*** Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ qui vérifie $A^3 - 2A^2 - 8A = 0_3$.

Le polynôme $X^3 - 2X^2 - 8X$ est annulateur de A. On effectue la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X^2 - 8X$. On sait que le reste sera de degré au plus 2 donc on peut écrire :

$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 8X).Q(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

Pour calculer a_n, b_n et c_n on remarque $X^3 - 2X^2 - 8X = X(X-4)(X+2)$ et donc que -2, 0 et 4 sont racines de $X^3 - 2X^2 - 8X$. On obtient : $a_n = \frac{1}{6}\left(4^{n-1} - (-2)^{n-1}\right)$, $b_n = \frac{1}{3}\left(4^{n-1} - (-2)^n\right)$ et $c_n = 0$ pour $n \geq 1$ (le cas $n = 0$ est différent car $0^0 = 1$).
Donc :

$$\forall n \geq 1, \quad A^n = \frac{1}{6}\left(4^{n-1} - (-2)^{n-1}\right)A^2 + \frac{1}{3}\left(4^{n-1} - (-2)^n\right)A$$

4 Exercices

Sous-espaces vectoriels et familles de vecteurs

Exercice 1

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

$$\mathscr{F}_1 = \Big((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)\Big)$$
$$\mathscr{F}_2 = \Big((1,1,0),(2,0,1),(3,1,1),(1,0,2)\Big)$$

Exercice 2

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\mathbb{E} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \big/ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + c \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Montrer que $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et donner une base et sa dimension.

Exercice 3 – Exemples de bases de polynômes

1. Soient $P_1 = X^2+1$, $P_2 = X^2+X+1$ et $P_3 = X^2+X$. Montrer que (P_1,P_2,P_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$. Montrer que $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Montrer que $\mathbb{F} = \left\{P = aX^4 + (a+b)X \big/ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$. Donner en une base et la dimension.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k = X^k(X+1)^{n-k}$. Montrer que $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 4 – Rang d'une famille de vecteurs

Soient $\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n}\right)$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ $\mathbb{K}$-ev, et $p \in [\![1,n]\!]$.
Montrer que :

$$\operatorname{rg}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n}\right) \leq \operatorname{rg}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\right) + n - p$$

Exercice 5 – Exemple de supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{F} = \operatorname{Vect}\Big((0,1,1),(1,0,2)\Big)$.

Exercice 6 – Exemple de supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ centré en 0. On note $\mathbb{R}^I$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur I. On pose :

$$\mathscr{A} = \left\{f \in \mathbb{R}^I \middle/ f \text{ paire sur } I\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B} = \left\{f \in \mathbb{R}^I \middle/ f \text{ impaire sur } I\right\}$$

Montrer que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^I$.

Exercice 7 – Exemple de supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$

Soient $\mathbb{E} = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \middle/ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$ et $\mathbb{F} = \{(\lambda, \lambda, \dots, \lambda);\ \lambda \in \mathbb{K}\}$.

1. Déterminer une base de $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{F}$.
2. Montrer que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 8 – Suite récurrente d'ordre 3

On note $\mathbb{E}$ l'ensemble des $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n$, $\mathbb{F}$ l'ensemble des $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n$ et $\mathbb{G}$ l'ensemble des $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+2} = -b_{n+1} - b_n$.

1. Vérifier que $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Déterminer une base et la dimension de $\mathbb{F}$ et de $\mathbb{G}$.
3. On admet que $\dim(\mathbb{E}) = 3$. En déduire que : $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$. Donner alors une base de $\mathbb{E}$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_2 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n$.
   Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
5. Sans admettre que $\dim(\mathbb{E}) = 3$, redémontrer que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ par analyse-synthèse.

Applications linéaires

Exercice 9

Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant :

$$P(0) = 1,\ P'(0) = -1,\ P(1) = 2,\ P'(3) = 4$$

Hint : Considérer l'isomorphisme adéquat.

Exercice 10

On considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^2-1)P'' + XP' - 4P \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$. Déterminer $\deg\Big(\varphi(P)\Big)$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$.

Exercice 11

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et D l'application

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

1. Vérifier que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On pose $\Gamma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} + D + D^2 + \cdots + D^n$. Montrer que Γ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer son application réciproque.

Exercice 12 – Surjectivité en dimension finie

Soit $\Delta : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X]$ l'application définie par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Vérifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ et que si P est un polynôme non constant alors $\deg\big(\Delta(P)\big) = \deg(P) - 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\ker\big(\Delta_{|\mathbb{C}_{n+1}[X]}\big)$ et en déduire que Δ induit une surjection de $\mathbb{C}_{n+1}[X]$ sur $\mathbb{C}_n[X]$.
3. En déduire que Δ est surjective de $\mathbb{C}[X]$ sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 13 – Polynômes de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n+1$ scalaires $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ *distincts*. On considère l'application linéaire

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\big) \end{array}$$

1. Déterminer $\ker u$.
2. Montrer que $\mathbb{K}[X] = \ker(u) \oplus \mathbb{K}_n[X]$
3. Montrer que l'application $u' = u_{|\mathbb{K}_n[X]} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
4. Étant donnés $n+1$ scalaires $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_0) = b_0, \ldots, P(a_n) = b_n$.

5. On définit alors la famille $(L_0, \dots, L_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ par $L_i(a_j) = \delta_{ij}$, pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$.
   Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
   Si P est l'unique polynôme de la question précédente, donner ses coordonnées dans la base de Lagrange.
6. Soient D et Δ deux matrices diagonales d'ordre n. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\Delta = P(D)$.

Exercice 14 – Inégalité triangulaire pour le rang

On suppose que $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient $(u, v) \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Montrer que
$$\left|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)\right| \leq \mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$$
2. Soit deux endomorphismes $u, v \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ vérifiant $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$, $(u+v) \in Gl(\mathbb{E})$. Calculer $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

Exercice 15 – Calcul du rang de $g \circ f$

Si $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$, montrer que :
$$\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f) - \dim\left(\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f\right)$$
Hint : utiliser le théorème du rang pour l'application linéaire $g_{|\mathrm{Im}\, f}$.

Exercice 16 – Noyau et image en somme directe ?

Soit un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.

1. Montrer que
$$\ker u \cap \mathrm{Im}\, u = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \Longleftrightarrow \ker u = \ker u^2$$
2. Montrer que
$$E = \ker u + \mathrm{Im}\, u \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$$
3. Montrer qu'en dimension finie, ces deux propriétés sont équivalentes.
4. Donner un exemple d'endomorphisme $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ tel que $\ker u$ et $\mathrm{Im}\, u$ ne soient pas supplémentaires (par exemple, $u(x, y) = (x - y, x - y)$).

Exercice 17 – Noyaux itérés

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.

1. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f^n) = \ker(f^{n+1})$.

2. Vérifier que :

$$\forall p \geq n, \quad \ker(f^p) = \ker(f^n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^n)$$

3. On note $r = \min\left\{n \in \mathbb{N} / \ker(f^n) = \ker(f^{n+1})\right\}$. Montrer que :

$$\mathbb{E} = \ker(f^r) \oplus \mathrm{Im}(f^r)$$

Exercice 18

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$.
2. Dans ce cas, vérifier que : $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$ et $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

Matrices

Exercice 19

1. Montrer que $\mathscr{B} = \left(1, X-1, (X-1)^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = 2(X+1)P - (X^2 - 2X+1)P'$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, et déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 20

1. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(P) = \left(P(0), P'(0), P(1)\right)$. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer φ^{-1} (on pourra utiliser les représentations matricielles).

Exercice 21

Dans chacun des cas suivants on définit une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ par sa matrice relativement aux bases canoniques. Déterminer $rg(f)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 9 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 22 – Représentation matricielle d'un endomorphisme nilpotent

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.
On suppose que f est nilpotent d'ordre p : c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ et $f^{p-1} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$.

1. Montrer qu'il existe $\overrightarrow{u} \in \mathbb{E}$, tel que la famille $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u}, f\left(\overrightarrow{u}\right), \ldots, f^{p-1}\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$ est libre.
2. En déduire que $f^n = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$.
3. Dans le cas $p = n$, donner la matrice de f dans cette base (dans ce cas, on dit que f est un endomorphisme cyclique).

Exercice 23 – Matrices de rang 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

1. Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = X^t Y$.
2. En déduire un polynôme annulateur de A.

Exercice 24 – Une propriété des matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$ (ie $A^p = 0_n$ et $A^{p-1} \neq 0_n$).
Montrer que la matrice $I_n - A$ est inversible.

Exercice 25

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
2. Préciser les racines du polynôme T_n.
3.] Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $T_n(A) = 0_n$. Montrer que la matrice $(I_n - A)$ est inversible.

Déterminants

Exercice 26

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de $\mathbb{E}$ vérifiant $f^2 = -\mathrm{Id}$. Montrer que l'espace $\mathbb{E}$ est de dimension paire.

Exercice 27

Vérifier les calculs de déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc.$

2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\big(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\big).$

3. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+A^3 \end{vmatrix} = 2abc(a-c)(b-c)(b-a).$

4. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c).$

5. $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+2c)(a-b)^2(a+b-2c).$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \end{vmatrix} = -4\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\sin\left(\frac{c-a}{2}\right)\sin\left(\frac{b-c}{2}\right).$

Exercice 28 – Déterminant tridiagonal

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ et le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & \text{\Large 0} \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ \text{\Large 0} & & c & a \end{vmatrix}$$

Montrer que $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$. Comment calculer D_n en fonction de a, b, c et n ?

Exercice 29

1. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{vmatrix}$$

Hint : remplacer C_1 par $C_1 + \cdots + C_n$ puis L_i par $L_i - L_1$ $(i \geq 2)$.

2. En déduire que :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$$

Exercice 30

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} i$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \end{vmatrix}$$

hint : se ramener à un déterminant triangulaire.

Exercice 31 – Déterminant par blocs

Soient $A, B, C, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que D est inversible et que C et D commutent. Etablir

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

Hint : Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

Exercice 32

Soient $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

1. A quelle condition la matrice A est-elle inversible ?

2. Donner son inverse quand cela est possible.

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 33

Soient H_1 et H_2 deux hyperplans d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Exercice 34

Trouver toutes les formes linéaires ϕ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \phi(AB) = \phi(BA)$$

Hint : penser aux matrices élémentaires.

Exercice 35

1. Montrer que $\mathrm{Vect}\left(AB - BA; (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2\right) = \ker(\mathrm{Tr})$.
   Hint : montrer que si $i \neq j$, $E_{ij} = E_{ii}E_{ij} - E_{ij}E_{ii}$ et si $i \neq n$, $E_{ii} - E_{nn} = E_{in}E_{ni} - E_{ni}E_{in}$.
2. Retrouver le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 36 – Supplémentaire commun à deux sev de même dimension

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. Si $\mathbb{H}_1$ et $\mathbb{H}_2$ sont deux hyperplans de $\mathbb{E}$, montrer qu'ils ont un supplémentaire commun.
2. Si $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont deux sev de $\mathbb{E}$ tels que $\dim(\mathbb{F}_1) = \dim(\mathbb{F}_2)$, montrer qu'ils ont un supplémentaire commun.

Exercice 37 – Intersections d'hyperplans

Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, distinct de $\mathbb{E}$.

1. Montrer que $\mathbb{F}$ peut s'écrire comme une intersection d'un nombre fini d'hyperplans.
2. Quel est le nombre minimum d'hyperplans nécessaire ?
   Hint : on pourra montrer que l'intersection de q hyperplans est de dimension supérieure ou égale à $\dim(\mathbb{E}) - q$.

Chapitre 4

Espaces vectoriels normés de dimension finie et introduction aux fonctions de plusieurs variables

Sommaire

1 Espaces vectoriels normés 124

1.1 Normes 124

1.2 Boules ouvertes, boules fermées et sphères 127

1.3 Parties convexes 129

1.4 Parties bornées 130

2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé 132

2.1 Convergence d'une suite dans un evn 132

2.2 Suites extraites 133

2.3 Cas de la dimension finie 134

3 Topologie d'un espace vectoriel normé 135

3.1 Ouverts, fermés 135

3.2 Intérieur, adhérence, frontière 139

4 Introduction au calcul différentiel 140

4.1 Fonctions numériques de n variables réelles 140

4.2 Dérivées partielles 142

5 Exercices 144

1 Espaces vectoriels normés

Dans toute cette section, $\mathbb{E}$ désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension quelconque.

1.1 Normes

La notion centrale de ce chapitre est la notion de norme.

Définition 1 – Norme

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On appelle *norme* une application

$$\mathcal{N} : \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \mathcal{N}(\overrightarrow{u}) \end{array}$$

vérifiant les trois propriétés :

1. $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{E}, \quad \mathcal{N}(\overrightarrow{u}) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_{\mathbb{E}}}$ (séparation)
2. $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{E}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \mathcal{N}(\lambda.\overrightarrow{u}) = |\lambda|.\mathcal{N}(\overrightarrow{u})$ (homogénéité)
3. $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{E}^2, \quad \mathcal{N}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \leq \mathcal{N}(\overrightarrow{u}) + \mathcal{N}(\overrightarrow{v})$ (inégalité triangulaire)

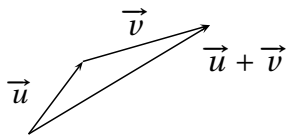
On notera $\|\overrightarrow{u}\| = \mathcal{N}(\overrightarrow{u})$.
On dit que $(\mathbb{E}, \|.\|)$ est un *espace vectoriel normé* (evn).

Remarque : On a toujours $\left\|\overrightarrow{0_{\mathbb{E}}}\right\| = 0_{\mathbb{R}}$, puisque $\left\|\overrightarrow{0_{\mathbb{E}}}\right\| = \left\|0_{\mathbb{K}}.\overrightarrow{0_{\mathbb{E}}}\right\| = 0_{\mathbb{R}}.\left\|\overrightarrow{0_{\mathbb{E}}}\right\| = 0_{\mathbb{R}}$.
De même si $\overrightarrow{u} \in \mathbb{E}$, on a $\|-\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{u}\|$, puisque $\|-\overrightarrow{u}\| = |-1|.\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{u}\|$.
Le fait que la norme soit positive peut donc être vue comme une conséquence des trois propriétés.

Un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{E}$ sera dit *unitaire* ou *normé*, lorsque $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.

Important. On dispose aussi de la minoration de l'inégalité triangulaire :

$$\Big|\|\overrightarrow{u}\| - \|\overrightarrow{v}\|\Big| \leq \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$$



On aussi :

$$\Big|\|\overrightarrow{u}\| - \|\overrightarrow{v}\|\Big| \leq \|\overrightarrow{u} \underbrace{-}_{⚠} \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$$

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{R}$ muni de la *valeur absolue*, et $\mathbb{C}$ muni du *module* sont des evn.

✎ ***Exemple.*** Si $\mathbb{F}$ est un sev d'un evn $\mathbb{E}$ alors $\mathbb{F}$ muni de la *norme induite* (restriction à $\mathbb{F}$ de la norme sur $\mathbb{E}$) est encore un evn.

Sur $\mathbb{K}^p$ il faut connaître les exemples usuels suivants ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Théorème 2 – Trois normes classiques sur $\mathbb{K}^p$

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{E} = \mathbb{K}^p$, on dispose des trois normes classiques suivantes. Pour un vecteur $\vec{u} = (x_1, \dots, x_p)$ on définit :

1. $\|\vec{u}\|_1 = \sum_{k=1}^{p} |x_k|$ (norme de Manhattan)
2. $\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} x_k^2}$
3. $\|\vec{u}\|_\infty = \max_{1 \le k \le p} |x_k|$

De manière générale on définit la « norme r », pour $r > 0$:

$$\|\vec{u}\|_r = \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

mais la vérification du troisième axiome est délicate (et porte le nom d'inégalité de Minkowski).
La notation $\|\vec{u}\|_\infty$ est justifiée par le fait que :

$$\lim_{r \to +\infty} \|\vec{u}\|_r = \|\vec{u}\|_\infty$$

⚠ Il existe beaucoup d'autre normes sur $\mathbb{K}^p$.

✎ ***Exemple.*** Sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$, montrer que l'application définie par

$$\|(x, y)\| = \int_0^1 |x + ty| \, \mathrm{d}t$$

est une norme.

En première année a été présenté la notion de *norme euclidienne* associée à un produit scalaire. C'est un cas particulier de *norme*.

Proposition 3 – Norme euclidienne

Si $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}$, on définit la *norme euclidienne* associée :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$$

En plus des trois axiomes définissante une norme, on dispose en plus de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\boxed{\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \quad |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \le \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

✎ ***Exemple.*** Si E est un espace euclidien, montrer que pour tout vecteur $\vec{u} \in E$:

$$\|\vec{u}\| = \sup_{\|\vec{v}\| \le 1} |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|$$

Remarque : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme $\|.\|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$ défini par $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{k=1}^{p} x_k y_k$.

Donnons aussi des exemples de normes sur les espaces vectoriels usuels.

✎ ***Exemple.*** On note ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles *bornées*. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'application définie par :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

est une norme sur ℓ^∞.

✎ ***Exemple.*** On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge *absolument*. Les application définies par :

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \qquad \text{et} \qquad \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}$$

sont des normes sur ℓ^1. De plus, ℓ^1 est un sev de ℓ^∞, donc $\|.\|_\infty$ est aussi une norme sur ℓ^1.

✎ ***Exemple.*** Pour $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les applications définies par :

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq p} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}| \quad \text{et} \quad \|A\|_S = \sqrt{\operatorname{Tr}\left({}^tA.A\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2\right)}$$

sont des normes.

✎ ***Exemple.*** Pour $f \in C^0\big([a,b];\mathbb{R}\big)$, les applications définies par :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

sont des normes.

✎ ***Exemple.*** Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$, les applications définies par :

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \qquad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2} \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \max_{k\in[\![0,n]\!]} |a_k|$$

sont des normes.

✎ ***Exemple.*** Sur $\mathbb{K}[X]$, les applications définies par :

$$\|P\|_1 = \int_{-1}^{1} |P(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \|P\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} P(t)^2\,\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

sont aussi des normes.

Toutes ces normes peuvent être comparées entre elles. En PSI, il faut seulement être capable de comparer les trois normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$.

Proposition 4 – Comparaison des normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$

Pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{K}^p$:

$$\|\overrightarrow{u}\|_\infty \leq \|\overrightarrow{u}\|_1 \leq \sqrt{p}\,\|\overrightarrow{u}\|_2 \leq p.\|\overrightarrow{u}\|_\infty$$

La notion de norme permet de définir la notion de distance.

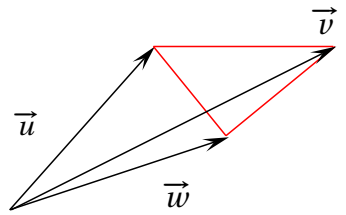
Théorème 5 – Distance associée à une norme

Si $(\mathbb{E}, \|.\|)$ est un evn, on définit une *distance* sur $\mathbb{E}$:

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) & \longmapsto & d(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\| \end{array}$$

qui vérifie les propriétés :

1. $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \in \mathbb{E}^2, \quad d(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ (séparation)
2. $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \in \mathbb{E}^2, \quad d(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = d(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})$ (symétrie)
3. $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) \in \mathbb{E}^3, \quad d(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \leq d(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}) + d(\overrightarrow{w},\overrightarrow{v})$ (inégalité triangulaire)



✎ ***Exemple.*** Montrer que $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) \in \mathbb{E}^3, \quad d(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \geq \left|d(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}) - d(\overrightarrow{w},\overrightarrow{v})\right|$.

1.2 Boules ouvertes, boules fermées et sphères

Définition 6 – Boules ouvertes, boules fermées, sphères

Dans un evn, soit un vecteur $\overrightarrow{a} \in \mathbb{E}$ et un réel positif $r > 0$. On définit :

— La *boule ouverte* de centre $\overrightarrow{a}$ et de rayon r :

$$B(\overrightarrow{a},r) = \left\{\overrightarrow{u} \in \mathbb{E} \mid d(\overrightarrow{a},\overrightarrow{u}) < r\right\} = \left\{\overrightarrow{u} \in \mathbb{E} \mid \|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{u}\| < r\right\}$$

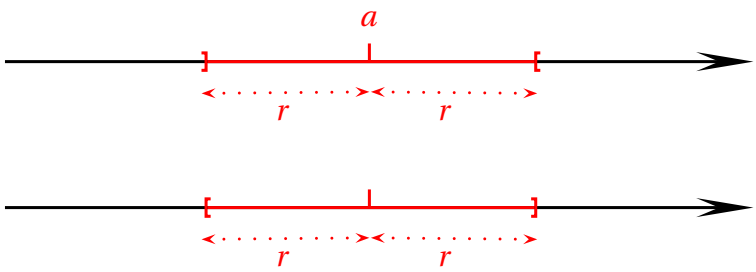
— La *boule fermée* de centre $\overrightarrow{a}$ et de rayon r :

$$\overline{B}(\overrightarrow{a},r) = \left\{\overrightarrow{u} \in \mathbb{E} \mid d(\overrightarrow{a},\overrightarrow{u}) \leq r\right\} = \left\{\overrightarrow{u} \in \mathbb{E} \mid \|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{u}\| \leq r\right\}$$

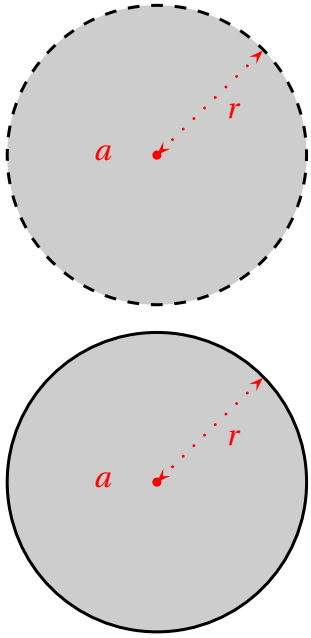
— La *sphère* de centre $\overrightarrow{a}$ et de rayon r :

$$S(\overrightarrow{a},r) = \left\{\overrightarrow{u} \in \mathbb{E} \mid d(\overrightarrow{a},\overrightarrow{u}) = r\right\} = \left\{\overrightarrow{u} \in \mathbb{E} \mid \|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{u}\| = r\right\} = \overline{B}(\overrightarrow{a},r)\backslash B(\overrightarrow{a},r)$$

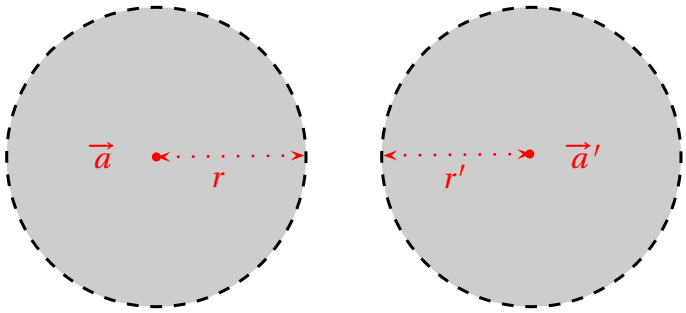
✎ ***Exemple.*** Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, $B(\overrightarrow{a},r)$ est l'intervalle $]a-r, a+r[$ et $\overline{B}(\overrightarrow{a},r)$ est l'intervalle $[a-r, a+r]$ où $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.



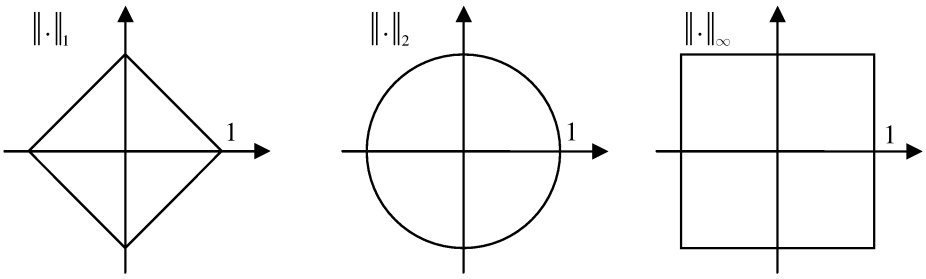
✎ ***Exemple.*** Dans $(\mathbb{C}, |.|)$, $B(\overrightarrow{a}, r)$ est le « disque ouvert « de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ et $\overline{B}(a, r)$ est le disque fermé de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$.



✎ ***Exemple.*** Montrer que si $r + r' \leq d(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}')$, alors $B(\overrightarrow{a}, r) \cap B(\overrightarrow{a}', r') = \emptyset$.



✎ ***Exemple.*** Dessiner les boules ouvertes $B(\overrightarrow{0_{\mathbb{E}}}, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.



Vocabulaire : $B(\overrightarrow{0_{\mathbb{E}}},1)$ est appelée *boule unité* de $\mathbb{E}$, $\overline{B}(\overrightarrow{0_{\mathbb{E}}},1)$ est appelée *boule fermée unité* de $\mathbb{E}$ et $S\left(\overrightarrow{0_{\mathbb{E}}},1\right)$ est appelée *sphère unité* de $\mathbb{E}$.

1.3 Parties convexes

On commence par définir la notion de segment.

Définition 7 – Segment

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{E}$, on appelle segment reliant $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{v}$, noté $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]$, la partie de $\mathbb{E}$ suivante :

$$\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]=\left\{t.\overrightarrow{u}+(1-t).\overrightarrow{v}\,/\,t\in[0,1]\right\}$$

On en déduit la notion de partie convexe.

Définition 8 – Partie convexe

Soit A une partie de $\mathbb{E}$. On dit que A est convexe lorsque :

$$\forall\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\in A^2,\quad \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]\subseteq A$$

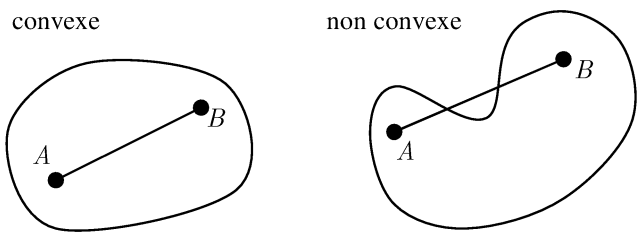
ie :

$$\forall\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\in A^2,\forall t\in[0,1],\quad t.\overrightarrow{u}+(1-t).\overrightarrow{v}\in A$$

Remarque. Cette notion ne fait pas intervenir la notion de norme.

✎ ***Exemple.*** Montrer qu'une intersection de parties convexes est une partie convexe.

⚠ En général, une union de parties convexes ne donne pas une partie convexe. Considérer par exemple $[0,1]\cup]2,3[$.



✎ ***Exemple.*** $\emptyset$ et $\mathbb{E}$ sont convexes.

✎ ***Exemple.*** Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ est une partie convexe.

Théorème 9 – Convexité des boules dans un evn

Si $(\mathbb{E}, \|.\|)$ est un evn, alors toutes les boules (ouvertes ou fermées) sont convexes.

⚠ Par contre, les sphères ne sont pas convexes.

1.4 Parties bornées

Définition 10 – Partie bornée

Soit $A \subseteq \mathbb{E}$ une partie d'un evn. On dit que la partie A est bornée s'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall \overrightarrow{a} \in A, \quad \|\overrightarrow{a}\| \leq M$$

Remarque. Cette condition équivaut au fait que A est incluse dans la boule fermée $B(\overrightarrow{0_{\mathbb{E}}}, M)$.

⚠ Dans cette définition, il faut bien comprendre que M ne dépend pas de $\overrightarrow{a}$.

✎ ***Exemple.*** Les boules ouvertes (ou fermées) sont des parties bornées.

✎ ***Exemple.*** Un sous-ensemble d'une partie bornée est encore une partie bornée.

✎ ***Exemple.*** Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, non réduit à $\{\overrightarrow{0_{\mathbb{E}}}\}$, n'est pas borné.

Remarque. Cette notion dépend du choix de la norme sur $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** Sur l'espace $\mathbb{E} = C^0([0,1])$, on considère les deux normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(t) = (n+1)t^n$. Calculer $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n\|_1$.
La boule unité $B_1 = B(\overrightarrow{0_{\mathbb{E}}}, 1)$ pour la norme $\|.\|_1$ est-elle bornée dans $(\mathbb{E}, \|.\|_\infty)$?

On définit ensuite la notion de suite bornée.

Définition 11 – Suites dans un evn

Soit un evn $(\mathbb{E}, \|.\|)$. On appelle *suite* d'éléments de $\mathbb{E}$, une application

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{u} : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & n & \longmapsto & \overrightarrow{u_n} \end{array}$$

notée $\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$.
L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{E}$ est noté $\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$.

Définition 12 – Suite bornée

On dit qu'une suite $\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in N, \quad \|\overrightarrow{u_n}\| \leq M$$

On note $\ell^\infty(\mathbb{E})$ l'ensemble des suites bornées d'éléments de $\mathbb{E}$.

⚠ Dans cette définition, il faut bien comprendre que M ne dépend pas de n.

Remarque. Cette condition équivaut au fait que la suite $\overrightarrow{u}$ est incluse dans la boule fermée $B(\overrightarrow{0_{\mathbb{E}}}, M)$.

✎ ***Exemple.*** Si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont deux vecteurs de $(\mathbb{E}, \|.\|)$, la suite $\overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $\overrightarrow{u_n} = \dfrac{1}{n+1}.\overrightarrow{a} + \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right).\overrightarrow{b}$, est bornée.

Remarque. Cette notion dépend elle aussi du choix de la norme sur $\mathbb{E}$.

Important. $\ell^\infty(E)$ est lui aussi un espace vectoriel normé muni de la norme *uniforme* :

$$\left\|\overrightarrow{u}\right\|_\infty = \sup_{n\in N} \left\|\overrightarrow{u_n}\right\|$$

On définit maintenant la notion de fonction bornée.

Définition 13 – Application bornée

Soit un ensemble A et un evn $(\mathbb{E}, \|.\|)$.
On dit qu'une application $\overrightarrow{f} : A \mapsto \mathbb{E}$ est bornée s'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in A, \quad \left\|\overrightarrow{f(x)}\right\| \leq M$$

On note $\mathscr{B}(A, \mathbb{E})$ l'ensemble des applications bornées de A vers $\mathbb{E}$.

⚠ Dans cette définition, il faut bien comprendre que M ne dépend pas de x.

Remarque. Cela signifie que l'application $\overrightarrow{f}$ prend toutes ses valeurs dans dans une boule ouverte (ou fermée) de l'espace d'arrivée $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** Si $(\mathbb{E}, \langle .,. \rangle)$ est un espace préhilbertien réel de norme euclidienne $\|.\|$, et si $\overrightarrow{b} \in \mathbb{E}$, l'application :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{f} : B(\overrightarrow{0_{\mathbb{E}}}, 1) & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ \overrightarrow{a} & \longmapsto & \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle . \overrightarrow{a} \end{array}$$

est bornée.

Remarque. Cette notion dépend elle aussi du choix de la norme sur l'espace d'arrivée $\mathbb{E}$.

Important. $\mathscr{B}(A, \mathbb{E})$ est lui aussi un espace vectoriel normé muni de la norme *uniforme* :

$$\left\|\overrightarrow{f}\right\|_\infty = \sup_{x\in A} \left\|\overrightarrow{f(x)}\right\|$$

Citons le théorème suivant qui est à la limite du programme de PSI.

Théorème 14 – Cas de la dimension finie

Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, les notions :
- de partie de $\mathbb{E}$ bornée,
- de suite bornée d'éléments de $\mathbb{E}$,
- d'application bornée à valeurs dans $\mathbb{E}$,

ne dépendent pas du choix de la norme sur $\mathbb{E}$.

2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

On considère un $\mathbb{K}$-evn $(\mathbb{E}, \|.\|)$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Convergence d'une suite dans un evn

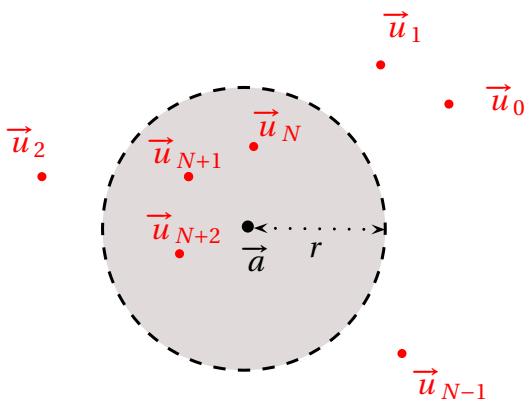
Définition 15 – Convergence d'une suite

On dit qu'une suite $(\overrightarrow{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* vers un élément $\overrightarrow{a} \in E$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N, \quad \|\overrightarrow{u_n} - \overrightarrow{a}\| \leq \varepsilon$$

On le note $\overrightarrow{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overrightarrow{a}$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{a}$.

Remarque : Cela revient à dire que pour tout rayon de boule $r > 0$, il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans la boule (ouverte ou fermée) de centre a et de rayon r.



Remarque : S'il existe $\overrightarrow{a} \in E$ tel que la suite $(\overrightarrow{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overrightarrow{a}$, on dit que la suite $(\overrightarrow{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente*. Sinon, on dit que la suite est *divergente*.

Remarque : Pour montrer que $\overrightarrow{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overrightarrow{a}$, on montre que la suite réelle $\|\overrightarrow{u_n} - \overrightarrow{a}\|$ tend vers 0. Pour cela on peut, par exemple, la majorer par une suite réelle qui converge vers 0.

✎ ***Exemple.*** Si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont deux vecteurs de $(\mathbb{E}, \|.\|)$, la suite $\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $\overrightarrow{u_n} = \dfrac{1}{n+1}.\overrightarrow{a} + \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right).\overrightarrow{b}$, converge vers $\overrightarrow{b}$.

✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n la matrice carrée d'ordre p dont tous les coefficients sont égaux à $\dfrac{1}{n+1}$.
On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ des normes :

$$\|M\|_1 = \max_{1\leq j\leq p} \sum_{i=1}^{p} |m_{i,j}| \qquad \|m\|_\infty = \max_{1\leq i\leq p} \sum_{j=1}^{p} |m_{i,j}| \quad \text{et} \quad \|M\|_S = \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^tM.M\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p} m_{ij}^2\right)}$$

Étudier la convergence de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour chacune de ces normes.

Remarque. On suppose que $\left(\overrightarrow{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ converge vers a. Alors $\left\|\overrightarrow{u_n}\right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left\|\overrightarrow{a}\right\|$.

⚠ Le fait qu'une suite converge, et la valeur de sa limite dépendent du choix de la norme sur $\mathbb{E}$!

✎ ***Exemple.*** On définit dans l'espace $E = C^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$, la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$\begin{array}{rcl} f_n : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n}{1+x^n} \end{array}$$

Étudier la convergence de cette suite pour les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

On a le même théorème que pour les suites d'éléments de $\mathbb{K}$.

Proposition 16 – Une suite convergente est bornée

Dans un evn, toute suite $\left(\overrightarrow{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente est bornée.

⚠ Ce n'est bien sûr pas une condition suffisante : en général, une suite bornée n'est pas convergente.

2.2 Suites extraites

Définition 17 – Suite extraite

Soit $\left(\overrightarrow{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un evn $(\mathbb{E}, \|.\|)$. On appelle *suite extraite* de $\left(\overrightarrow{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, toute suite $\left(\overrightarrow{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\overrightarrow{u_{\varphi(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application *strictement croissante*.

On retrouve le même théorème que pour des suites numériques.

Théorème 18 – Convergence d'une suite extraite

Si $\left(\overrightarrow{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{E}$ qui converge vers $\overrightarrow{a} \in \mathbb{E}$, alors toute suite extraite de $\left(\overrightarrow{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers la même limite.

2.3 Cas de la dimension finie

Premier résultat fondamental : en dimension finie, le choix de la norme n'a pas d'influence sur l'étude de la limite.

Théorème 19 – Suite convergente en dimension finie

Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, la convergence d'une suite et la valeur de sa limite sont indépendantes du choix de la norme.

✎ ***Exemple.*** Donner une démonstration pour les normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$.

De plus, l'étude de la convergence d'une suite de *vecteurs* se ramène à l'étude de la convergence de ses « suites coordonnées », qui sont de classiques suites numériques.

Théorème 20 – Convergence d'une suite en dimension finie

Soit un evn $(\mathbb{E}, \|.\|)$ de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$. Si $(\overrightarrow{u_n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{E}$, telle que $\overrightarrow{u_n}$ se décompose ainsi dans $\mathscr{B}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overrightarrow{u_n} = x_{1,n}.\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_{p,n}.\overrightarrow{e_p}$$

la suite $(\overrightarrow{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite numérique $(x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $x_k \in \mathbb{K}$.
Dans ce cas, la suite $(\overrightarrow{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $\overrightarrow{a} = x_1.\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_p.\overrightarrow{e_p}$.

Important. Une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ converge si, et seulement si, elle converge « coefficient par coefficient » : si on note $a_{i,j}^{(n)}$ le terme générique de la matrice A_n, alors $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$, la suite numérique $(a_{i,j}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un scalaire noté $b_{i,j}$.
La limite de la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors la matrice $B = ((b_{i,j}))_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$.

✎ ***Exemple.*** On reprend l'exemple de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où A_n est la matrice carrée d'ordre p dont tous les coefficients sont égaux à $\dfrac{1}{n+1}$.
Étudier la convergence de cette suite.

Remarque. On vérifie facilement que, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices qui converge vers A et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices qui converge vers B, alors :

- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda.A$,
- $A_n + B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A + B$,
- $A_n \times B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A \times B$

dès que ces opérations ont un sens.

✎ ***Exemple.*** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de matrices inversibles de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ converge vers A, et si $(A_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, alors B est inversible et $B = A^{-1}$.

⚠ En général si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de matrices inversibles de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ converge, la suite $(A_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Considérer par exemple $A_n = \dfrac{1}{n+1} I_p$.

✎ ***Exemple.*** On considère la matrice $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Étudier la convergence de la suite $\left(A^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On rappelle (cf chapitre précédent) que :

$$\forall n \geq 1, \quad A^n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)A^2 + \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)A$$

✎ ***Exemple.*** Soit D une matrice diagonale d'ordre p. Donnez une CNS pour que la suite $\left(D^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3 Topologie d'un espace vectoriel normé

On considère un $\mathbb{K}$-evn $(\mathbb{E}, \|.\|)$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Ouverts, fermés

La première notion topologique est la suivante.

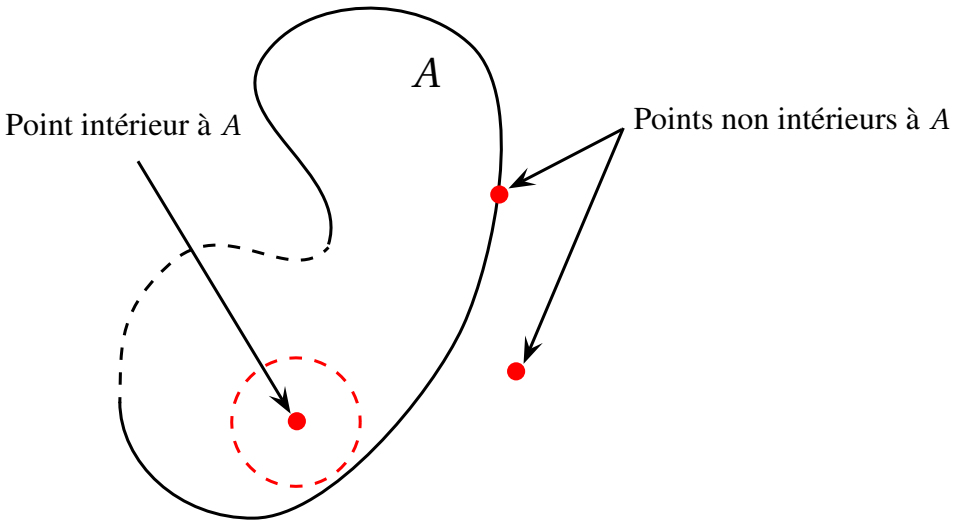
Définition 21 – Point intérieur à une partie

Soit $A \subseteq \mathbb{E}$ et $\vec{a} \in \mathbb{E}$.
On dit que $\vec{a}$ est un *point intérieur* à A lorsqu'il existe une boule ouverte de centre $\vec{a}$ incluse dans A :

$$\exists r > 0;\ B(\vec{a}, r) \subseteq A$$

Remarque. Si $\vec{a}$ est un point intérieur à A on voit facilement que $\vec{a} \in A$.

Intuitivement, un point est intérieur à A si il appartient à l'ensemble A mais n'est pas sur sa « frontière ».



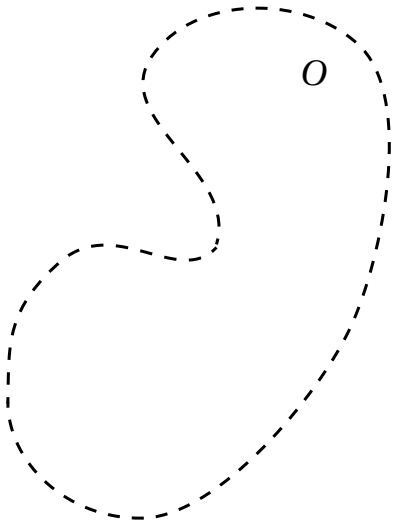
On peut ensuite définir les parties ouvertes.

Définition 22 – Ouvert

Une partie $O \subseteq \mathbb{E}$ est dite *ouverte* si tous ses éléments en sont des points intérieurs :

$$\forall \overrightarrow{a} \in O, \quad \exists r > 0;\ B(\overrightarrow{a}, r) \subseteq O$$

✎ ***Exemple.*** Intuitivement, cela signifie qu'aucun point de la « frontière » (ou du « bord ») de O n'est élément de O.



On définit ensuite la notion de point adhérent.

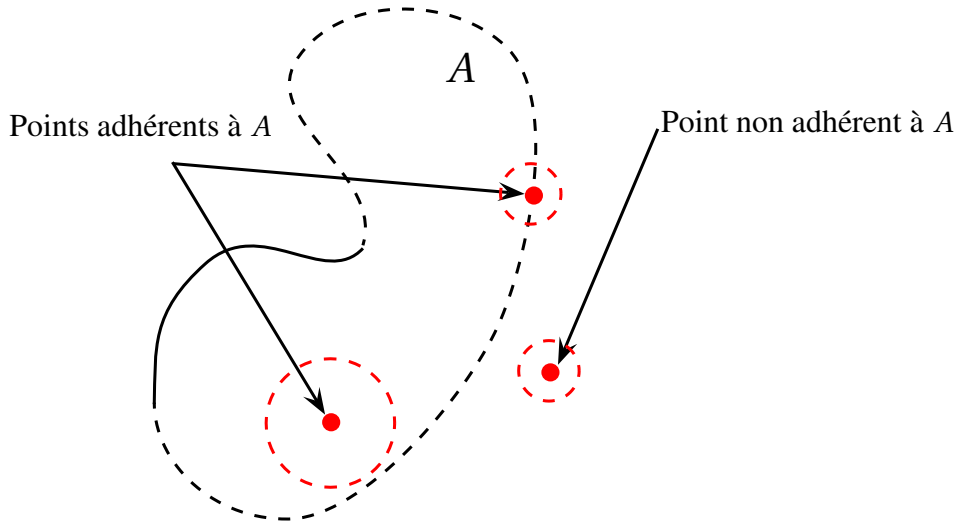
Définition 23 – Point adhérent à une partie

Soit $A \subseteq \mathbb{E}$ et $\overrightarrow{a} \in \mathbb{E}$.
On dit que $\overrightarrow{a}$ est un *point adhérent* à A lorsque toute boule ouverte centrée en $\overrightarrow{a}$ rencontre A :

$$\forall r > 0, \quad B(\overrightarrow{a}, r) \cap A \neq \emptyset$$

Remarque. Si $\overrightarrow{a}$ est un point adhérent à A, on peut avoir $\overrightarrow{a} \notin A$. Par contre si $\overrightarrow{a} \in A$, alors $\overrightarrow{a}$ est nécessairement adhérent à A.

Intuitivement, un point est adhérent à A si il appartient à l'ensemble A ou est sur sa « frontière ».



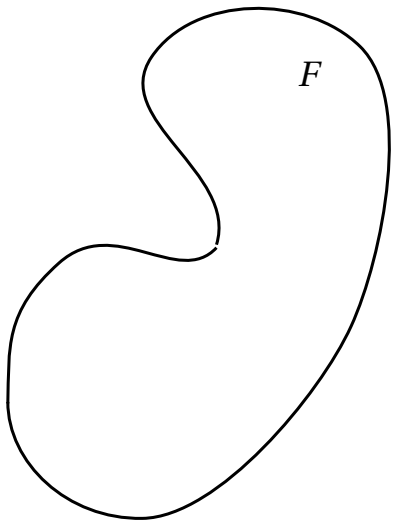
On en déduit la notion de partie fermée.

Définition 24 – Partie fermée

Une partie $F \subseteq \mathbb{E}$ est dite *fermée* si tous ses éléments en sont des points adhérents :

$$\forall \vec{a} \in F, \forall r > 0, \quad B(\vec{a}, r) \cap F \neq \emptyset$$

✎ ***Exemple.*** Intuitivement, cela signifie que tous les points de la « frontière » (ou du « bord ») de F sont éléments de F.

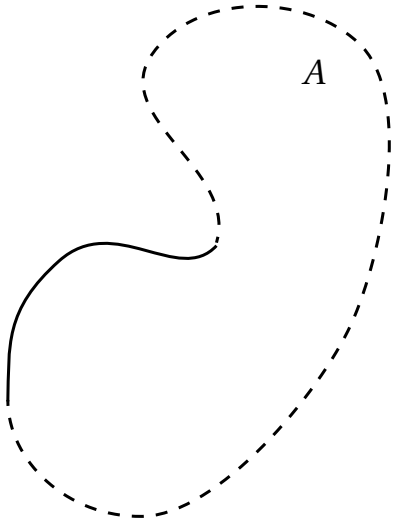


Remarque. Ces notions dépendent à priori du choix de la norme, mais pas en dimension finie (propriété admise).

✎ ***Exemple.*** Dans un evn $\mathbb{E}$ les parties $\emptyset$ et $\mathbb{E}$ sont à la fois ouvertes et fermées !

⚠Dans un evn $\mathbb{E}$, la plupart des parties ne sont ni ouvertes, ni fermées. Par exemple dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $]0, 1]$ n'est ni ouvert ni fermé.

La figure suivante représente une partie ni ouverte ni fermée.



Le théorème suivant donne un lien fondamental entre les parties ouvertes et fermées.

Théorème 25 – Lien entre parties ouvertes et fermées

Une partie $F \subseteq \mathbb{E}$ est fermée si, seulement si, son *complémentaire* $\mathbb{E} \backslash F$ est une partie ouverte.

Nous pouvons désormais justifier la terminologie utilisée pour les boules.

Proposition 26 – Cas des boules

Dans un evn :

1. une boule ouverte est une partie ouverte ;
2. une boule fermée est une partie fermée ;
3. une sphère est une partie fermée.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}$ les intervalles ouverts sont ouverts et les intervalles fermés sont fermés.

Pour démontrer plus simplement qu'une partie est fermée, on dispose du théorème suivant.

Théorème 27 – Caractérisation séquentielle des fermés

Soit une partie F d'un evn $(\mathbb{E}, \|.\|)$. Une partie F est fermée si, et seulement si, toute suite convergente d'éléments de F (dans A) est convergente *dans* F :

$$F \text{ est fermée} \iff \text{pour } \textit{toute} \text{ suite } \left(\overrightarrow{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, \text{ si } \overrightarrow{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overrightarrow{a} \in \mathbb{E}, \text{ alors } \overrightarrow{a} \in F$$

Remarque : Ce théorème important dit qu'une partie F est fermée si elle contient les limites de toutes les suites convergentes de F.

Rédaction : Pour montrer qu'une partie F est fermée :
- Considérons une suite quelconque de points de F : $\left(\overrightarrow{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$.
- On suppose que cette suite converge vers un point de E : $\overrightarrow{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overrightarrow{a} \in \mathbb{E}$.
- Montrons que la limite reste dans F ie que : $\overrightarrow{a} \in F$.

✎ ***Exemple.*** Si $\overrightarrow{a} \in \mathbb{E}$, alors $\left\{\overrightarrow{a}\right\}$ est une partie fermée de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}\backslash\left\{\overrightarrow{a}\right\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** Si $\left(\mathbb{E}, \langle .,. \rangle\right)$ est un espace euclidien, et $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{F}^{\perp}$ est une partie fermée de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est une partie fermée.

Pour démontrer qu'une partie est ouverte, on peut démontrer par caractérisation séquentielle que son complémentaire est fermé.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $Gl_2(\mathbb{R})$ est une partie ouverte de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3.2 Intérieur, adhérence, frontière

Définition 28 – Intérieur d'une partie

Soit $A \subseteq \mathbb{E}$ une partie d'un evn $(\mathbb{E}, \|.\|)$.
L'ensemble de tous les points intérieurs de A est noté $\overset{\circ}{A}$, et s'appelle *l'intérieur* de la partie A.

Remarque. Il est clair que $\overset{\circ}{A}$ est une partie ouverte, incluse dans A.

Définition 29 – Adhérence

Soit une partie $A \subseteq \mathbb{E}$.
L'ensemble des points adhérents à la partie A est noté $\overline{A}$, et s'appelle *l'adhérence* de la partie A.

Remarque. Il est clair que $\overline{A}$ est une partie fermée, contenant A.
On a donc $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

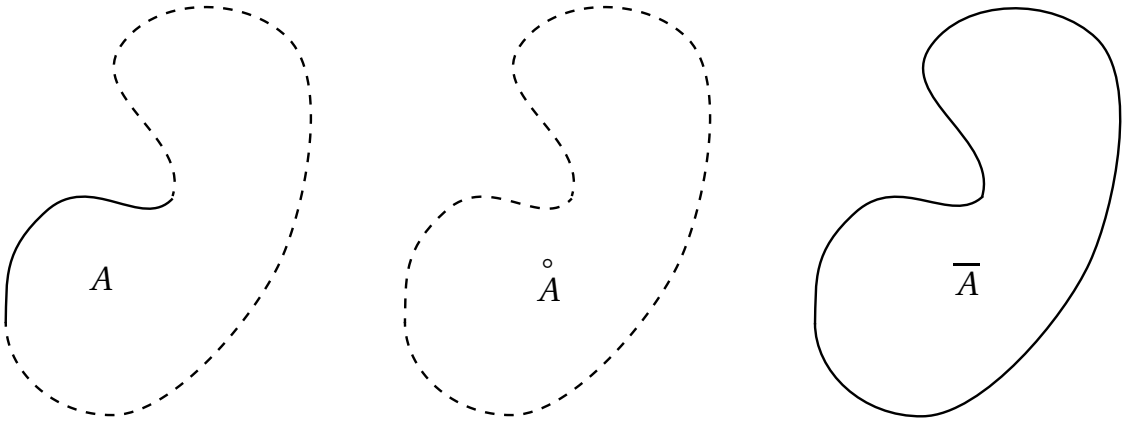
✎ ***Exemple.*** $\overset{\circ}{[0,1[} =]0,1[$ et $\overline{[0,1[} = [0,1]$.

✎ ***Exemple.*** Si on note $\overline{A}$ le complémentaire dans E d'une partie A, montrer que $E\backslash\overline{A} = \overset{\circ}{(E\backslash A)}$ (le complémentaire de l'adhérence est l'intérieur du complémentaire).

Définition 30 – Frontière d'une partie

On appelle *frontière* d'une partie A, l'ensemble $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.
On a donc $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$.

Intuitivement, la frontière de A correspond au « bord » de A.



4 Introduction au calcul différentiel

4.1 Fonctions numériques de n variables réelles

Définition 31 – Fonction numérique de n variables réelles

On dit que f est une fonction numérique de n variables réelles lorsque f est une application :

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f\big(Vx\big) = f(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

où A est une partie de $\mathbb{R}^n$.

On peut voir f comme une fonction de n variables *réelles* $x_1, \dots, x_n$, mais aussi comme une fonction d'une seule variable *vectorielle* $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Notations : pour $n = 2$, x_1 et x_2 sont souvent notées x et y.
Pour $n = 3$, x_1, x_2 et x_3 sont souvent notées x, y et z.

✎ ***Exemple.*** La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = \dfrac{x\sin(xy)}{x^2 + y^2} \end{array}$ est une fonction de deux variables réelles, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

✎ ***Exemple.*** Les *projections* $p_1, \dots, p_n$ sont définies sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad p_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & p_k(\overrightarrow{x}) = x_k \end{array}$$

On les appelle aussi *applications coordonnées*.

Définition 32 – Applications polynomiales sur $\mathbb{R}^n$

On appelle application polynomiale sur $\mathbb{R}^n$ toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tele que :

$$\forall \overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n, \quad f(\overrightarrow{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\overrightarrow{k} = (k_1, \dots, k_n) \in I} a_{\overrightarrow{k}} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

où I est une partie finie de $\mathbb{N}^n$ et pour tout $\overrightarrow{k} \in I$, $a_{\overrightarrow{k}} \in \mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** L'application $(x, y, z) \longmapsto x^3 z + 2xyz^2 - z + 2$ est une application polynomiale réelle définie sur $\mathbb{R}^3$.

Comme on l'a vu dans les section précédentes ont peut définir $\mathscr{B}(A, \mathbb{R})$, ensemble des applications f bornées sur une partie A de $\mathbb{R}^n$:

$$\exists M > 0 / \ \forall \overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A, \quad \left| f(\overrightarrow{x}) \right| = \left| f(x_1, \dots, x_n) \right| \leq M$$

$\mathscr{B}(A, \mathbb{R})$, muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{\overrightarrow{x} \in A} \left| f(x_1, \dots, x_n) \right|$, est alors un evn.

✎ ***Exemple.*** Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. Alors f est définie et bornée sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Pour étudier une fonction de n variables, une première idée sera d'en fixer $n - 1$ et de se ramener ainsi au cas bien connu d'une fonction numérique d'une seule variable.

C'est dans ce but que l'on définit la notion d'applications partielles en un point.

Définition 33 – Applications partielles

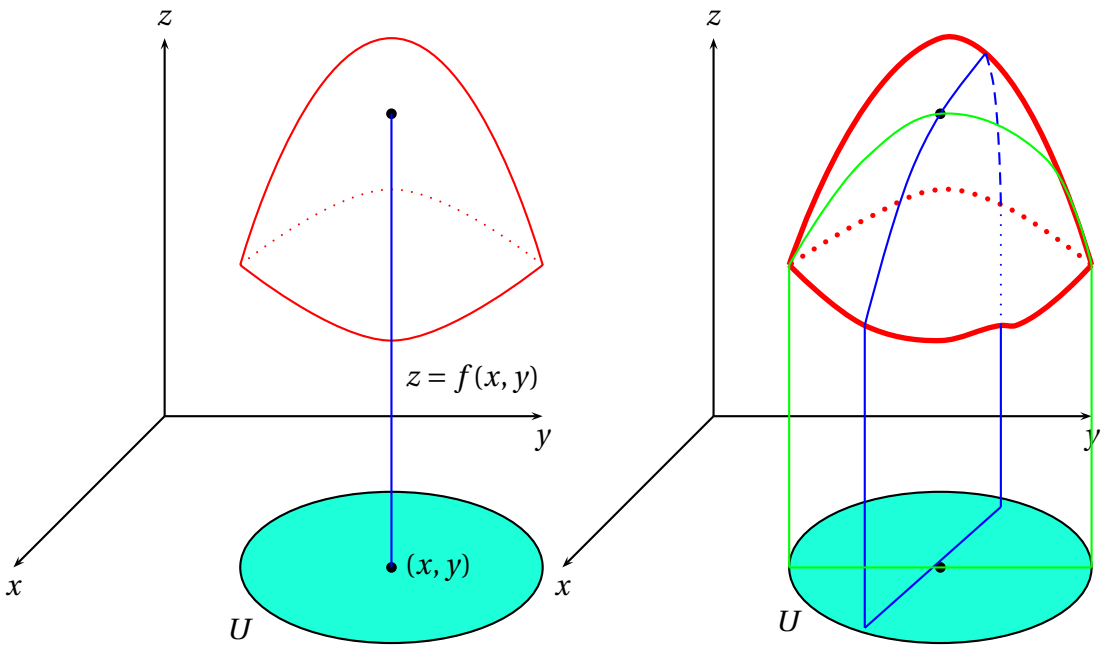
Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ et un point $\overrightarrow{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit les applications partielles au point $\overrightarrow{a}$ par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n) \end{array}$$

Ce sont des fonctions d'une seule variable

Notations. En toute rigueur, f_k devrait être notée $f_{k,\overrightarrow{a}}$ pour préciser qu'on a supposé que $x_1 = a_1, \dots, x_{k-1} = a_{k-1}, x_{k+1} = a_{k+1}, \dots, x_n = a_n$.
Pour cette raison, f_k est parfois notée $f(a_1, \dots, a_{k-1}, ., a_{k+1}, \dots, a_n)$.

Sur la figure suivante, on voit que le comportement locale de f au point a (c'est-à-dire sur une boule ouverte centrée en a), ne pourra pas être complètement étudié par le biais des applications partielles.



(a) Fonction de deux variables (b) Applications partielles

4.2 Dérivées partielles

On considère encore une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ où U ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 34 – Dérivées partielles

On appelle dérivées partielles de f au point a lorsqu'elles existent, les dérivées de f selon les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{e_k} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ avec $k \in [\![1, n]\!]$. On note alors :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) &= D_{\overrightarrow{e_k}} f(a) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + t.\overrightarrow{e_k}) - f(\overrightarrow{a})}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(\overrightarrow{a})}{t} \end{aligned}$$

Notations. Dans $\mathbb{R}^2$, les variables x_1 et x_2 sont notées x et y, donc les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ sont notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

De même dans $\mathbb{R}^3$, les dérivées partielles sont notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Notation. Dans $\mathbb{R}^n$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ se note aussi $\partial_k f$.

Remarque. La recherche de dérivées partielles revient donc à étudier la dérivabilité des fonctions partielles de f. Pour le calcul pratique, on dérive par rapport à une variable en fixant l'autre constante.

✎ ***Exemple.*** Calculer les dérivées partielles de $f(x,y) = x\cos(xy^2) + ye^x$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$, admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.

5 Exercices

Normes

Exercice 1 – Normes usuelles sur l'espace des fonctions continues

Sur l'espace $E = C^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ des fonctions continues sur le segment $[0,1]$, montrer qu'on peut définir ces trois normes :

1. $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$
2. $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t}$
3. $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$
4. Comparer ces normes (on pourra calculer la norme de la fonction f_n où $f_n(t) = t^n$).

Exercice 2 – Normes sur l'espace des polynômes

On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour un polynôme

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in E$$

on note

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2} \quad \|P\|_\infty = \max_{0\le k\le n} |a_k|$$

1. Vérifier que ce sont des normes sur E.
2. Comparer ces normes.
3. Quelle autres normes « classiques » peut-on définir sur $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 3 – Normes sur les espaces de matrices

Sur l'espace des matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, montrer qu'on peut définir les trois normes suivantes :

1. $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le p} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$
2. $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|$
3. Montrer qu'elles sont multiplicatives, ie :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \|A.B\| \le \|A\|\,.\,\|B\|$$

4. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \|A.B\| = \|A\|.\|B\|$$

Hint : considérer les matrices élémentaires $E_{1,1}$ et $E_{1,2}$.

Exercice 4 – Norme matricielle induite

On se donne une norme *vectorielle* $X \longmapsto \|X\|$ sur $\mathbb{K}^n$ et on lui associe la fonction N définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad N(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

1. Montrer que l'application N définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que, pour toutes matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$N(AB) \leq N(A).N(B\check{r}$$

3. Calculer $N(A)$ lorsque $\|X\| = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \left|X[i]\right|$, puis lorsque $\|X\| = \sum\limits_{i=1}^{n} \left|X[i]\right|$.

Exercice 5 – Exemple de norme sur $C^1\big([0,1]\big)$

On note $\mathbb{E}$ l'ensemble des fonctions $f \in C^1\big([0,1]\big)$ telles que $f(0) = 0$.
Pour $f \in \mathbb{E}$, on pose $N(f) = \left\|f'\right\|_\infty$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{E}$.
2. La comparer avec $\|.\|_\infty$.

Exercice 6 – Normes sur l'espace des fonctions lipschitziennes

On note $\mathfrak{Lip}([0,1])$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur le segment $[0,1]$ et pour $f \in \mathfrak{Lip}([0,1])$, on pose

$$N(f) = \left|f(0)\right| + \sup_{\substack{(x,y) \in [0,1] \\ x \neq y}} \frac{\left|f(x) - f(y)\right|}{\left|x - y\right|}$$

1. Vérifier que $\mathfrak{Lip}([0,1])$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Vérifier que N définit une norme sur $\mathfrak{Lip}([0,1])$.
3. Vérifier que $\mathfrak{Lip}([0,1]) \subset \mathscr{C}([0,1])$ et comparer les normes $\|.\|_\infty$ et N sur $\mathfrak{Lip}([0,1])$.

Chapitre 5

Intégrales généralisées

Sommaire

1 Définition des intégrales généralisées 148
1.1 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle 148
1.2 Intégrale impropre sur $[a,+\infty[$ 151
1.3 Cas d'un intervalle $[a,b[$ 154
1.4 Cas d'un intervalle $]a,b]$ 155
1.5 Cas d'un intervalle $]a,b[$ 155
1.6 Cas d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ 156
2 Propriétés des intégrales généralisées 157
2.1 Relation de Chasles pour les intégrales généralisées 157
2.2 Linéarité des intégrales généralisées 157
2.3 Positivité des intégrales convergentes 158
2.4 Croissance des intégrales convergentes 159
2.5 Intégrales de références 159
3 Calcul des intégrales généralisées 160
3.1 À l'aide d'une primitive 160
3.2 Intégration par parties 160
3.3 Changement de variables 161
4 Fonctions intégrables 162
4.1 Convergence absolue et fonctions intégrables 162
4.2 Critères de comparaison des fonctions positives 163
4.3 Espaces vectoriels associés aux fonctions intégrables 166
5 Méthodologie pour étudier la nature d'une intégrale généralisée 167
6 Exercices 168

1 Définition des intégrales généralisées

1.1 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition 1 – Subdivision de $[a,b]$

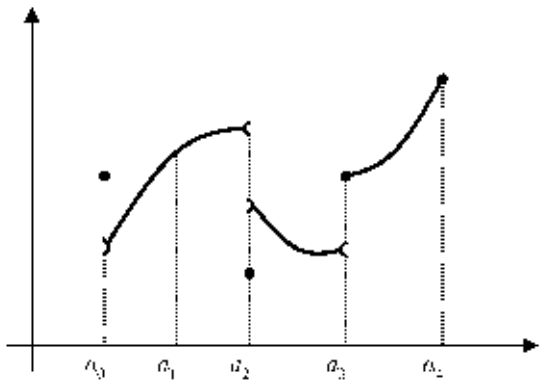
Une subdivision du segment $[a,b]$ est une famille $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ de $n+1$ points de $[a,b]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, telle que :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$$

Cela revient à découper le segment $[a,b]$ en n sous-intervalles.

Définition 2 – Fonction continue par morceaux sur un segment

Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite continue par morceaux lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ de $[a,b]$ telle que :
(i) pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, f est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$;
(ii) pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $f(x_k^+)$ et $f(x_{k+1}^-)$ existent et sont finies.

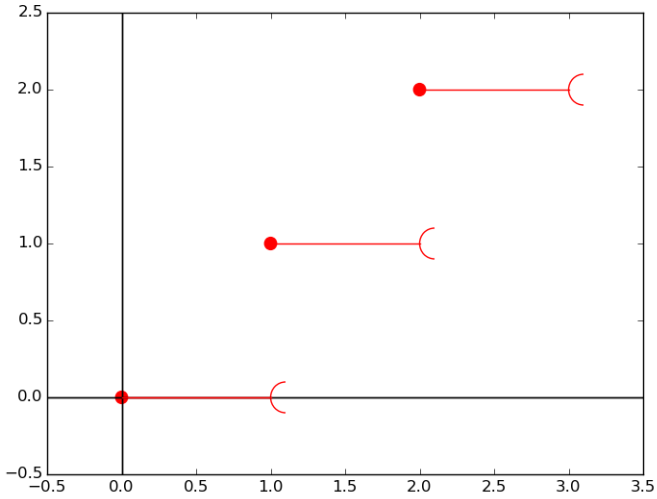


Remarque. Par définition, f doit avoir un nombre *fini* de points de discontinuités.

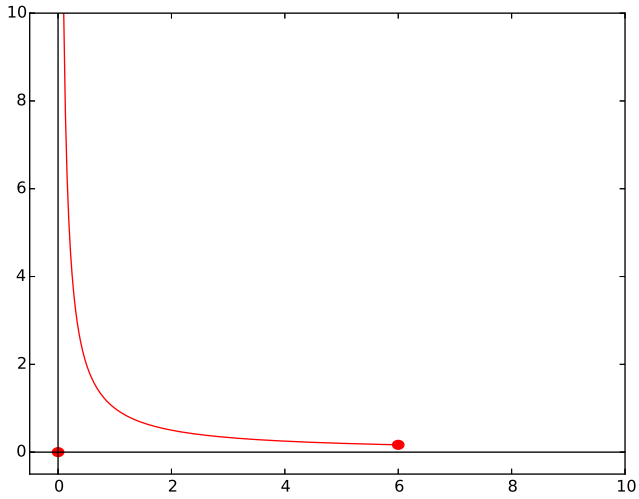
La subdivision σ est dite *adaptée* à f. En lui ajoutant des points, on obtient une subdivision *plus fine*, qui est elle aussi adaptée à f. Par contre une subdivision adaptée doit contenir un minimum de points (correspondant aux points de discontinuité de f), et dans ce cas on dit qu'elle est *optimale* pour f.

✎ ***Exemple.*** Une fonction continue sur $[a,b]$ est un cas particulier de fonctions continue par morceaux ; la subdivision optimale est $\sigma = (a,b)$.

✎ ***Exemple.*** La fonction partie entière est continue par morceaux sur $[0,3]$; la subdivision optimale est $\sigma = (0,1,2,3)$.



⚠ La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ (elle est pourtant continue sur $]0,1]$).



⚠ La fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$, puisqu'elle a une infinité de points de discontinuité.

Remarque importante : Si $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ est une subdivision adaptée à f, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f se prolonge par continuité en une fonction continue sur $[x_k, x_{k+1}]$, notée φ_k :

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} f(x_k^+) & \text{si } t = x_k \\ f(t) & \text{si } x_k < t < x_{k+1} \\ f(x_{k+1}^-) & \text{si } t = x_{k+1} \end{cases}$$

Théorème 3 – Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Si f est une fonction continue par morceaux et $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f, alors le réel :

$$I(\sigma, f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$$

ne dépend pas du choix de la subdivision σ.
On peut donc le noter $I(f)$.

Définition 4 – Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Si f est une fonction continue par morceaux on appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$ le réel :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} I(f)$$

Intuitivement, on calcule donc « l'aire algébrique sous la courbe » pour chaque « morceaux continue » du graphe, puis on additionne ces aires.

On vérifie facilement que cette définition englobe les définitions de l'intégrale d'une fonction continue. Nous avons donc généralisé la notion d'intégrale d'une fonction continue au cas de certaines fonctions discontinues.

Théorème 5 – Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

1. L'intégrale d'une fonction continue par morceaux a les mêmes propriétés que l'intégrale d'une fonction continue, sauf la *stricte positivité*.
   • Plus précisément : les propriétés de Chasles, linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire sont vraies pour l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.
   • La stricte positivité est mise en défaut : on peut avoir f continue par morceaux et positive, différente de l'application nulle, et telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
2. Si on change la valeur de f en *un nombre fini points*, alors on ne change pas la valeur de son intégrale.

⚠ On pose $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2 & \text{si } t = 1 \end{cases}$.

On a $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, et pourtant f est continue positive et différente de l'application nulle.

Plus précisément, si f est positive, continue par morceaux sur $[a, b]$, et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f(t) = 0$ pour $t \in [a, b]$ sauf éventuellement *en un nombre fini de points* (qui sont des points de discontinuité de f).

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\int_0^2 \big(t - \lfloor t \rfloor\big)\,\mathrm{d}t$.

⚠ Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, elle peut ne pas admettre de primitive, ce qui complique le calcul de son intégrale...

Définition 6 – Fonction continue par morceaux sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur I, on dit que f est continue par morceaux sur I lorsqu'elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.
L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I sera noté $C^0_{\mathrm{pm}}(I,\mathbb{C})$ si les fonctions sont à valeurs complexes, et $C^0_{\mathrm{pm}}(I,\mathbb{R})$ si les fonctions sont à valeurs réelles.

Théorème 7 – Espace vectoriel $C^0_{\mathrm{pm}}(I,\mathbb{K})$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $C^0_{\mathrm{pm}}(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Dans ce paragraphe, nous avons alléger les hypothèses de régularité sur la fonction f. Dans les paragraphes suivants, nous allons définir l'intégrale sur n'importe quel intervalle.

1.2 Intégrale impropre sur $[a,+\infty[$

On suppose que $a \in \mathbb{R}$.

Définition 8 – Intégrale impropre en $+\infty$

Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est *impropre* en $+\infty$.

Important. Remarquons que pour tout $x \in [a,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe car f est continue par morceaux sur le segment $[a,x]$.
Par contre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ n'existe pas (à priori) puisque $[a,+\infty[$ n'est pas un segment.

⚠ Il est donc très important que l'intervalle soit fermé en a, donc que $f(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ soit finie (ce qui est le cas si f est continue à droite en a).

Définition 9 – Intégrale convergente

Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est conver-

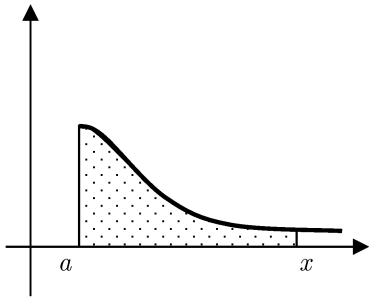
gente lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Dans ce cas on pose :

$$\int_a^{+infty} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Notations. $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ peut aussi se noter $\int_{[a,+\infty[} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^{+\infty} f$ (puisque t est une *variable muette*).

Remarque. L'intégrale converge si, et seulement si, l'aire hachurée converge quand $x \to +\infty$.

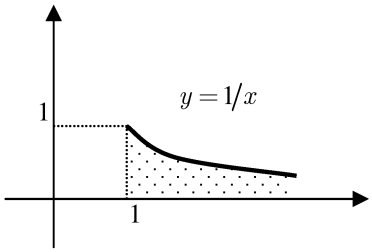


⚠ Par essence, une intégrale impropre est une limite, pour la manipuler il faut préalablement en justifier l'existence.

✎ ***Exemple.*** $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

✎ ***Exemple.*** $\int_0^{+\infty} 1\,\mathrm{d}t$ diverge.

✎ ***Exemple.*** $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.



Pour la fonction inverse, il y a trop d'espace entre la courbe et l'axe des abscisses pour que l'intégrale converge, la fonction inverse converge trop lentement vers 0 en $+\infty$.

✎ ***Exemple.*** $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 1$.

Cette fois, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ converge assez rapidement vers 0 en $+\infty$.

Vocabulaire :

• les intégrales $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, pour $x \in [a,+\infty[$, s'appellent *intégrales partielles* de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$;

• lorsque $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, les intégrales $\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ s'appellent *restes* de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$;

• étudier la *nature* d'une intégrale, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente ;

• deux intégrales impropres sont dites de *même nature* lorsqu'elles sont toutes les convergentes ou toutes les deux divergentes.

Donnons deux propriétés importantes des intégrales impropres.

Théorème 10 – Reste d'une intégrale convergente

Supposons que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors pour tout $x \in [a,+\infty[$, le reste $\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente et :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Important. Si f est *continue* sur $[a,+\infty[$, alors la fonction $F : x \longmapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est C^1 sur $[a,+\infty[$ et pour $x \geq a$: $F'(x) = -f(x)$.

Théorème 11 – Cas d'une fonction positive

Si $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux et *positive*, alors on équivalence de :

(i) $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;

(ii) la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,+\infty[$.

Dans ce cas :

$$\forall (x,y) \in [a,+\infty[^2, \quad x \leq y \Longrightarrow \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Étudions les propriétés de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes.

Théorème 12 – Intégrale sur $[a,+\infty[$ d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.

1. Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^{+\infty} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_a^{+\infty} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

2. On a équivalence de :
   (i) $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;
   (ii) $\int_a^{+\infty} \mathscr{R}e\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} \mathscr{I}m\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$ convergent.
   Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \mathscr{R}e\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t + i.\int_a^{+\infty} \mathscr{I}m\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

   donc :

$$\mathscr{R}e\left(\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^{+\infty} \mathscr{R}e\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathscr{I}m\left(\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^{+\infty} \mathscr{I}m\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

✎ ***Exemple.*** Soit $\omega > 0$. Nature et calcul de $\int_0^{+\infty} \cos(\omega t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \sin(\omega t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On a donc des résultats très proches de ceux du chapitre sur les séries convergentes.

⚠ Mais il faut faire attention au fait suivant : si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on ne peut pas dire que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ (il se peut que la limite n'existe pas...cf TD).

Nous allons maintenant étendre la notion d'intégrale impropre à n'importe quel autre intervalle.

1.3 Cas d'un intervalle $[a, b[$

On suppose que :
- $a \in \mathbb{R}$
- $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$
- $a < b$.

Définition 13 – Cas d'un intervalle $[a, b[$

Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *impropre* en b.
Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *convergente* lorsque $\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Dans ce cas on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge*.

✎ ***Exemple.*** $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est impropre en $+\infty$, converge et est égale à 1.

✎ ***Exemple.*** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ est impropre en 1, converge et est égale à 2.

✎ ***Exemple.*** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}$ est impropre en 1 et diverge.

1.4 Cas d'un intervalle $]a,b]$

On suppose ci-dessous que $b \in \mathbb{R}$ et que $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$.

Définition 14 – Cas d'un intervalle $]a,b]$

Si f est continue par morceaux sur $]a,b]$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *impropre* en a.
Elle est dite *convergente* lorsque $\lim\limits_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.
Dans ce cas on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge ou que f n'est pas intégrable sur $]a,b]$.

✎ ***Exemple.*** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est impropre en 0 et converge.

✎ ***Exemple.*** $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est impropre en 0 et diverge.

1.5 Cas d'un intervalle $]a,b[$

Dans la définition ci-dessous, on prend $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$, et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

Définition 15 – Cas d'un intervalle $]a,b[$

Si f est continue par morceaux sur $]a,b[$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est doublement impropre en a et b.
On alors équivalence des propositions :
(i) $\exists c_0 \in]a,b[/ \int_a^{c_0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{c_0}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent

(ii) $\forall c \in]a,b[$, $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent

Dans ce cas, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on pose, pour tout $c \in]a,b[$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Pour déterminer la nature d'une intégrale doublement impropre, il faut « couper l'intégrale en deux ».

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est doublement impropre et diverge.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est doublement impropre, converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi$.

1.6 Cas d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$

Dans ce paragraphe $(a,b)_1\mathbb{R}^2$.

Dans le cas où f est continue par morceaux sur $[a,b]$, elle l'est aussi sur $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$. La notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pourrait alors prêter à confusion : est-ce $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{]a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$?

Le théorème suivant nous assure du contraire.

Théorème 16 – Théorème des quatre abbés

Soit f continue par morceaux sur le *segment* $[a,b]$.
Alors on a équivalence de :

(i) $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge,

(i) $\displaystyle\int_{]a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge,

(i) $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge,

(i) $\displaystyle\int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Et dans ce cas :

$$\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$$

La notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne pose donc pas de problème.

Important. Si :
- f est *continue* sur $[a,b[$;
- $\lim\limits_{t\to b^-} f(t)$ est *finie* égale à $\ell \in \mathbb{R}$;

alors, en posant $f(b)=\ell$, f (ainsi prolongée) est continue par morceaux sur $[a,b]$ et le théorème précédent assure que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge*.
On peut facilement écrire le même raisonnement pour une fonction continue sur $]a,b]$ ou $]a,b[$.

Le cas où f se prolonge en une fonction continue par morceaux sur le *segment* $[a,b]$ sera traité sous le nom d'intégrale *faussement impropre*.

Le théorème des « quatre abbés » assure donc qu'une intégrale *faussement impropre* est *convergente*.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0 donc convergente.

2 Propriétés des intégrales généralisées

Ce sont les mêmes que celles de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.1 Relation de Chasles pour les intégrales généralisées

Soit $(a,b,c)\in \overline{I}$ (ie I et ses bornes).

Notation : si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $a<b$, on pose : $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
On pose aussi $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Théorème 17 – Relation de Chasles pour les intégrales généralisées

On a :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
avec convergence des trois intégrales en jeu.

⚠ Insistons sur le fait qu'on ne suppose pas que $a<c<b$.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge, puisqu'on a vu que $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2.2 Linéarité des intégrales généralisées

Théorème 18 – Linéarité des intégrales généralisées

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux sur I, et λ un nombre réel.
On suppose que $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
Alors $\int_I \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ et $\int_I \lambda.f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et :

$$\int_I \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + .\int_I g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_I \lambda.f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda.\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$$

✎ ***Exemple.*** Si $\int_I \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ et $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

✎ ***Exemple.*** Si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_I \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ diverge.

✎ ***Exemple.*** Si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ divergent, alors on ne peut rien dire sur la nature de $\int_I \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ (elle converge ou elle diverge).

⚠ Pour écrire $\int_I \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + .\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ il faut avoir vérifier qu'au moins deux intégrales sur les trois convergent !
Sinon on risque d'écrire des absurdités du type :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$$

Corollaire 19 – Linéarité des intégrales généralisées

L'ensemble des fonctions f continues par morceaux sur I, telles que $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.
De plus l'application $f \longmapsto \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire.

Important. On peut permuter les signe $\int$ et $\sum$, à condition que ce soit une somme *finie* :

$$\int_I \left(\sum_{k=1}^{N} f_k(t)\right)\mathrm{d}t = \left(\sum_{k=1}^{N} \int_I f_k(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

⚠ Cette propriété est fausse avec des sommes *infinies* (ie des sommes de séries).

2.3 Positivité des intégrales convergentes

Théorème 20 – Positivité (stricte) des intégrales convergentes

1. Positivité : Soit f une fonction *continue par morceaux* et *positive* sur I. Si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$

converge, on a alors :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

2. Stricte positivité : Soit f une fonction *continue* et *positive* sur un I. Si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on a alors :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \forall t \in I,\ f(t) = 0 \quad \text{(ie } f \text{ est l'application nulle sur } I\text{)}$$

3. Stricte positivité (contraposée) : Soit f une fonction *continue* et *positive* sur un I. On suppose que f est différente de l'application nulle sur I :

$$\exists t_0 \in I \big/ f(t_0) \neq 0$$

Si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on a alors :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

2.4 Croissance des intégrales convergentes

Théorème 21 – Croissance des intégrales convergentes

Soient f, g sont deux fonctions *continues par morceaux*, d'intégrales *convergentes* sur I. On suppose que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) \leq g(t)$$

Alors :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$$

2.5 Intégrales de références

Théorème 22 – Intégrabilité de $\ln$ en 0

L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

De plus, $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$.

Théorème 23 – Intégrabilité des fonctions exponentielles en $+\infty$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Dans ce cas, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\alpha}$.

Dans la suite, on appelle *intégrale de Riemann* une intégrale dont l'intégrande est la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$.

Théorème 24 – Intégrales de Riemann en $+\infty$

Pour tout $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque. On a le même résultat en $-\infty$.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ converge et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ diverge.

Théorème 25 – Intégrales de Riemann en $a \in \mathbb{R}$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b > a$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

En particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^3}$ diverge et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge.

3 Calcul des intégrales généralisées

Les techniques sont essentiellement les mêmes que celles utilisées pour le calcul de l'intégrale sur un segment.

3.1 À l'aide d'une primitive

Si on connaît F une primitive de f sur I, alors on peut simultanément *montrer l'existence* et *calculer* $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

✎ ***Exemple.*** Convergence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$.

✎ ***Exemple.*** Convergence et calcul de $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.

3.2 Intégration par parties

Théorème 26 – Intégration par parties sur $[a, b[$

On suppose que :

- f et g sont de classe C^1 sur $[a, b[$;

- $\lim\limits_{t\to b^-} f(t)g(t)$ existe et est finie.

Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de *même nature* et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^{b^-} - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

où $\big[f(t)g(t)\big]_a^{b^-} = \lim\limits_{t\to b^-} f(t)g(t) - f(a)g(a)$.

On a bien sur le même type de résultat sur un intervalle du type $]a,b]$ ou $]a,b[$.

⚠ La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ ne suffit pas. Il faut aussi vérifier que le crochet a une limite finie lorsque $t \to b^-$.

✎ ***Exemple.*** Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

✎ ***Exemple.*** Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.
(*Attention, il y a un piège !*)

✎ ***Exemple.*** Montrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

3.3 Changement de variables

Théorème 27 – Changement de variables dans une intégrale généralisée

Si f est continue par morceaux sur $[a,b[$ et si $\varphi :]\alpha,\beta[\longrightarrow]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe C^1, alors les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et en cas de convergence elles sont égales.

On a le même type de résultat en remplaçant $[a,b[$ par $]a,b]$ ou $]a,b[$.

De même si $\varphi : [a,b[\longrightarrow [\alpha,\beta[$ est une bijection strictement décroissante de classe C^1, alors les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\beta^\alpha f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et en cas de convergence elles sont égales

✎ ***Exemple.*** Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

✎ ***Exemple.*** Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 28 – Cas d'une fonction paire/impaire

1. Fonction paire. Si f est continue sur $]-a,a[$ alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seule-

ment si $\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, ou encore si et seulement si $\int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$$

car $\int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Fonction impaire. Si f est continue sur $]-a,a[$ alors $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, ou encore si et seulement si $\int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

car $\int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

4 Fonctions intégrables

Comme pour les séries, l'étude des fonctions positives va nous donner plusieurs critères pour étudier la nature d'une intégrale généralisée.

4.1 Convergence absolue et fonctions intégrables

Définition 29 – Convergence absolue - Fonction intégrable

Si f est continue par morceaux sur I, on dit que $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est *absolument convergente* lorsque $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.
On dit aussi que f est *intégrable* sur I.

Théorème 30 – La convergence absolue implique la convergence

Si $\int_I \left|f(t)\right|\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

✎ ***Exemple.*** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ converge.

✎ ***Exemple.*** $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)^4}\,\mathrm{d}t$ converge.

⚠ La réciproque du théorème est fausse : nous verrons en TD que l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais non absolument convergente.

⚠ f *intégrable* sur I implique donc que $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge*, mais la réciproque est fausse !
Si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors on ne peut pas dire que f est intégrable sur I (sauf dans le cas particulier où f est positive, puisque dans ce cas $f = |f|$)).

⚠ Le fait d'être *intégrable* s'applique à une fonction, le fait de *converger* s'applique à une intégrale.
Ne pas confondre ces notions. dire que f converge n'a aucun sens !!

Corollaire 31 – Inégalité triangulaire pour les intégrales généralisées

Si f est *intégrable* sur I alors :

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Important. si l'intervalle est un *segment* $[a,b]$, alors toute fonction *continue par morceaux* est intégrable (d'après le théorème des « quatre abbés »).

4.2 Critères de comparaison des fonctions positives

Tout ce qui est donné pour des fonctions positives sur l'intervalle I reste vrai pour des fonctions négatives (il suffit de remplacer f par $-f$ et d'utiliser la linéarité des intégrales convergentes). Seules les fonctions qui changent de signe poseront problème.

Théorème 32 – Comparaison par inégalité

1. Fonctions positives.
   Si f et g sont *continues par morceaux* sur $[a,b[$ et vérifient :

   $$\forall t \in [a,b[, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$$

   Alors :

   $$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

   et dans ce cas : $0 \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
   D'autre part, par contraposée :

   $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \Longrightarrow \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

2. Fonctions de signe non constant.
   Si f et g sont continues par morceaux $[a,b[$ et vérifient :

   $$\forall t \in [a,b[, \quad |f(t)| \leq |g(t)|$$

Alors :

$$g \text{ intégrable sur } [a,b[\Longrightarrow f \text{ intégrable sur } [a,b[$$

On a le même résultat sur un intervalle du type $]a,b]$ ou $]a,b[$.

<u>Rédaction</u> : On rédige de la manière suivante.
On a $\forall t \in [a,b[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$.
On sait que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc d'après le théorème comparaison par inégalité pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
⚠ ATTENTION, la rédaction suivante est fausse !
On a $\forall t \in [a,b[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$.
Donc $0 \leq \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$. $\longleftarrow$ *FAUX car on ne peut pas utiliser la croissance de l'intégrale sans avoir prouvé auparavant la convergence des intégrales en jeu.*
On sait que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc d'après le théorème comparaison par inégalité pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)\mathrm{d}t$ converge.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Théorème 33 – Comparaison par domination/négligeabilité

1. <u>Fonctions positives.</u>
   Si f et g sont *continues par morceaux* et *positives* sur $[a,b[$, et vérifient

   $$f(t) \underset{t\to b^-}{=} \mathcal{O}\big(g(t)\big)$$

   alors :

   $$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

   Par contraposée :

   $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \Longrightarrow \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

2. <u>Fonctions de signe non constant.</u>

Si f et g sont *continues par morceaux* sur $[a,b[$, et vérifient

$$f(t) \underset{t\to b^-}{=} \mathcal{O}\big(g(t)\big)$$

alors :

$$g \text{ intégrable sur } [a,b[\Longrightarrow f \text{ intégrable sur } [a,b[$$

3. On a les mêmes résultats en remplaçant le « grand o » par un « petit o ».

On a le même résultat sur un intervalle du type $]a,b]$ ou $]a,b[$.

En utilisant les intégrales de référence de Riemann, on peut en déduire le résultat suivant : si $\lim\limits_{t\to b^-} t^\alpha \big|f(t)\big| = 0$ avec $\alpha > 1$, alors f est intégrable sur $[a,b[$.

✎ ***Exemple.*** $t \longmapsto t^3 \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

De même, si $\lim\limits_{t\to b^-} t^\alpha \big|f(t)\big| = +\infty$ avec $\alpha \leq 1$, alors f n'est pas intégrable sur $[a,b[$.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ diverge.

⚠ Ces deux théorèmes ne donnent qu'une condition *suffisante* : si $0 \leq f \leq g$ et g non intégrable, alors on ne peut rien dire sur f.

Le théorème suivant est plus simple d'utilisation, puisque la condition donnée est *nécessaire et suffisante*.

Théorème 34 – Comparaison par équivalence

Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b[$ et vérifient :

$$f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$$

Alors :

$$f \text{ intégrable sur } [a,b[\Longleftrightarrow g \text{ intégrable sur } [a,b[$$

On a le même résultat en remplaçant $[a,b[$ par $]a,b]$ ou $]a,b[$.

⚠ Si $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, il faut aussi l'hypothèse que g est positive pour conclure que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)\mathrm{d}t$ diverge.

4.3 Espaces vectoriels associés aux fonctions intégrables

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont supposées définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 35 – Espace $\mathscr{L}^1(I,\mathbb{K})$

L'ensemble, noté $\mathscr{L}^1(I,\mathbb{K})$, des fonctions *continues par morceaux* et *intégrables* sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si on pose $\|f\|_1 = \int_I |f|$, on ne définit pas une norme car l'axiome de séparation n'est pas vérifié.

Définition 36 – Espace $\mathscr{L}^1_c(I,\mathbb{K})$

L'ensemble, noté $\mathscr{L}^1_c(I,\mathbb{K})$, des fonctions *continues* et *intégrables* sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si on pose $\|f\|_1 = \int_I |f|$, on définit une norme sur $\mathscr{L}^1_c(I)$.

On dira que f est de *de carré intégrable* sur I, lorsque $\int_I f^2$ converge.

Définition 37 – Espace $\mathscr{L}^2(I,\mathbb{K})$

L'ensemble, noté $\mathscr{L}^2(I,\mathbb{K})$, des fonctions *continues par morceaux* et *de carré intégrable* sur I, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\int_I f^2}$, on ne définit pas une norme car l'axiome de séparation n'est pas vérifié.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de prouver la propriété suivante.

Proposition 38 – Produit de fonctions de carré intégrable

Si f et g sont *continues par morceaux* et *de carré intégrable* sur I, alors $f \times g$ est *intégrable* sur I.

Définition 39 – Espace $\mathscr{L}^2_c(I,\mathbb{K})$

L'ensemble, noté $\mathscr{L}^2_c(I,\mathbb{K})$, des fonctions *continues* et *de carré intégrable* sur I, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\int_I f^2}$, on définit une norme sur $\mathscr{L}_c^2(I,\mathbb{K})$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cet norme est la norme euclidienne associée au produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_I f \times g$$

$\left(\mathscr{L}_c^2(I,\mathbb{R}), \langle .,. \rangle\right)$ est un espace *préhilbertien réel.*

5 Méthodologie pour étudier la nature d'une intégrale généralisée

• On commence par définir la fonction à intégrer. On précise soigneusement ses ensembles de définition et de continuité.

• Identifier la (resp. les) borne(s) en laquelle (resp. lesquelles) l'intégrale est impropre. Dans le cas d'une intégrale impropre aux deux bornes, couper l'intégrale en deux et faire deux études.

• Dans le cas d'une borne finie : à l'aide d'un calcul de limite, déterminer si la fonction se prolonge par continuité (fausse impropreté).

• Si la fonction change de signe, considérer la valeur absolue de cette fonction.

• Chercher un équivalent simple.

• Si cela ne suffit pas, tester la règle du $t^\alpha f(t)$.

• Dans les cas plus complexes, modifier l'intégrale à étudier à l'aide d'une intégration par parties ou d'un changement de variables.

• Dans de rares cas, on sait déterminer une primitive de la fonction à intégrer, il suffit alors de calculer la limite des intégrales partielles .

Noter que seules les deux dernières méthodes permettent aussi de calculer la valeur de l'intégrale étudiée (en cas de convergence).

6 Exercices

Nature et calcul d'intégrales

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2(t+1)}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$
9. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\arctan(t^2)\,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan(\sqrt{t})}{\ln\left(\cos(\sqrt{t})\right)}\,\mathrm{d}t$
11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin(t)}}\,\mathrm{d}t$
12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$
13. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
14. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
16. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t$
17. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(t)\right)\mathrm{d}t$
18. $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ où $P \in \mathbb{R}[X]$

Exercice 2 – Fractions rationnelles

Montrer la convergence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

   Hint : On cherchera $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $\displaystyle\frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}$.

Exercice 3 – IPP et changement de variable

À l'aide du changement de variable $x = t^2$, puis d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 4 – Changement de variable

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-u^2)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ est convergente.
2. La calculer à l'aide du changement de variable $t = u^2$.

Exercice 5 – IPP

Montrer la convergence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ *Hint : IPP et astuce corse*
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$ *Hint : IPP et astuce corse pour trouver une relation de récurrence*

Exercice 6 – Fractions rationnelles

On considère l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

1. Justifier la convergence de I.
2. Factoriser le polynôme X^4+1 dans $\mathbb{R}[X]$.
3. À l'aide d'une changement de variable, montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$.
4. En développant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^4+1}\mathrm{d}t$, calculer I.

Exercice 7 – Intégrales de Bertrand

Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que les intégrales de Bertrand $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
2. Montrer que les intégrales de Bertrand $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$). *On pourra procéder directement ou se ramener à la question précédente par changement de variable.*
3. Que dire de $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$?

Exercice 8 – Intégrales d'Euler

On pose :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin t\right) \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos t\right) \mathrm{d}t$$

1. Montrer que I et J sont bien définies et égales.
2. Calculer $I + J$, et en déduire les valeurs de I et J.

Suites et fonctions définies par une intégrale

Exercice 9

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10 – Intégrale de Dirichlet

On propose de montrer que l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente et de calculer sa valeur.

1. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer qu'elle est absolument convergente.
   (b) En découpant $\mathbb{R}^+$ en sous-intervalles du type $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, montrer qu'elle ne converge pas absolument.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left((2n+1)t\right)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left((2n+1)t\right)}{t}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et calculer I_0.
   (b) Si φ est une fonction C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t = 0$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (I_n - J_n) = 0$.
   (d) Conclure sur la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11 – Calcul d'une intégrale par récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
3. Vérifier que $I_0 = \sqrt{\pi}$.
4. Déterminer une expression de I_{2n+1} et I_{2n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire la valeur des intégrales $J_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 – Calcul d'une intégrale par récurrence

Nature et calcul de $I_n \displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Hint : on pourra introduire $J_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^p\,dx$, *pour* $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 13 – Équivalent d'une suite d'intégrales

1. Résoudre $\mathrm{sh}(t) = 1$.
2. On note $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$ et $I_n = \displaystyle\int_0^\alpha \mathrm{sh}(t)^n\,\mathrm{d}t$; étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $\forall n \geq 2,\ nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$ puis trouver un encadrement et un équivalent de I_n.

Exercice 14 – Fonction définie par une intégrale impropre

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   On définit alors la fonction $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et déterminer $f'(x)$, pour $x > 0$.
3. (a) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ a une limite finie à droite en 0.

   (b) Vérifier que : $\forall x > 0,\ g(x) = -\ln(x) - f(x) + f(1)$.

   (c) En déduire que : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Un contre-exemple

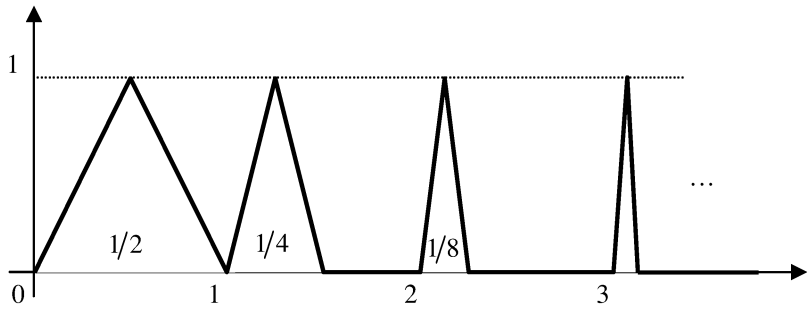
Exercice 15 – Convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t)$

On suppose que f a une limite non nulle (finie ou infinie) en $+\infty$.
Montrer que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 16 – Contre-exemple

On considère la fonction nulle sauf sur les intervalles centrés en $n \in \mathbb{N}$, de largeur $\dfrac{1}{2^n}$ où la fonction est une dent de scie de hauteur 1 :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[n - \tfrac{1}{2^{n+1}}, n\right], \quad & f(x) = 1 + 2^{n+1}(x-n) \\ \forall x \in \left[n, n + \tfrac{1}{2^{n+1}}\right], \quad & f(x) = 1 + 2^{n+1}(n-x) \end{aligned}$$



Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que f n'est pas de limite nulle en $+\infty$.

Chapitre 6

Interversions de limite et d'intégrales

Sommaire

1 Suites et fonctions définies par une intégrale 174

1.1 Théorème de convergence dominée 174

1.2 Technique d'interversion série-intégrale 175

1.3 Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions 177

2 Intégrales à paramètre 177

2.1 Continuité d'une fonction définie par une intégrale 178

2.2 Dérivation d'une fonction définie par une intégrale 179

3 Exercices 182

1 Suites et fonctions définies par une intégrale

1.1 Théorème de convergence dominée

Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,+\infty[$ comme sur la figure 6.1 :

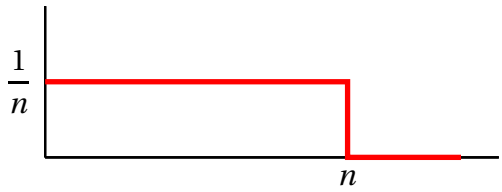


FIGURE 6.1 – Bosse affaissante

Pour $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou encore :

$$f_n(x) = \frac{1}{n}.\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$$

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a donc $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n > x$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Pourtant on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \neq \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = 0$$

Cet exemple montre que, en général, on ne peut pas intervertir limite et intégrale.

Nous avons déjà vu des exemples de calculs de limite d'intégrales, en procédant par encadrement (à condition d'avoir conjecturer la bonne limite).

Le théorème de *convergence dominée* donne des hypothèses qui assurent qu'on puisse intervertir limite et intégrale, sans avoir besoin d'encadrer les intégrales.

Théorème 1 – Théorème de convergence dominée de Lebesgue

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est *continue par morceaux* sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.
On suppose que :

(i) La suite de fonctions (f_n) *converge simplement* sur I vers une fonction f ie :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

(ii) La fonction f est *continue par morceaux* sur I.

(iii) **Hhypothèse de domination.** Il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$, *indépendante de* n qui est *continue par morceaux* et *intégrable* sur I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad \left|f_n(x)\right| \leq \varphi(x)$$

Alors :

1. les fonction f_n et f sont intégrables sur I ;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

⚠ La quantité $f_n(t)$ dépend des deux variables n et t. Dans l'hypothèse de domination, il est fondamental que la fonction φ ne dépende pas de n.

⚠ Ne pas oublier de vérifier que la fonction f est continue par morceaux. En effet, il existe des suites de fonctions continue par morceaux (f_n) qui convergent simplement vers une fonction f qui n'est pas continue par morceaux, et dont on ne sait pas définir l'intégrale $\left(\text{considérer } f_n(t) = \dfrac{1}{t}\mathbb{1}_{[\frac{1}{n},1]}(t) \text{ sur } [0,1]\right)$.

✎ ***Exemple.*** Étudier la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

✎ ***Exemple.*** Étudier la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$.

Remarque. L'hypothèse de domination est très simple à vérifier si I est un segment : en effet, la fonction φ peut être choisie constante.

✎ ***Exemple.*** Étudier la suite $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \arctan\left(\frac{t}{n}\right)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. À l'aide de la caractérisation séquentielle d'une limite, on peut utiliser ce théorème pour déterminer la limite d'une fonction définie par une intégrale.

✎ ***Exemple.*** On considère la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)^x\,\mathrm{d}t$.
Déterminer la limite de F lorsque $x \to +\infty$.

Important. Les bornes de l'intégrale *ne doivent pas dépendre de n*. Dans le cas contraire, il faut se ramener à des bornes qui ne dépendent pas n, en utilisant un changement de variable, ou une fonction indicatrice.

✎ ***Exemple.*** Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

1.2 Technique d'interversion série-intégrale

On considère une *suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dira que la *série de fonctions* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I, lorsque, pour tout $x \in I$, la *série numérique* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ converge.

On notera $S : I \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Si S est *continue par morceaux* et *intégrable* sur I, on peut définir $\displaystyle\int_I S(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$.
La question que l'on se pose est de savoir si :

$$\int_I S(x)\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

ie peut-on permuter un symbole et $\displaystyle\int$ et un symbole $\displaystyle\sum$ relatif à une somme de série ?

L'idée générale est la suivante : on sait que l'intégrale est un *opérateur linéaire* donc on peut intervertir les signes $\displaystyle\int$ et $\displaystyle\sum$ à condition que la somme ne comporte qu'un *nombre fini de termes*. Plus précisément, on peut écrire, pour $N \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{N}\left(\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

De plus :

$$S(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N} f_n(x)}_{\text{somme partielle}} + \underbrace{R_N(x)}_{\text{reste}}$$

où $R_N(x) = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)$.

La linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_I S(x)\,\mathrm{d}x &= \int_I \left(\sum_{n=0}^{N} f_n(x) + R_N(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{N}\left(\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) + \int_I R_N(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Montrer que $\displaystyle\int_I S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(x)\right)\mathrm{d}x$ équivaut donc à montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_I R_N(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Pour cela, on est ramené au paragraphe précédent : on procède par encadrement, ou par convergence dominée.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1.3 Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions

Nous donnons le premier théorème fondamental qui permettre d'intervertir les symboles $\int$ et $\sum$ (nous en verrons un autre dans le chapitre sur la convergence uniforme).

Théorème 2 – Théorème d'intégration terme à terme

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est *continue par morceaux* et *intégrable* sur l'intervalle I.

(ii) La série de fonctions $\sum f_n$ *converge simplement* sur I et la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est *continue par morceaux* sur I.

(iii) La série numérique $\sum_{n\geq 0} \left(\int_I |f_n(t)| \, \mathrm{d}t \right)$ converge.

Alors :

1. La fonction S est intégrable sur I.
2. On peut intervetir les signes $\int$ et $\sum$:

$$\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

✎ ***Exemple.*** Établir l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

✎ ***Exemple.*** Établir l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2 Intégrales à paramètre

Dans ce paragraphe, I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

On se donne une fonction

$$\begin{array}{rcl} f : I \times J & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$$

Lorsque cela a un sens, on pose $F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$. Une telle fonction est appelée *intégrale à paramètre*.

Pour déterminer l'ensemble de définition de F, il faut trouver les $x \in I$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Pour étudier la continuité et la dérivabilité de F, on dispose des théorèmes suivants, conséquences du théorème de convergence dominée.

2.1 Continuité d'une fonction définie par une intégrale

Voici le théorème qui permet d'étudier la *continuité* d'une intégrale à paramètre du type $x \longmapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 3 – Continuité d'une intégrale à paramètre

On considère une fonction

$$\begin{array}{rcl} f : I \times J & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$$

et on suppose que :

(i) f est *continue* sur I par rapport à la *première* variable x ie que, pour tout $t \in J$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I ;

(ii) f est *continue par morceaux* sur J par rapport à la *deuxième* variable t ie que, pour tout $x \in I$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;

(iii) **Hypothèse de domination.** Il existe une fonction $\varphi : J \mapsto \mathbb{R}$, *indépendante de* x qui est *continue par morceaux* et *intégrable* sur J telle que :

$$\forall x \in I, \forall t \in J, \quad \left|f(x,t)\right| \leq \varphi(x)$$

Alors :

1. Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est *intégrable* sur J.
2. La fonction

$$\begin{array}{rcl} F : I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est *définie* et *continue* sur I.

✎ ***Exemple.*** Montrer que la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Comme dans le cas du théorème de convergence dominée, si I est un *segment*, on peut prendre pour la fonction ϕ de domination une fonction constante.

Remarque. Les bornes de l'intégrale ne doivent pas dépendre de x. Dans le cas contraire, il faut supprimer cette dépendance, la plupart du temps par changement de variable.

✎ ***Exemple.*** On considère la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

Dans certains cas, on ne trouve pas de domination de f sur tout l'intervalle I. Dans ce cas, on peut chercher des *dominations locales*. On a alors une *version localisée* du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

Théorème 4 – Version localisée du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre

On considère une fonction

$$\begin{array}{rcl} f : I \times J & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$$

et on suppose que :

(i) f est *continue* sur I par rapport à la *première* variable x ie que, pour tout $t \in J$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I ;

(ii) f est *continue par morceaux* sur J par rapport à la *deuxième* variable t ie que, pour tout $x \in I$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;

(iii) **Hypothèse de domination locale.** Pour tout segment $K = [a,b] \subseteq I$, il existe une fonction $\varphi_K : J \mapsto \mathbb{R}$, *indépendante de* x qui est *continue par morceaux* et *intégrable* sur J telle que :

$$\forall x \in [a,b], \forall t \in J, \quad \left|f(x,t)\right| \leq \varphi_K(x)$$

Alors :

1. Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est *intégrable* sur J.
2. La fonction

$$\begin{array}{rcl} F : I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est *définie* et *continue* sur I.

On remarque que la conclusion est exactement la même que pour la version non localisée.

✎ ***Exemple.*** On considère la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que F est définie et continue sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2.2 Dérivation d'une fonction définie par une intégrale

Théorème 5 – Dérivabilité d'une intégrale à paramètre

On considère une fonction

$$\begin{array}{rcl} f : I \times J & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$$

et on suppose que :

(i) f est *de classe* C^1 sur I par rapport à la *première* variable x ie que, pour tout $t \in J$, $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur I ;

(ii) f est *continue par morceaux* et *intégrable* sur J par rapport à la *deuxième* variable t ie que, pour tout $x \in I$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;

(iii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est *continue par morceaux* sur J par rapport à la *deuxième* variable t ie que,

pour tout $x \in I$, $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;

(iv) **Hypothèse de domination.** Il existe une fonction $\varphi : J \mapsto \mathbb{R}$, *indépendante de* x qui est *continue par morceaux* et *intégrable* sur J telle que :

$$\forall x \in I, \forall t \in J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(x)$$

Alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} F : I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est *définie* et *de classe* C^1 sur I et :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

⚠ Le nom du théorème est trompeur car on ne montre pas seulement la *dérivabilité*, mais la *classe* C^1, ce qui est une propriété plus forte.

✎ ***Exemple.*** On pose pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et en déduire une expression de $F(x)$.

✎ ***Exemple.*** Un calcul de transformée de Fourier (vue en PC). On considère la fonction définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F vérifie l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{2}x.y$ et en déduire que $F(x) = \sqrt{\pi}e^{-x^2/4}$.

Comme pour le théorème de continuité, on ne peut parfois montrer qu'une *domination locale*. On a aussi une *version localisée* du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

Théorème 6 – Version localisée du théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre

On considère une fonction

$$\begin{array}{rcl} f : I \times J & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$$

et on suppose que :

(i) f est *de classe* C^1 sur I par rapport à la *première* variable x ie que, pour tout $t \in J$, $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur I ;

(ii) f est *continue par morceaux* et *intégrable* sur J par rapport à la *deuxième* variable t ie que, pour tout $x \in I$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;

(iii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est *continue par morceaux* sur J par rapport à la *deuxième* variable t ie que,

pour tout $x \in I$, $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;

(iv) **Hypothèse de domination locale.** Pour tout segment $K = [a,b] \subseteq I$, il existe une fonction $\varphi_K : J \mapsto \mathbb{R}$, *indépendante de* x qui est *continue par morceaux* et *intégrable* sur J telle que :

$$\forall x \in [a,b], \forall t \in J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_K(x)$$

Alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} F : I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est *définie* et *de classe* C^1 sur I et :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

On remarque que la conclusion est exactement la même que pour la version non localisée.

✎ ***Exemple.*** On considère la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(2xt)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F est solution de l'équation différentielle $y' = 2x.y$ et en déduire que $F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}$.

✎ ***Exemple.*** On considère la fonction définie pour $x > -1$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$, et en déduire une expression de $F(x)$.

3 Exercices

Suites et fonctions définies par une intégrale

Exercice 1

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2\sin(t/n)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)^n\,\mathrm{d}t$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+t^n\right)\mathrm{d}t$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
   (b) À l'aide du changement de variables $t = u^{1/n}$, donner un équivalent simple de I_n lorsque $n \to +\infty$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left(1-t^n\right)^{1/n}}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\gamma$ où γ est la constante d'Euler.

Exercice 2

1. En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(x)$, montrer que $\forall n \geq 1$,
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$
2. À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

3. On rappelle que grâce aux intégrales de Wallis,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \,\mathrm{d}x \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$$

Retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 3

À l'aide du théorème d'intégration termes à termes, établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin(xt)}{\mathrm{sh}(t)} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 + x^2}$$

Exercice 4 – Contre-exemple au théorème d'intégration termes à termes

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$: $f_n(t) = 2(n+1)\,t\mathrm{e}^{-(n+1)t^2} - 2nt\mathrm{e}^{-nt^2}$.

1. Montrer que les hypothèses du théorème d'intégration termes à termes sont satisfaites, sauf l'hypothèse que $\sum \int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t$ converge, remplacée par le fait que $\sum \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que la fonction somme, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I mais qu'on ne peut pas permuter les signes $\int$ et $\sum$:

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Exercice 5 – Permutation $\sum$ et $\int$ sans le théorème d'intégration termes à termes

On souhaite établir l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}(t)} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4n+2}{(2n+1)^2 + x^2}$$

1. Vérifier que le théorème d'intégration termes à termes ne s'applique pas.
2. En remarquant que, pour $t > 0$, $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-(2n+1)t}$, établir l'égalité demandée.

Intégrales à paramètre

Exercice 6 – La fonction Gamma d'Euler

La fonction Γ d'Euler est définie par la formule $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de Γ est l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Vérifier que, pour tout $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 7

1. Étudier la dérivabilité de la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Chapitre 7

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Sommaire

1 Éléménts propres 186

1.1 Sous-espaces stables 186

1.2 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme 187

1.3 Propriétés des éléments propres 188

1.4 Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice 189

2 Diagonalisation et trigonalisation 191

2.1 Diagonalisation en dimension finie 191

2.2 Applications de la diagonalisation 194

2.3 Trigonalisation 195

3 Exercices 197

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Le but de ce chapitre est le suivant : étant donné une endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ où $\mathbb{E}$ est de dimension finie, on souhaite trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{E}$ dans laquelle $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}} f$ est la plus « simple « possible (ie qu'elle contient beaucoup de zéros).

1 Éléménts propres

1.1 Sous-espaces stables

Théorème 1 – Endomorphisme induit sur un sous-espace stable

Si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ et $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ stable par u, ie :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{F}, \quad u(\vec{x}) \in \mathbb{F}$$

alors la restriction de u à $\mathbb{F}$, notée $u_{|\mathbb{F}}$, induit un endomorphisme de $\mathbb{F}$.

Examinons le cas où $\mathbb{E}$ est de dimension finie, et u représenté par une matrice.

Théorème 2 – Sous-espaces stables et représentations matricielles

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, où $\mathbb{E}$ de dimension finie et $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base de $\mathbb{E}$.
On note $A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}} u$.

1. A est *triangulaire supérieure* si, et seulement si :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \text{ stable par } u$$

2. Si $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ *stable* par u, et si $\mathscr{B}$ est *adaptée* à $\mathbb{F}$ alors $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ avec A_1 de taille $p = \dim(\mathbb{F})$, ie A est *triangulaire par blocs*.
   Réciproquement si A est *triangulaire par blocs*, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ où A_1 de taille p, alors $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ est *stable* par u.
3. Si $\mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}_p$ où les $\mathbb{F}_i$ sont *stables* par u, et si $\mathscr{B}$ est adaptée à cette somme directe, alors A est *diagonale par blocs* avec des blocs de taille $\dim(\mathbb{F}_k)$:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_p \end{pmatrix}$$

Donnons ensuite un résultat important de sev stables, dans le cas où deux endomorphismes commutent.

Théorème 3 – Stabilité et commutativité

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ tels que $u \circ v = v \circ u$.
Alors $\ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u.

✎ ***Exemple.*** Si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.

1.2 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Considérons $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ où $\mathbb{E}$ de dimension finie, et $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ base de $\mathbb{E}$ telle que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}} u$ soit diagonale :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}} u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On remarque que $u(\overrightarrow{e_k}) = \lambda_k.\overrightarrow{e_k}$ et que la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_k})$ est stable par u.

Ces considérations motivent les définitions suivantes ($\mathbb{E}$ n'est plus supposé de dimension finie).

Définition 4 – Valeurs propres, spectre

Soit un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.

1. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de l'endomorphisme u s'il existe un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ *non-nul* tel que $u(\overrightarrow{x}) = \lambda.\overrightarrow{x}$, c'est à dire si $\ker(u - \lambda.\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) \neq \{0_{\mathbb{E}}\}$.
2. L'ensemble de toutes les valeurs propres de u s'appelle le *spectre* de u et est noté $\mathrm{Sp}\, u$.

Définition 5 – Vecteurs propres, sous-espaces propres

Soit un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.

1. On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ est un *vecteur propre* de l'endomorphisme u si et seulement si :
   - $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0_{\mathbb{E}}}$,
   - il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(\overrightarrow{x}) = \lambda.\overrightarrow{x}$.

   Dans ce cas $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et on dit que $\overrightarrow{x}$ est un *vecteur propre associé à la valeur propre* λ.
2. Pour une valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on définit le *sous-espace propre* associé :

$$E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda.\mathrm{id}_{\mathbb{E}})$$

Remarque. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $E_\lambda(u)$ est donc l'ensemble des vecteurs propres associés à λ, union le vecteur nul de E (qui n'est pas un vecteur propre).

Important. On a donc $\lambda \in \operatorname{Sp} u$ si, et seulement si, $\ker(u - \lambda.\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) \neq \{\overrightarrow{0_{\mathbb{E}}}\}$.

Remarque. En *dimension finie*, λ est une valeur propre de u si, et seulement si, l'endomorphisme $(u - \lambda.\mathrm{id}_{\mathbb{E}})$ n'est pas *bijectif*. C'est faux en *dimension infinie* : λ est valeur propre de u si et seulement si $(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$ n'est pas *injectif*.

✎ ***Exemple.*** Déterminer le spectre de $0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$, de $\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$, et plus généralement des *homothéties* $\lambda.\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.

✎ ***Exemple.*** On considère l'espace $\mathbb{E}$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ l'endomorphisme qui à une fonction f de $\mathbb{E}$ associe la fonction $g = u(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors $\operatorname{Sp}(u) = \emptyset$.

1.3 Propriétés des éléments propres

Théorème 6 – Droites stables et vecteurs propres

Si $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ est un vecteur non-nul, la droite $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{x}\right)$ est stable par u si, et seulement si, $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre de u.

Théorème 7 – Quelques propriétés des valeurs propres

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.

1. u est injectif si, et seulement si, $0 \notin \operatorname{Sp}(u)$.
   Donc si $\mathbb{E}$ est de dimension *finie* : u est bijectif si, et seulement si, $0 \notin \operatorname{Sp}(u)$.
   De plus $E_0(u) = \ker(u)$.
2. Si u est bijectif, les valeurs propres de u^{-1} sont les inverses des valeurs propres de u, ie :
   $$\operatorname{Sp}\left(u^{-1}\right) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \Big/ \lambda \in \operatorname{Sp}(u) \right\}$$
3. Si $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ est valeur propre de u, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, λ^n est valeur propre de u^n, ie :
   $$\left\{\lambda^n / \lambda \in \operatorname{Sp}(u)\right\} \subseteq \operatorname{Sp}\left(u^n\right)$$

Deux endomorphismes qui commutent vérifient la propriété suivante.

Théorème 8 – Sous-espaces propres d'endomorphismes qui commutent

Soient $(u, v) \in \mathscr{L}(\mathbb{E})^2$ deux endomorphismes qui commutent :

$$u \circ v = v \circ u$$

Alors les sous-espaces propres de v sont stables par u, ie :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(v), \forall x \in E_\lambda(v), \quad u(x) \in E_\lambda(v)$$

Donnons maintenant quelques propriétés générales des sous-espaces propres.

Théorème 9 – Famille de $\overrightarrow{\text{vp}}$ associés à des vp distinctes

Soient $\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_p}$ des vecteurs propres d'un endomorphisme u, associés à des valeurs propres *distinctes* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.
Alors la famille $\left(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_p}\right)$ est libre.

✎ ***Exemple.*** La famille $\left(x \longmapsto \cos(nx)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{E} = C^2\left([0,2\pi];\mathbb{R}\right)$.

Théorème 10 – Les sous-espaces propres sont en somme directe

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ et une famille finie $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ de valeurs propres de u *deux à deux distinctes.*
Alors la somme des sous-espaces propres associée est *directe* :

$$E_{\lambda_1}(u) + \cdots + E_{\lambda_p}(u) = E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u)$$

Ce résultat a une conséquence importante en dimension finie.

Corollaire 11 – Spectre d'un endomorphisme en dimension finie

On suppose que $\mathbb{E}$ est de *dimension finie.*
Alors $\mathrm{Sp}(u)$ est un *ensemble fini* et :

$$\mathrm{Card}\left(\mathrm{Sp}(u)\right) \leq \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right) \leq \dim(\mathbb{E})$$

⚠ ATTENTION : ce résultat est faux en dimension *infinie.* Considérer le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonction dérivables sur $\mathbb{R}$ et l'endomorphisme D de dérivation. Alors $\mathrm{Sp}(D) = \mathbb{R}$.

1.4 Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice

Définition 12 – Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice

Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est *valeur propre* de la matrice A si, et seulement si, il existe une matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que :

- X est *non-nulle* ;
- $AX = \lambda.X$.

On appelle *spectre* de la matrice A et l'on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

Lien avec les endomorphismes. Si $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ tel que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u) = A$, les valeurs propres de A sont les valeurs propres de u : $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u)$.
Les vecteurs propres de A sont les matrices colonnes des vecteurs propres de l'endomorphisme u dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque. Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a donc deux notions de spectre pour une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: le spectre réel noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et le spectre complexe noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Ils vérifient :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subseteq \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{R} = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$$

Important. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre complexe de A alors $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de A. De plus si on connaît une base de $E_\lambda(A)$ alors le conjuguée de cette base est une base de $E_{\overline{\lambda}}(A)$; en particulier $E_\lambda(A)$ et $E_{\overline{\lambda}}(A)$ sont de même dimension.

Donnons le résultat principal sur le nombre de valeurs propres d'une matrice.

Théorème 13 – Nombre de valeurs propres d'une matrice

1. Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres.
2. Tout matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre complexe.
   En particulier toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur propre complexe.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on a donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$.

⚠ Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on peut avoir $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$. Considérer par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

✎ ***Exemple.*** Montrer toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

Donnons maintenant le résultat qui permet de déterminer en pratique les éléments propres d'une matrice.

Théorème 14 – Caractérisation des valeurs propres

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence des propositions :
(i) $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$
(ii) $\mathrm{Ker}(A - \lambda.I_n) \neq \{0_{n,1}\}$
(iii) $\dim\left[\mathrm{Ker}(A - \lambda.I_n)\right] \geq 1$
(iv) $A - \lambda.I_n$ n'est pas inversible
(v) $\mathrm{rg}(A - \lambda.I_n) < n$
(vi) $\det(\lambda.I_n - A) \neq 0_{\mathbb{K}}$

En pratique c'est le point (vi) qui est utilisé pour trouver le spectre d'une matrice. En dimension finie, on pourra aussi l'utiliser pour déterminer le spectre d'un endomorphisme, en passant par une de ses représentations matricielles.

Notation. On notera $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda.I_n - A)$.

✎ ***Exemple.*** Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x, y, z) = (-y - z, x + z, -x + y)$. Déterminer $\mathrm{Sp}(f)$.

Corollaire 15 – Cas particulier de la valeur propre 0

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$0 \text{ est valeur propre de } A \iff A \text{ n'est pas inversible}$$

et dans ce cas $\mathbb{E}_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$.

On en déduit le résultat très important suivant, qui permet de déterminer le spectre d'une matrice triangulaire sans aucun calcul.

Corollaire 16 – Spectre d'une matrice triangulaire

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire, alors son spectre coïncide avec ses coefficients diagonaux.

✎ ***Exemple.*** Déterminer le spectre de l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}_n[X]$.

Un dernier résultat sur le spectre de deux matrices semblables.

Théorème 17 – Spectre de deux matrices semblables

Deux matrices semblables ont le même spectre.

⚠ ATTENTION : par contre elles n'ont pas les mêmes vecteurs propres associés (et donc n'ont pas non plus les mêmes sous-espaces propres associés).

✎ ***Exemple.*** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

2 Diagonalisation et trigonalisation

Tous les espaces vectoriels de ce paragraphe sont de *dimension finie*.

2.1 Diagonalisation en dimension finie

Définition 18 – Endomorphisme diagonalisable

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ est *diagonalisable* si, et seulement si, il existe une base de $\mathbb{E}$ formée de vecteurs propres de u.

La matrice de u dans cette base est alors *diagonale*, et les coefficients diagonaux sont les *valeurs propres* de u.

Remarque. Si u est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $u = \lambda.\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.

Définition 19 – Matrice diagonalisable

Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale :

$$\exists P \in Gl_n(\mathbb{K}),\ \exists D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad A = PDP^{-1}$$

Remarque. Si A est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $A = \lambda.I_n$.

⚠ Cette propriété est fausse si A n'est pas diagonalisable. Considérer par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 20 – Diagonalisabilité et représentations matricielles

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, $\mathbf{e}$ une base de $\mathbb{E}$ et $A = \underset{\mathbf{e}}{\mathrm{Mat}}(u)$.
Alors l'endomorphisme u est *diagonalisable* si, et seulement si, la matrice A est *diagonalisable*.

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 21 – Caractérisation matricielle des endomorphismes diagonalisables

Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ est *diagonalisable* si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de u dans cette base soit *diagonale* :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u (une même valeur propre peut apparaître plusieurs fois).

À partir des résultats du paragraphe précédent, nous sommes en mesure de donner une première condition nécessaire et suffisante (CNS) de diagonalisabilité.

Théorème 22 – Une première CNS de diagonalisabilité

Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ est *diagonalisable* si, et seulement si :

$$\mathbb{E} = E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u)$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres de u.

Cette condition est équivalente à la condition plus simple suivante :

$$\dim(\mathbb{E}) = \dim\left(E_{\lambda_1}(u)\right) + \cdots + \dim\left(E_{\lambda_p}(u)\right)$$

On a le même résultat pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Important. Dans ce cas une base de vecteurs propres de u est obtenue en juxtaposant des bases de chaque sous-espace propre.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, alors elle est semblable à une matrice diagonale dont la diagonale est constituée du spectre de A, *chaque valeur propre étant répétée autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé.*

De plus, si $\mathscr{C}$ est une base de vecteurs propres de l'endomorphisme u et $P = P_{\mathscr{B}\mapsto\mathscr{C}}$ est la matrice des vecteurs propres de u dans la base $\mathscr{V}$, alors $A = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale formée des valeurs propres de u.

Diagonaliser une matrice A consiste à calculer explicitement une matrice diagonale D et une matrice inversible P, telle que $A = PDP^{-1}$. En général on ne demande pas le calcul explicite de P^{-1}.

Remarque. Avec la formule du rang, $\dim E_\lambda(u) = n - \mathrm{rg}(u - \lambda.I_n)$. Il n'est donc pas nécessaire de calculer explicitement $E_\lambda(u)$, il suffit de calculer le rang de la matrice $(A - \lambda.I_n)$ pour vérifier la CNS de diagonalisabilité. Le calcul explicite de $E_\lambda(u)$ est nécessaire lorsqu'on veut déterminer la matrice de passage P.

✎ ***Exemple.*** $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 4\}$ et n'est pas diagonalisable.

✎ ***Exemple.*** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$ et est diagonalisable.

✎ ***Exemple.*** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ un endomorphisme nilpotent. Si u est diagonalisable alors $u = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$.

✎ ***Exemple.*** On note J la matrice d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer qu'elle est diagonalisable.

Le cas particulier suivant est très important car il simplifie beaucoup les choses.

Corollaire 23 – Une condition suffisante de diagonalisabilité

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ où E est de dimension n.
Si l'endomorphisme u possède n valeurs propres *distinctes*, alors il est *diagonalisable* et ses sous-espaces propres sont des *droites vectorielles*.
On a le même résultat pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

✎ ***Exemple.*** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** Une matrice triangulaire de la forme $\begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$ est toujours diagonalisable.

2.2 Applications de la diagonalisation

2.2.1 Calcul des puissances d'une matrice

Si A est une matrice *diagonalisable*, on dispose d'une méthode pour calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On détermine une matrice inversible $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = PDP^{-1} \quad \text{où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PD^kP^{-1} \quad \text{où } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Remarque. On peut également trouver *l'inverse* de A lorsqu'on a déjà calculé les matrices P et D. En effet, A est inversible si et seulement si $\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n \neq 0$ et alors

$$A^{-1} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

✎ ***Exemple.*** Calculer les puissances de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

2.2.2 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Considérons p suites $(u_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, \dots (u_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrences *d'ordre* 1 *simultanées* :

- $(u_0^{(1)}, \dots, u_0^{(p)}) \in \mathbb{K}^p$ donnés ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1}^{(1)} & = a_{11}.u_n^{(1)} + \cdots + a_{1p}.u_n^{(p)} \\ \vdots & \\ u_{n+1}^{(p)} & = a_{p1}.u^{(1)}n + \cdots + a_{pp}.u_n^{(p)} \end{cases}$$

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(p)} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $A = ((a_{ij})) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, on a

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_0^{(1)} \\ \vdots \\ u_0^{(p)} \end{pmatrix} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$$

Le problème revient donc à calculer les puissances de la matrice A, ce qu'on sait faire lorsque A est diagonalisable.

Un autre cas d'application est le suivant. Considérons $(u_0, \dots, u_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ fixés et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une relation de récurrence d'ordre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} + a_{p-1}.u_{n+p-1} + a_{p-2}.u_{n+p-2} + \cdots + a_0.u_n = 0$$

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, la relation de récurrence donne $X_{n+1} = AX_n$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \text{\Large 0} \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{p-2} & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$$

Le problème revient donc à calculer A^n.

✎ ***Exemple.*** Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = -u_n - 2v_n \end{cases}$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

✎ ***Exemple.*** Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 4$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 2u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n = 0$$

2.3 Trigonalisation

La trigonalisation est une notion moins restrictive que la diagonalisation.

Définition 24 – Endomorphisme trigonalisable

Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ est dit trigonalisable lorsqu'il existe une base de $\mathbb{E}$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
Une telle base est dite *base de trigonalisation* de u.

On peut remarquer que si la matrice de u est triangulaire supérieure dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, alors sa matrice dans la base $(\overrightarrow{e_n}, \dots, \overrightarrow{e_1})$ est triangulaire inférieure. Toute matrices triangulaire inférieure est donc semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Un endomorphisme *diagonalisable* est à fortiori *trigonalisable* (puisqu'une matrice diagonale est un cas particulier de matrice triangulaire supérieure).

La diagonale de la matrice triangulaire représentant de u coïncide avec le spectre de u.

Définition 25 – Matrice trigonalisable

Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\exists P \in Gl_n(\mathbb{K}),\ \exists T \in T_n^+(\mathbb{K}), \quad A = PTP^{-1}$$

Une matrice diagonalisable est à fortiori trigonalisable.

La diagonale de la matrice triangulaire semblable à A coïncide avec le spectre de A.

Théorème 26 – Trigonalisabilité et représentations matricielles

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{E}$ et $A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$.
Alors l'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A est trigonalisable.

En pratique pour trouver une base $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ de trigonalisation il faut, et il suffit que, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k})$ est stable par u.

En particulier $\overrightarrow{e_1}$ doit être un vecteur propre de u. Pour les autres vecteurs, la méthode sera donnée dans l'énoncé...

✎ ***Exemple.*** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3 Exercices

Éléments propres

Exercice 1 – Calculs d'éléments propres en dimension infinie

Déterminer les éléments propres des endomorphismes $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ suivants.

1. $\mathbb{E} = \mathbb{K}[X]$ et $\varphi(P) = X.P'(X)$.
2. $\mathbb{E} = \mathbb{K}[X]$ et $\varphi(P) = X.P(X)$.
3. $\mathbb{E} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\varphi(f) = f'$.
4. $\mathbb{E} = \ell^\infty(\mathbb{R})$ (suites réelles bornées) et $\varphi\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 – Localisation des valeurs propres de Gershgörin

On considère une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. **Hadamard :** On suppose que A est à *diagonale dominante* :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$
Montrer que la matrice A est inversible.
2. **(Gerschgörin : Localisation des valeurs propres d'une matrice.** En déduire que le spectre (complexe) d'une matrice est inclus dans une union de disques :
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{1\leq i\leq n} D(a_{ii}, \rho_i) \quad \text{où } \rho_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

Exercice 3 – Matrices stochastiques

On considère une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *stochastique* : tous ses coefficients sont des réels ≥ 0 et
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. On définit sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ la norme $\|X\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$.
Montrer que $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.
3. En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.
4. En utilisant la localisation des valeurs propres de Gerschgörin, montrer que si tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs, alors 1 est la seule valeur propre de A de module 1.

Exercice 4 – $\mathrm{Sp}(f \circ g)$ et $\mathrm{Sp}(g \circ f)$

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(f, g) \in \mathscr{L}(\mathbb{E})^2$.

1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.
2. Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.
3. On choisit $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$, $f(P) = P'$ et $g(P) = Q$, où Q est la primitive de P nulle en 0. Calculer $\ker(f \circ g)$ et $\ker(g \circ f)$.

Exercice 5 – Matrices de trace nulle

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de trace nulle. On souhaite montrer par récurrence sur n que M est semblable à une matrice de diagonale nulle.

1. Établir la propriété dans le cas $n = 1$.

2. On suppose la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $M \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ de trace nulle.
   (a) Si M est une homothétie vérifier que la propriété est vraie.
   (b) Si M n'est pas une homothétie, montrer que M est semblable à une matrice de la forme :
   $$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & & \cdots & * \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & N & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$
   où $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   (c) Conclure.

Diagonalisabilité

Exercice 6 – Diagonalisabilité via les éléments propres

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$? Si oui, les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 – Premier exemple d'équation matricielle

Soient $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. L'équation $X^{11} = A$ a-t-elle une solution $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 8 – Diagonalisabilité via une représentation matricielle

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & (X-1)P' - XP'' \end{array}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, et déterminer sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. u est-il diagonalisable ?

Exercice 9 – Puissances de matrices diagonalisables

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Étudier la convergence de la suite $\left(A^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 – Diagonalisation simultanée dans le cas cyclique

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n[\mathbb{K})$ qui commutent. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} sont diagonales.

Exercice 11 – Application de la codiagonalisabilité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
2. Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ vérifiant $M^2 = A$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
3. Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ vérifiant $M^3 + I_3 = A$.

Chapitre 8

Suites de fonctions

Sommaire

1 Convergence simple, uniforme d'une suite de fonctions 202

1.1 Convergence simple sur un intervalle 202

1.2 Convergence uniforme sur un intervalle 205

1.3 Norme de la convergence uniforme 207

2 Propriétés de la fonction limite 209

3 Interversion limite-intégrale 212

3.1 Intégration sur un segment et convergence uniforme 212

4 Dérivation et convergence uniforme 213

5 Exercices 215

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $|.|$ désigne indifféremment la valeur absolue ou le module.

1 Convergence simple, uniforme d'une suite de fonctions

On désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.1 Convergence simple sur un intervalle

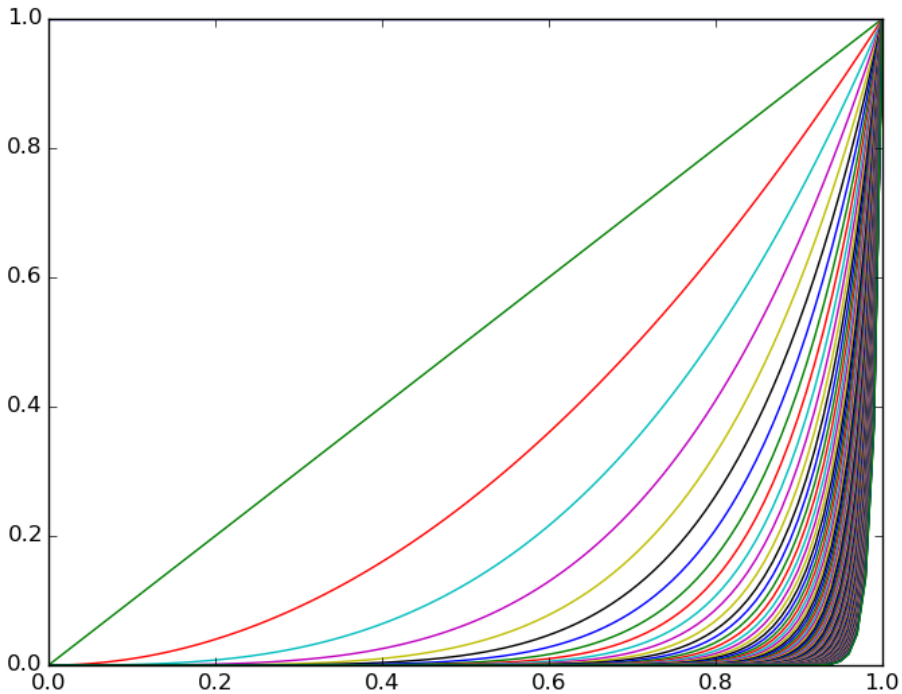
Définition 1 – Suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$

On appelle suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$ toute suite (f_n) d'éléments de $\mathbb{K}^I$.

On rappelle que $\mathbb{K}^I$ désigne l'ensemble des applications de $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.

La suite peut ne pas être définie à partir du rang 0 ; cela ne posera pas de problème dans les notions que nous définirons.

✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(t) = t^n$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$.



Définition 2 – Convergence simple d'une suite de fonctions

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I vers $\mathbb{K}$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I vers une fonction $f : I \mapsto \mathbb{K}$ si $\forall x \in I$, la suite numérique $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans $\mathbb{K}$.
On le note $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ sur I.

On se ramène donc à l'étude d'une suite de nombres réels/complexes. Il est important de préciser l'intervalle sur lequel a lieu la convergence.

Pour étudier la convergence simple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un intervalle I :

- fixer $x \in I$.
- Étudier la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Noter $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$
- On définit ainsi une fonction $f : I \mapsto \mathbb{K}$, et $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$.

⚠ Prendre garde aux variables n et x : si on fixe x, $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numériques ; si on fixe n, f_n est une fonction numérique.

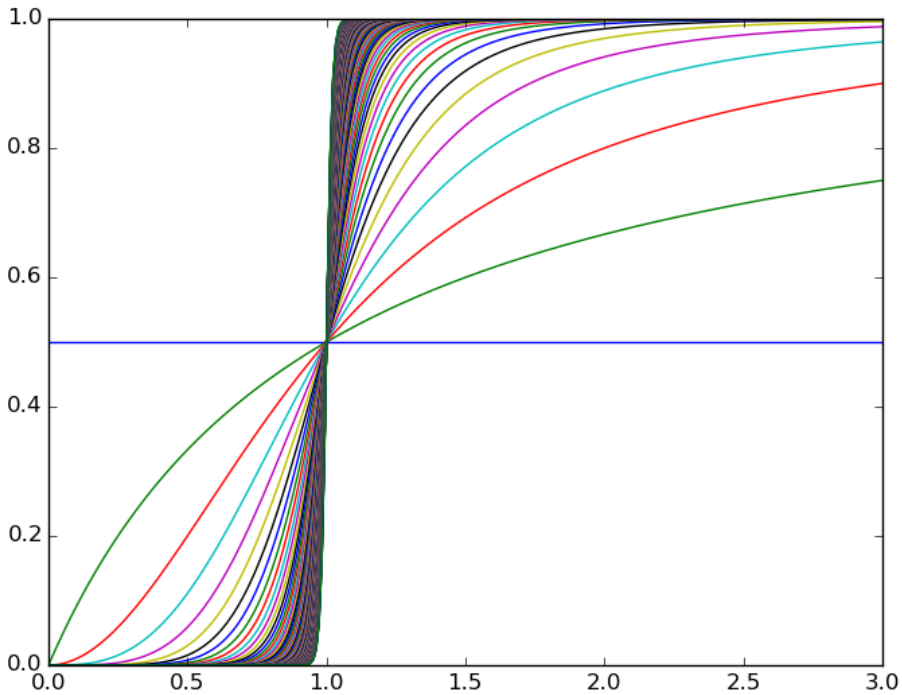
✎ ***Exemple.*** Reprenons l'exemple précédent : $f_n(x) = x^n$. (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers :

$$\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

⚠ On peut déjà remarquer que la fonction limite n'est pas continue, bien que toutes les fonctions f_n le sont.

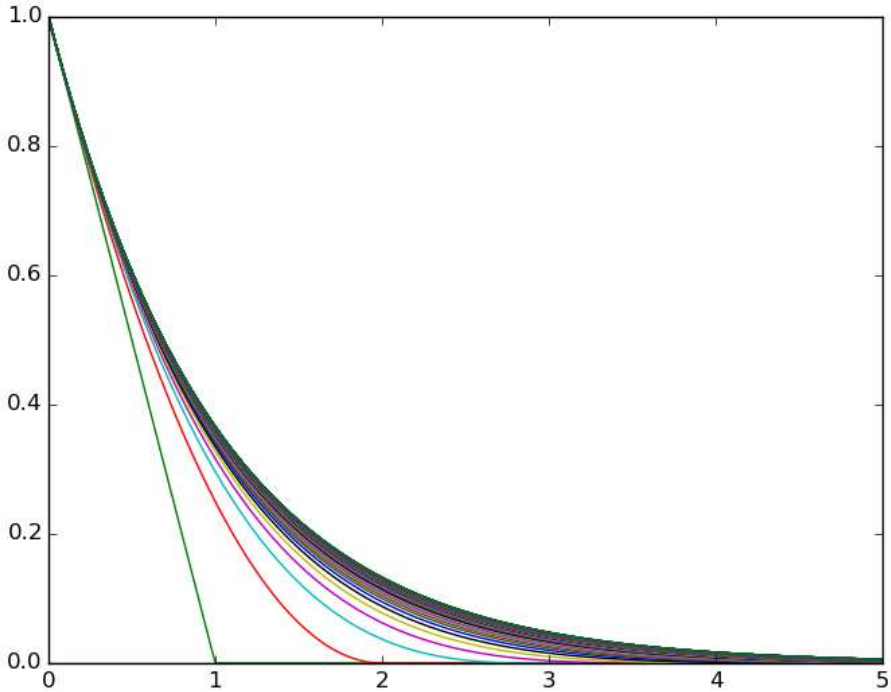
✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$. (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases} \end{array}$$

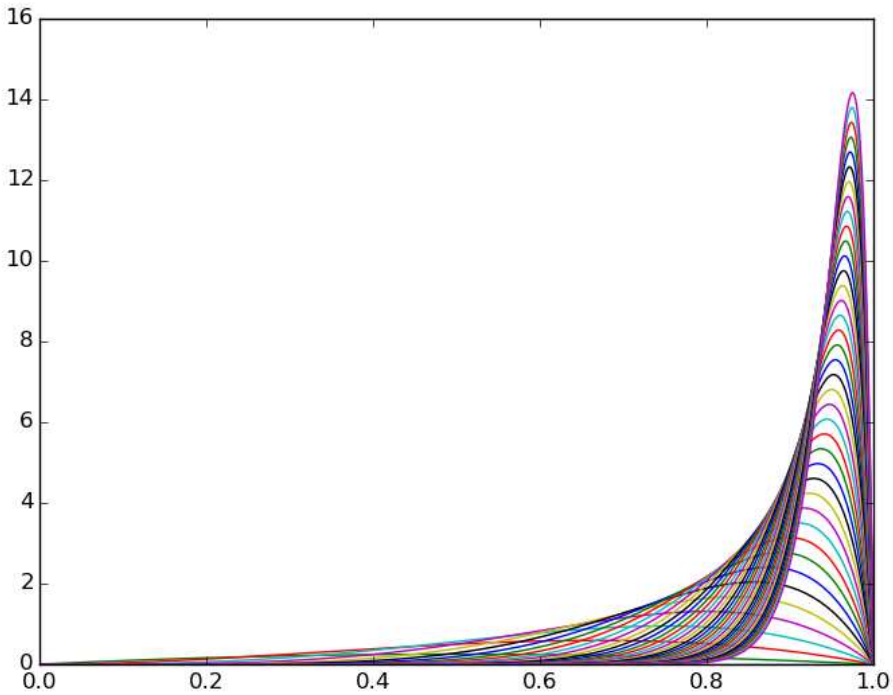


✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x < n \\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$. (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-x} \end{array}$$



✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)$. (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.



Mais $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

⚠ On voit sur cet exemple que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x.$

Pour s'assurer de bonnes propriétés de la fonction limite, on a besoin d'une notion de convergence « plus forte ».

1.2 Convergence uniforme sur un intervalle

Définition 3 – Convergence uniforme

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I vers $\mathbb{K}$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur I* vers une fonction $f : I \mapsto \mathbb{K}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon$$

On le note $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$.

Quelle est la différence avec la convergence simple ? La définition de la convergence simple avec des quantificateurs s'écrit ainsi :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon$$

Le « $\forall x \in I$ » n'est pas à la même place. Pour la convergence simple, le rang N est susceptible de dépendre de $x \in I$, alors que pour la convergence uniforme, le rang N doit convenir pour tout $x \in I$ (il ne dépend donc pas de x).

Intuitivement, la convergence simple des fonctions correspond à une convergence « point par point », et la convergence uniforme à une convergence « globale ».

Pour bien voir la non dépendance en x on peut écrire la définition ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad \sup_{x \in I} \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon$$

Dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, la convergence uniforme signifie que pour toute bande délimitée par $f - \varepsilon$ et $f + \varepsilon$, à partir d'un certain rang, tous les graphes des fonctions f_n se trouvent dans cette bande.

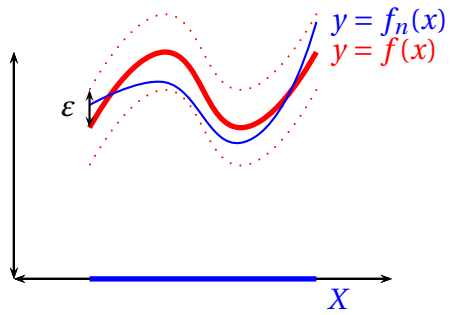


FIGURE 8.1 – Convergence uniforme

Donnons le lien avec la convergence simple.

Théorème 4 – CV uniforme $\Longrightarrow$ CV simple

Si $f_n \underset{n \to +\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur I, alors $f_n \underset{n \to +\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ sur I.
En particulier la fonction limite obtenue par convergence uniforme est unique.

C'est pour cette raison qu'on commencera toujours par étudier la convergence simple : on déterminera ainsi la fonction limite f.

On montre aussi facilement le résultat suivant.

Théorème 5 – Convergence uniforme sur un sous-intervalle

Si $f_n \underset{n \to +\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur I, si J sous-intervalle de I, alors $f_n \underset{n \to +\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur J.

En pratique, on procède souvent par « majoration uniforme » pour montrer que $f_n \underset{n \to +\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$.

Théorème 6 – Majoration uniforme

Si $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ sur I, et s'il existe une suite de réels $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

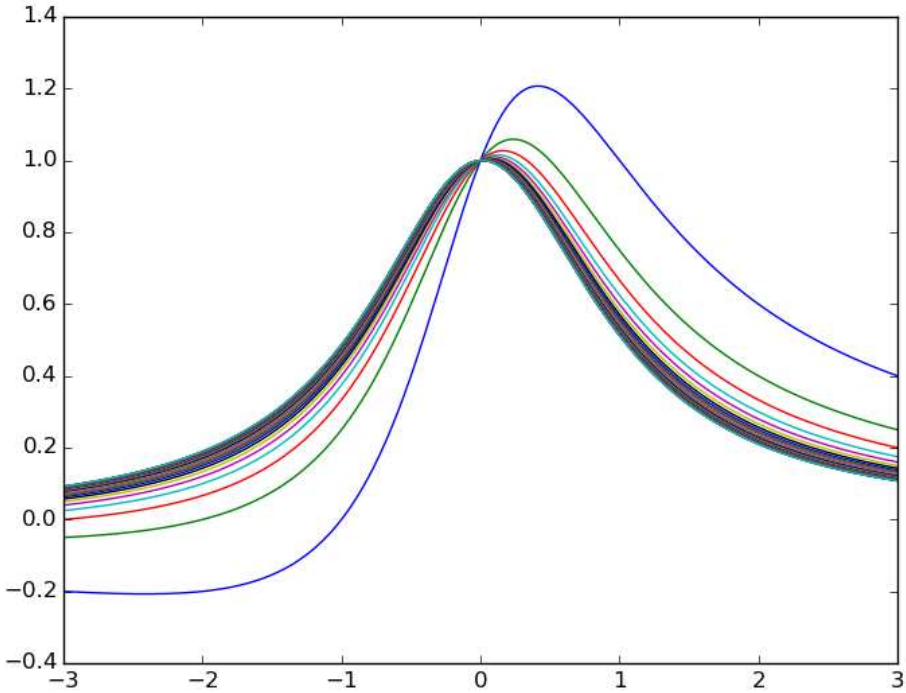
$$\forall x \in I, \quad \left|f_n(x) - f - x)\right| \leq \alpha_n$$

et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors on peut dire que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur I.

✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x+n}{n(1+x^2)}$. (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

(penser à l'inégalité $1 + x^2 \geq 2|x|$).



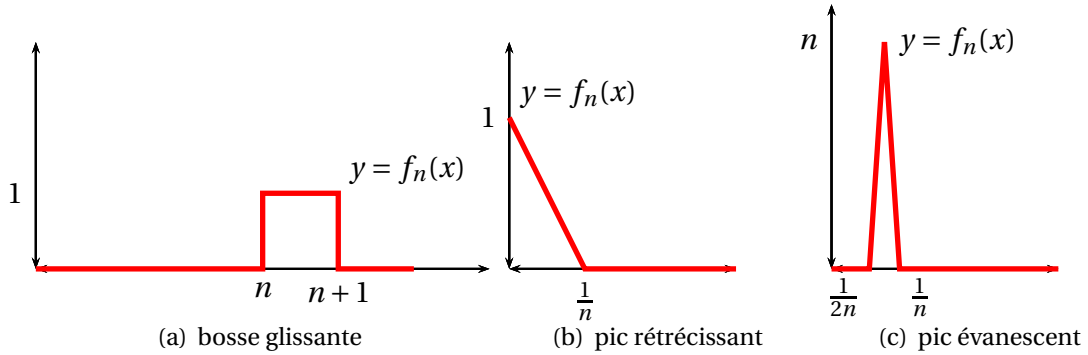
⚠ On peut avoir la convergence simple mais pas la convergence uniforme.
Voici trois exemples « graphiques »de suites de fonctions qui convergent simplement mais pas uniformément :

1.3 Norme de la convergence uniforme

On note $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur lequel on peut définir la *norme de la convergence uniforme* :

$$\forall f \in \mathscr{B}(I,\mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

Lorsqu'on travaille sur plusieurs intervalles, $\|f\|_\infty$ est parfois notée $\|f\|_{\infty,I}$.



(a) bosse glissante (b) pic rétrécissant (c) pic évanescent

FIGURE 8.2 – Pas de convergence uniforme

Théorème 7 – Caractérisation de la convergence uniforme avec la norme infinie

On a $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur I si, et seulement si :

1. à partir d'un certain rang, les fonctions $(f_n - f)$ sont bornées.
2. $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$ et f sont *bornées*, alors la convergence uniforme correspond à la convergence dans l'espace vectoriel normé $\mathscr{B}(I, \mathbb{K})$.

Pour étudier la convergence d'une suite de fonctions (f_n), on procède en général ainsi :

- Étudier la convergence simple : fixer $x \in I$ et étudier la limite de la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Définir la fonction limite simple :

$$\begin{array}{rcl} f : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \end{array}$$

- Étudier la convergence uniforme : si la suite de fonctions converge uniformément, ce ne peut être que vers la fonction f.
- Calculer (ou majorer) $\delta_n = \|f_n - f\|_\infty$ et montrer que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour cela, on étudie souvent les variations de la fonction $g_n = f_n - f$.

✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$, on pose $f_n(x) = x^n$. (f_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers :

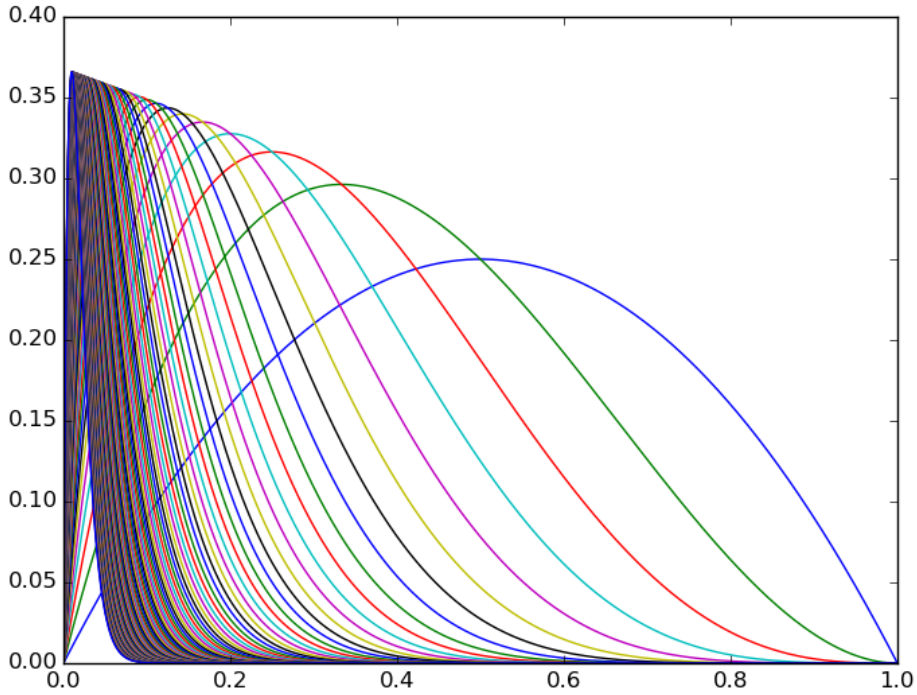
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

Par contre sur $[0,1[$ la convergence n'est pas uniforme. Mais elle l'est sur $[0,a]$ pour tout $0 < a < 1$.

⚠ Retenir que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur $[0,a]$ pour tour $0 < a < 1$, ne donne pas la convergence uniforme sur $[0,1[$.

✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$. (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle. Mais $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, il n'y a donc pas convergence uniforme

sur $[0,1]$.
Par contre, si $0 < a < 1$ et n assez grand (tel que $\dfrac{1}{n+1} \leq a$), alors $\|f_n\|_{\infty,[a,1]} = f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} 0$ sur $[a,1]$ pour tout $0 < a < 1$.



Corollaire 8 – Technique pour démontrer la non convergence uniforme

Si $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ sur I, et si on souhaite prouver que la convergence n'est pas uniforme, il suffit de trouver une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que $f_n(t_n) - f(t_n)$ ne tend pas vers 0, lorsque $n \to +\infty$.
On est ainsi dispensé de l'étude complète de la fonction $f_n - f$ sur I).

✎ ***Exemple.*** si $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$ alors $\forall n \geq 1$, $\dfrac{1}{n} \in [0,1]$ et $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ donc f_n ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2 Propriétés de la fonction limite

Pour la convergence simple, on peut facilement montrer les propriétés suivantes pour la fonction limite.

Théorème 9 – Propriétés de la limite simple d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions convergeant simplement sur I vers f.

1. Si, à partir d'une certain rang, les fonctions f_n sont positives sur I, alors f est

positive sur I.

2. Si, à partir d'une certain rang, les fonctions f_n sont croissantes sur I, alors f est croissante sur I.
3. Si, à partir d'une certain rang, les fonctions f_n sont paires (resp. impaires) sur I, alors f est paire (resp. impaire) sur I.

On a les mêmes résultats avec f négative ou f décroissante. Ces propriétés sont évidemment vraies pour la convergence uniforme.

Théorème 10 – La limite uniforme de fonctions bornées est bornée

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

1. (f_n) converge uniformément vers f sur I.
2. Les fonctions (f_n) sont bornées sur I.

Alors la fonction f est bornée sur I.

⚠ Ce résultat est faux si on suppose uniquement la convergence simple.
Par exemple, la fonction exponentielle n'est pas bornée sur $[0,+\infty[$, et si on définit la suite de fonctions (f_n) par :

$$\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \in [0,n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases} \end{array}$$

Alors ces fonctions sont toutes bornées et la suite (f_n) converge simplement vers exp sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème 11 – La limite uniforme de fonctions continues est continue

Soient une suite de fonctions $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On suppose que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue au point x_0.
2. La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f.

Alors la fonction f est continue au point x_0.

On peut se servir de ce théorème pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.

✎ ***Exemple.*** La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n}{1+x^n} \end{array}$$

ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

⚠ Ce théorème est faux si l'on suppose uniquement la convergence simple, penser au pic rétrécissant ou à la figure suivante.

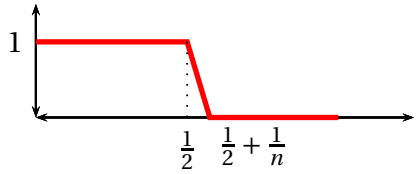


FIGURE 8.3 – La limite simple de fonctions continues peut ne pas être continue

Le théorème de continuité sur un segment stipule que toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est bornée (et les bornes sont atteintes). On peut donc en déduire que $C^0([a,b],\mathbb{K})$ est un *sev fermé* de l'espace vectoriel $\mathscr{B}([a,b],\mathbb{K})$ normé par la norme uniforme $\|.\|_\infty$.

Dans certains cas la fonction limite est continue sur I, bien que la convergence ne soit pas uniforme sur I tout entier. On utilise alors une version « localisée » du théorème.

Définition 12 – Convergence uniforme sur tout segment

Soit une suite de fonctions $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge uniformément sur tout segment* vers la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ si et seulement si pour tout segment $[a,b] \subset I$:

$$\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} \left|f_n(x) - f(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ie que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur $[a,b]$.

Pour montrer que la fonction limite f est continue sur I, on utilise alors le théorème suivant.

Théorème 13 – Version localisée du théorème de continuité de la limite uniforme

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une suite de fonctions $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

— toutes les fonctions f_n sont continues sur I ;

— la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Alors la fonction f est continue sur I.

⚠ La différence est subtile : si $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur tout segment inclus dans I, on ne peut pas dire que la convergence est uniforme sur I, mais que la convergence est simple sur I.
Par contre, si f est continue sur tout segment inclus dans I, alors on peut dire que f est continue sur I.

Ceci vient du fait que la continuité et la convergence simple sont des propriétés « ponctuelles », alors que la convergence uniforme est une propriété « globale ».

✎ ***Exemple.*** Si $I = [0,1[$ et $f_n(x) = x^n$, alors il y a CVU sur tout segment $[a,b] \subset [0,1[$, mais pas CVU sur $[0,1[$.

Terminons par un résultat qui permet d'étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle I.

Théorème 14 – Théorème de double limite

Soit a un point adhérent à I, ie a est point de I ou une des deux bornes de I ($a \in \overline{R}$). On considère une suite de fonctions $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{K}$.
On suppose que :
— $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_n \in \mathbb{K}$.
— La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur I.
Alors :

1. La suite numérique (ℓ_n) converge vers un nombre $\ell \in \mathbb{K}$.
2. $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

On peut donc sous l'hypothèse de convergence uniforme « intervertir »les limites :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right)$$

On peut aussi démontrer une version avec des limites infinies (mais le résultat n'est plus au programme).

✎ ***Exemple.*** Si (f_n) converge uniformément vers f sur I et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

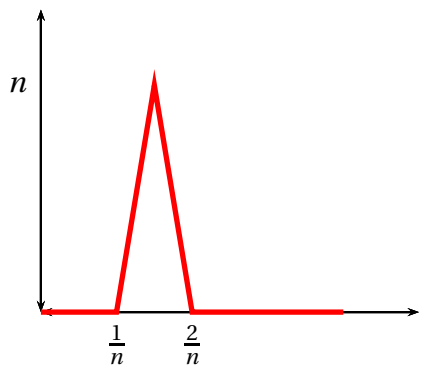
3 Interversion limite-intégrale

3.1 Intégration sur un segment et convergence uniforme

On a souvent à étudier la limite d'une suite d'intégrales. La tentation est grande de dire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x \neq \int_a^b \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x$$

mais en général cette interversion limite-intégrale est fausse, comme le montre l'exemple du pic évanescent :



Sur un segment, l'hypothèse de convergence uniforme suffit à assurer l'interversion limite-intégrale.

Théorème 15 – Interversion limite-intégrale sur un segment

On considère une suite de fonctions $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continues* sur un segment $[a,b]$. On suppose que

— La suite de fonctions (f_n) converge *uniformément* vers une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sur le segment $[a,b]$.

Alors la fonction f est *continue* sur le segment $[a,b]$, et

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sous l'hypothèse de convergence uniforme, on peut donc inverser limite et intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$$

On peut se servir de ce théorème pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.

✎ ***Exemple.*** Montrer de deux manière différentes que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{array}{rcl} f_n : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^2 x^n (1-x) \end{array}$$

ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

⚠ Ce résultat n'est valable que pour l'intégrale sur un *segment*. Considérer par exemple la suite de fonctions $u_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$.

Lorsqu'une des hypothèses « intégrale sur un segment » ou « convergence uniforme » n'est plus vérifiée, il faut utiliser le théorème de convergence dominée, qui ne demande que la *convergence simple*, et n'exige rien sur *'intervalle*.

4 Dérivation et convergence uniforme

Dans ce dernier paragraphe, nous étudions la dérivabilité de la fonction limite, dans le cas de la convergence uniforme.

Théorème 16 – Dérivation et convergence uniforme

On considère une suite d'applications $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^1(I,\mathbb{K})$.
- La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *simplement* vers une fonction $f : I \mapsto \mathbb{K}$.
- La suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge *uniformément* sur I vers une application $g : I \mapsto \mathbb{K}$.

Alors :

1. La fonction f est de classe C^1 sur I
2. $f' = g$.

Souvent on utilise une version « localisée » de ce théorème.

Théorème 17 – Dérivation et convergence uniforme : version localisée

On considère une suite d'applications $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^1(I, \mathbb{K})$.
- La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *simplement* vers une fonction $f : I \mapsto \mathbb{K}$.
- La suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *uniformément* sur tout segment $[a, b] \subset I$ vers une application $g : I \mapsto \mathbb{K}$.

Alors :

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment $[a, b] \subset I$.
2. La fonction f est de classe C^1 sur I
3. $f' = g$.

Remarquer qu'on obtient en plus la convergence uniforme de (f_n) vers f sur tout segment inclus dans I.

On démontre ensuite le théorème suivant qui permet de montrer que la fonction limite est de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 18 – Fonction limite de classe C^k

On considère une suite de fonctions $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^k(I; \mathbb{K})$;
- $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *simplement* vers une application f_i ;
- la suite de fonctions dérivées k-ièmes, $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge *uniformément sur tout segment* vers une application g.

Alors :

1. La fonction f_0, notée f, est de classe C^k sur I ;
2. $f^{(k)} = g$.
3. $\forall i \in [\![0, k]\!]$, la suite de fonction $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f^{(i)}$ sur tout segment de I.

On peut remarquer que $f^{(i)} = f_i$, pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$.

On retiendra qu'il faut vérifier la *convergence simple* des premières dérivées de f_n, et la *convergence uniforme sur tout segment* de la plus haute dérivée pour pouvoir intervertir dérivée et limite :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(k)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}$$

5 Exercices

Convergence simple ou uniforme

Exercice 1 – Étude d'une convergence uniforme

On pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in]0,1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0,1]$.
   On notera u la fonction limite.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) sur $[0,1]$.
   Pour cela on déterminera $x_n \in [0,1]$ tel que $\|u_n - u\|_\infty = |u_n(x_n) - u(x_n)|$.

Exercice 2 – Étude d'une convergence uniforme en fonction d'un paramètre

On considère la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$\begin{array}{rcl} f_n : [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx} \end{array}$$

où $\alpha > 0$ est un réel fixé.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.
   On notera f la fonction limite.
2. Étudier la convergence uniforme de cette suite de fonctions sur $\mathbb{R}^+$.
   Pour cela on déterminera $x_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $\left\|f_n - f\right\|_\infty = |f_n(x_n) - f(x_n)|$.
3. Même question sur $[b,+\infty[$, avec $b > 0$.

Exercice 3 – Étude d'une convergence uniforme

On considère la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{nx}{1+n^2x^2} \end{array}$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   Que peut-on en déduire sur la convergence uniforme de (f_n) ?

Exercice 4 – Étude d'une convergence uniforme

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) donnée par

$$f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$$

2. Établir que $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)$.
   Conclure que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 – Étude d'une convergence uniforme

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x > n$$

Étudier le mode de convergence de (f_n).

Exercice 6 – Suite de fonctions définie par récurrence

On définit la suite de fonctions (f_n) sur $I =]0, +\infty[$ en posant $f_0(x) = x$ et par récurrence :

$$f_{n+1}(x) = \frac{2\sqrt{f_n(x)}}{1 + f_n(x)}$$

1. (a) On définie $g : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = \frac{2\sqrt{t}}{1+t}$.
   Dresser le tableau de variations complet de g et vérifier que, pour tout $t \in [0, 1]$: $g(t) \geq t$.
   (b) En déduire que la suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction constante égale à 1.
2. Soit $[a, b]$ un segment inclus dans I.
   (a) On pose $\alpha = \min\big(g(a), g(b)\big)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|1 - f_{n+1}\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{1+\alpha}\|1 - f_n\|_{\infty,[a,b]}$$

   (b) En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$.
3. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   (b) En déduire que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$?

Propriétés générales de la convergence uniforme

Exercice 7 – Étude de $\lim\limits_{\to+\infty} f_n(x_n)$

On considère une suite de fonctions continues (f_n) définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ une suite de points de I. On suppose que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur I.

1. Montrer que $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
2. Si on suppose uniquement la convergence simple, le résultat est-il vrai ?

Exercice 8 – Convergence uniforme et fonctions composées

On considère une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues qui converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$, ainsi qu'une fonction $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que $f_n \circ \phi \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f \circ \phi$ sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que ϕ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\phi \circ f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} \phi \circ f$ sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que f est bornée. A-t-on $\phi \circ f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} \phi \circ f$ sur $\mathbb{R}$?
4. Si $f_n(x) = x + 1/n$ et $\phi(x) = x^2$, que peut-on dire des suites de fonctions (f_n) et $(\phi \circ f_n)$?
5. Si $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur $\mathbb{R}$ et $\phi_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} \phi$ sur $\mathbb{R}$, a-t-on $f_n \circ \phi_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f \circ \phi$ sur $\mathbb{R}$?

   Si l'on suppose de plus que f est uniformément continue ?

Exercice 9 – Polynômes de Bernstein. Théorème de Weiertrass

Soit f une application continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour n entier naturel non nul, on définit le n-ième polynôme de Bernstein associé à f par :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-x)^{n-k}$$

1. (a) Calculer $B_n(f)$ quand f est la fonction $x \longmapsto 1$, quand f est la fonction $x \longmapsto x$, quand f est la fonction $x \longmapsto x(x-1)$.

   (b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k - nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$$

2. En séparant les entiers k tels que $\left|x-\frac{k}{n}\right| > \alpha$ et les entiers k tels que $\left|x-\frac{k}{n}\right| \leq \alpha$ ($\alpha > 0$ donné), montrer que la suite de polynômes $\left(B_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Montrer le théorème de Weierstrass : si f est une application continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes.
4. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,t^k\,\mathrm{d}t = 0$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 10 – Convergence uniforme d'une suite de polynômes

Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est polynomiale.

Interversion limite-intégrale

Exercice 11 – Normes sur l'espace des fonctions continues sur un segment

On considère une une suite de fonctions f_n continues sur un segment $[a,b]$ et une fonction continue $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$.

On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge en moyenne* vers la fonction continue f si et seulement si

$$\|f_n - f\|_1 = \int_a^b \left|f_n(t) - f(t)\right| \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On dit qu'elle *converge en moyenne quadratique* vers f si et seulement si

$$\|f_n - f\|_2 = \sqrt{\int_a^b \left|f_n(t) - f(t)\right|^2 \mathrm{d}t} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

1. Montrer que :
$$\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2 \leq (b-a)\left\|f\right\|_\infty$$
et en déduire que pour une suite de fonctions (f_n) continues sur un segment :
$$\begin{aligned} & f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \text{ uniformément} \\ \Longrightarrow\ & f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \text{ en moyenne quadratique} \\ \Longrightarrow\ & f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \text{ en moyenne} \end{aligned}$$

2. Vérifier sur l'exemple :
$$\begin{array}{rcl} f_n : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$
qu'il se peut que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique ou en moyenne vers f, mais que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f.

Exercice 12 – Limite d'intégrales

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite sur $[0,1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer
$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$
et la limite de I_n lorsque $n \to +\infty$.
3. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
4. Donner une preuve directe de ce résultat.

Exercice 13 – Limite de primitives

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par
$$\forall x \in [0,+\infty,[, \quad f_n(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^n}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
2. On pose : $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$. Sans démonstration supplémentaire, en déduire un domaine de convergence uniforme de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Calculer $F_n(0)$ et montrer que F_n admet une limite finie en $+\infty$. Tracer le tableau de variations des fonctions F_n.
   (c) En déduire la convergence uniforme de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 14 – Produit de convolution

On considère la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le -\frac{1}{n} \\ n^2\left(x+\frac{1}{n}\right) & \text{si } -\frac{1}{n} < x \le 0 \\ n^2\left(-x+\frac{1}{n}\right) & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \ge \frac{1}{n} \end{cases}$$

On pose alors

$$f \star h_n(x) = \int_{-1}^{1} h_n(t) f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

1. Écrire $f \star h_n(x) - f(x)$ comme une intégrale.
2. On suppose que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, majorer $f \star h_n(x) - f(x)$. En déduire que $(f \star h_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$, montrer que $(f \star h_n)_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.
4. On suppose que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, montrer que $(f \star h_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité de la fonction limite

Exercice 15 – Non dérivabilité de la fonction limite

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$$

Montrer que chaque f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 16 – Utilisation du théorème de dérivabilité de la fonction limite

soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.
2. Étudier la convergence de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[-1,1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1,1]$ par

$$g_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$$

   Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

Chapitre 9

Polynômes d'endomorphismes et application à la réduction

Sommaire

1 Polynôme caractéristique 222

1.1 Propriétés élémentaires 222

1.2 Lien avec les valeurs propres 224

1.3 Rappels sur les polynômes 225

1.4 Lien avec la dimension des sous-espaces propres 226

1.5 Lien avec la diagonalisation 227

1.6 Lien avec la trigonalisation 228

1.7 Conséquences de la trigonalisation 229

2 Application des polynômes annulateurs à la réduction 230

2.1 Premières propriétés des polynômes annulateurs 230

2.2 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité 230

2.3 Restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable231

2.4 Théorème de Cayley-Hamilton 232

3 Exercices 233

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On rappelle que si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, alors :

$$P(u) = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 u + \cdots + a_k u^k$$

L'ensemble des polynômes de l'endomorphisme u est noté $\mathbb{K}[u]$:

$$\mathbb{K}[u] = \left\{P(u) \big/ P \in \mathbb{K}[X]\right\}$$

Noter que $P(u)$ commute avec u, et on sait donc que $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par u. Par exemple les sous-espaces propres $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda.\mathrm{id}_{\mathbb{E}})$, avec $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, sont stables par u.

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un *polynôme annulateur* de u lorsque $P(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$.

On définit de même les polynômes de matrice carrée.

Un endomorphisme et sa matrice représentative dans une base ont les mêmes polynômes annulateurs. En particulier, deux matrices semblables ont les mêmes polynômes annulateurs.

✎ ***Exemple.*** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est annulée par le polynôme $X^2 - (a+d)X + ad - bc$.

✎ ***Exemple.*** Si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors :

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

donc $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ est annulateur de D.

1 Polynôme caractéristique

1.1 Propriétés élémentaires

Pour le calcul du spectre en dimension finie, l'outil fondamental est le polynôme caractéristique.

Définition 1 – Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme caractéristique* de A, le polynôme

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

✎ ***Exemple.*** Pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$,

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad-bc) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$$

✎ ***Exemple.*** **Matrice triangulaire.** Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$.

✎ ***Exemple.*** **Matrice triangulaire par blocs.** Si $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, alors $\chi_M(X) = \chi_A(X)\chi_B(X)$.

✎ ***Exemple.*** Si $A \in Gl_n(\mathbb{K}) : \forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \chi_{A^{-1}}(t) = \dfrac{(-t)^n}{\det(A)} \chi_A\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Comme son nom l'indique, le polynôme caractéristique est un polynôme, mais c'est loin d'être évident. La démonstration se fait en deux étapes.

Lemme 2 – $x \longmapsto \det(x.A + B)$ est une fonction polynôme

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \det(x.A+B) \end{array}$$

est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 3 – χ_A est un polynôme de degré n

Le polynôme caractéristique χ_A d'une matrice A carrée d'ordre n, est un *polynôme, unitaire* et *de degré égal à n*.

⚠ Dans certains ouvrages (notamment ceux portant sur les anciens programmes), le polynôme caractéristique est défini comme étant $\det(A - XI_n) = (-1)^n \chi_A(X)$.

On définit de même le polynôme caractéristique d'un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension finie.

Définition 4 – Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie.
Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, on appelle polynôme caractéristique de l'endomorphisme u, le polynôme

$$\chi_u(X) = \det(X.\mathrm{id}_{\mathbb{E}} - u)$$

Remarquer que $\deg(\chi_u) = \dim(\mathbb{E})$.

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme et celui d'une de ses matrices représentatives, sont reliés par le résultat suivant.

Proposition 5 – Polynôme caractéristique et matrice représentative

1. Si $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{E}$ et $A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$, alors $\chi_u(X) = \chi_A(X)$.
2. Si A et B sont semblables alors elles sont le même polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = \chi_B(X)$$

⚠ La réciproque du point 2. est fausse
. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ont même polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \chi_B(X) = X^2$ et ne sont pas semblables.

1.2 Lien avec les valeurs propres

Le premier intérêt du polynôme caractéristique est le calcul du spectre.

Théorème 6 – Racines du polynôme caractéristique

1. Les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont *exactement* les racines de son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$:

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathscr{Z}(\chi_A)$$

2. Si $\mathbb{E}$ de dimension finie, les valeurs propres de $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ sont *exactement* les racines de son polynôme caractéristique $\chi_u(X)$:

$$\mathrm{Sp}(u) = \mathscr{Z}(\chi_u)$$

On retrouve immédiatement les faits suivants :

- si A est une matrice carrée d'ordre n alors elle au plus n valeurs propres distinctes ;
- deux matrices semblables ont même spectre.

Pour des matrices de taille 2 ou 3 cette méthode est très pratique : on cherche les racines d'un polynôme de degré 2 ou 3.

✎ ***Exemple.*** Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

✎ ***Exemple.*** Pour une matrice triangulaire, on retrouve que les valeurs propres coïncident avec ses coefficients diagonaux.

✎ ***Exemple.*** Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mu \in \mathbb{K}$: $\mathrm{Sp}(\mu.A) = \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \Big/ \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \right\}$.

✎ ***Exemple.*** Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\gamma \in \mathbb{K}$: $\mathrm{Sp}(A + gamma.I_n) = \{\lambda + \gamma / \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

✎ ***Exemple.*** Si $A \in Gl_n(\mathbb{K})$: $\mathrm{Sp}\left(A^{-1}\right) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \Big/ \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \right\}$.

✎ ***Exemple.*** Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}\left({}^tA\right)$, puisque $\chi_A = \chi_{{}^tA}$.

On en déduit le théorème fondamental suivant.

Théorème 7 – Existence de valeurs propres complexes

Toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) admet au moins une valeur complexe.

En outre si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ a pour valeur propre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre. De plus les vecteurs propres associés à $\overline{\lambda}$ sont les conjugués de ceux associés à λ ; les sous-espaces propres associés à λ et $\overline{\lambda}$ sont de même dimension.

⚠ Ce résultat est faux pour les valeurs propres réelles ! La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ a pour polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2 + 1$, qui n'admet aucune racine réelle, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.
En dimension infinie il existe des endomorphismes sur un $\mathbb{C}$-ev dont le spectre est vide. Par exemple :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = XP \end{array}$$

1.3 Rappels sur les polynômes

$\mathbb{K}[X]$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes en l'indéterminée X. $\mathbb{K}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n ; c'est un espace vectoriel de dimension $n+1$.

On rappelle les notions et propriétés suivantes.

- Si λ est racine d'un polynôme P, on définit son *ordre de multiplicité* comme le plus grand entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X-\lambda)^r$ divise P. On dit que λ est racine *simple* lorsque λ est racine d'ordre 1.
- D'après la formule de Taylor, λ est racine d'ordre r si et seulement si $P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(r-1)}(\lambda) = 0$ et $P^{(r)}(\lambda) \neq 0$. En particulier λ est racine *simple* si et seulement si $P(\lambda) = 0$ et $P'(\lambda) \neq 0$.
- On dit qu'un polynôme P est *scindé* lorsqu'il est se décompose en produit de polynômes du premier degré :
  - ⋆ c'est toujours vrai dans $\mathbb{C}[X]$ (théorème de d'Alembert-Gauss) ;

  - ⋆ dans $\mathbb{R}[X]$, un polynôme est scindé si et seulement si toutes ses racines dans $\mathbb{C}$ sont réelles.
- Le degré d'un polynôme est *supérieur ou égal* à son nombre de racines, *comptées avec leur ordre de multiplicité*.
- Un polynôme est *scindé* si, et seulement si, le degré est *égal* à son nombre de racines, *comptées avec leur ordre de multiplicité*.

Plus précisément si on note m_λ l'ordre de multiplicité de $\lambda \in \mathbb{K}$ en tant que racine de P :

- $\operatorname{Card}\big(\mathcal{Z}(P)\big) \leq \sum\limits_{\lambda \in \mathcal{Z}(P)} m_\lambda \leq \deg(P)$
- $\sum\limits_{\lambda \in \mathcal{Z}(P)} m_\lambda = \deg(P) \iff P$ est scindé
- $\operatorname{Card}\big(\mathcal{Z}(P)\big) = \deg(P) \iff P$ est scindé à racines simples

et si $P \in \mathbb{R}[X]$ et λ est une valeur propre complexe de P : $m_\lambda = m_{\overline{\lambda}}$.

Enfin remarquons que, si A est une matrice carrée d'ordre n :

$$\chi_A \text{ scindé à racines simples } \iff A \text{ a } n \text{ valeurs propres distinctes}$$

1.4 Lien avec la dimension des sous-espaces propres

Regardons tout d'abord le cas de la restriction d'un endomorphisme à un sous-espace stable.

Théorème 8 – Polynôme caractéristique d'une restriction

Soit un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ et $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ un sous-espace vectoriel stable par u.
On considère la restriction de u au sous-espace $\mathbb{F}$: $u_{|\mathbb{F}} \in \mathscr{L}(\mathbb{F})$.
Alors : le polynôme caractéristique de $u_{|\mathbb{F}}$,

$$\chi_{u_{|\mathbb{F}}} \text{ divise } \chi_u$$

Notation. Si $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$, on note $m_\lambda(u)$ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de $\chi_u(X)$.

On a le résultat fondamental suivant.

Théorème 9 – Ordre de multiplicité et dimension des sous-espaces propres

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ avec $\mathbb{E}$ de dimension finie, et $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ une valeur propre de u.
On a l'inégalité :

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$$

On a le même type de résultat avec des matrices carrées.

Dans certains ouvrages, l'ordre de multiplicité est aussi appelé *exposant caractéristique*.

Autre vocabulaire : l'ordre de multiplicité de $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ en tant que racine de $\chi_u(X)$ est appelé ordre de multiplicité *algébrique* et la dimension de $E_\lambda(u)$ est appelée ordre de multiplicité *géométrique*. Ce vocabulaire est plus riche mais il prête à confusion...

Remarque. Si $\mathrm{rg}(A-\lambda.\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = r < n$, alors λ est valeur propre de A de multiplicité supérieur ou égal à $(n-r)$, car d'après le théorème du rang et le théorème précédent :

$$\dim\big(E_\lambda(A)\big) = n - \mathrm{rg}(A-\lambda.\mathrm{id}\mathbb{E}) = n - r \leq m_\lambda(A)$$

En particulier, si $\mathrm{rg}(A) = r$ alors 0 est valeur propre de multiplicité supérieur ou égal à $n-r$.

⚠ L'ordre de multiplicité de 0 peut être *strictement* supérieur à $n-r$.

Si $J = \begin{pmatrix} 0 & & & \text{\Large 0} \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_J(X) = X^n$, 0 est de multiplicité n et pourtant $\mathrm{rg}(J) = n-1$.

✎ ***Exemple.*** Donner le spectre de la matrice $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1.5 Lien avec la diagonalisation

Donnons une « nouvelle » caractérisation des endomorphismes/matrices diagonalisables.

Théorème 10 – Diagonalisabilité et ordres de multiplicité

Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ est diagonalisable si et seulement si :

1. Le polynôme caractéristique χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Pour toute valeur propre λ de u, $\dim\big(E_\lambda(u)\big) = m_\lambda(u)$.

On a les mêmes résultats pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, alors elle est semblable à une matrice diagonale dont la diagonale est contstituée du spectre de A, chaque valeur propre étant répétée autant de fois que son ordre de multiplicité (qui est égal à la dimension du sous-espace propre). Donc :

$$\chi_u(X) \underset{\text{d'après 1.}}{=} \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda(u)} \underset{\text{d'après 2.}}{=} \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)^{\dim\left(E_\lambda(u)\right)}$$

En pratique :

- on calcule d'abord le polynôme caractéristique χ_u ;
- ses racines forment le spectre de u ;
- pour chaque valeur propre λ on détermine ensuite la dimension de l'espace propre $E_\lambda(u)$;
- la plupart du temps on utilise l'ancien critère : on compare $\dim(\mathbb{E})$ et la somme des dimensions des sous-espaces propres. Le nouveau critère est équivalent mais un peu plus délicat : on compare, pour chaque valeur propre, l'ordre de multiplicité et la dimension du sous-espace propre associé.

✎ ***Exemple.*** La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$?

On retrouve le résultat suivant.

Corollaire 11 – Cas où le polynôme caractéristique est scindé à racines simples

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est telle que χ_A est scindé à racines simples, alors A admet n valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.
On a le même résultat avec $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ où $\mathbb{E}$ de dimension finie.

✎ ***Exemple.*** Soit la matrice d'ordre n : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$.

Montrer que A^{-1} est diagonalisable.

1.6 Lien avec la trigonalisation

Terminons avec une caractérisation des endomorphismes trigonalisables.

Théorème 12 – Caractérisation de la trigonalisation

1. $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, avec $\mathbb{E}$ de dimension finie, est trigonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.
   On a le même résultat avec des matrices carrées.
2. Toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
   Toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:
   $$A = PTP^{-1} \text{ avec } P \in Gl_n(\mathbb{C}) \text{ et } T \in T_n^+(\mathbb{C})$$
3. Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ est trigonalisable.

La démonstration de ce théorème utilise le lemme suivant.

Lemme 13 – Inversibilité d'une matrice par blocs

Si Q est une matrice d'ordre n inversible, alors $P = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ est une matrice d'ordre $n+1$ inversible et $P^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable, alors elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est contstituée du spectre de A, chaque valeur propre étant répétée autant

de fois que son ordre de multiplicité (qui peut être différent de la dimension du sous-espace propre). Donc :

$$\chi_u(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda(u)}$$

✎ ***Exemple.*** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte :

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

✎ ***Exemple.*** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} m_\lambda(A).\lambda^k$$

1.7 Conséquences de la trigonalisation

Le polynôme caractéristique a les propriétés algébriques suivantes.

Théorème 14 – Coefficients remarquables du polynôme caractéristique

1. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A).X^{n-1} + \dots + (-1)^n.\det(A)$$

2. Si le polynôme caractéristique χ_A est scindé, de racines $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *comptées avec leur ordre de multiplicité* :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = \mathrm{Tr}(A) \\ \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n = \det(A) \end{cases}$$

Lorsque le polynôme caractéristique est scindé, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet *exactement* n valeurs propres *comptées avec leur ordre de multiplicité* : ce sont $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les racines de χ_A.
Ceci est toujours vrai dans $\mathbb{C}$.

⚠ Rappelons que le spectre réel peut être vide !

Si l'on connaît $(n-1)$ valeurs propres *complexes* $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ de A comptées avec leur ordre de multiplicité, A possède n valeurs propres *complexes* comptées avec leur ordre de multiplicité, et la dernière valeur propre s'obtient avec $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n = \mathrm{Tr}(A)$.

✎ ***Exemple.*** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.
Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

2 Application des polynômes annulateurs à la réduction

2.1 Premières propriétés des polynômes annulateurs

Donnons un résultat simple d'existence sur les polynômes annulateurs.

Théorème 15 – Existence de polynômes annulateurs en dimension finie

On suppose que $\mathbb{E}$ est un espace de dimension finie et que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.
Alors il existe au moins un polynôme annulateur de u non-nul.
On a le même résultat pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Les polynômes annulateurs sont très utilisés dans l'étude du spectre des endomorphismes.

Théorème 16 – Valeurs propres et polynômes annulateurs

1. Si $x \in E_\lambda(u)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$,
$$\boxed{P(u)(x) = P(\lambda).x}$$
2. $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Longrightarrow P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\big(P(u)\big)$.
3. Si P est annulateur de u : $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Longrightarrow P(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$.
Autrement dit : $\mathrm{Sp}(u) \subseteq \mathscr{Z}(P)$.

On a les mêmes résultats pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

✎ ***Exemple.*** Que dire du spectre d'un projecteur ? d'une symétrie ?

✎ ***Exemple.*** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 3$ ou 0 et que $\det(A) = 1$.

Important. Rappelons à toute fins utiles, que les polynômes annulateurs peuvent être utilisés pour le calcul de l'inverse et des puissances.

2.2 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Les polynômes annulateurs nous donne une troisième et dernière CNS de diagonalisabilité.

Théorème 17 – CNS de diagonalisabilité par les polynômes annulateurs

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie.
Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme P annulateur de u *scindé à racines simples.*
On a le même résultat pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

L'intérêt de cette nouvelle CNS est qu'elle ne demande aucune étude des éléments propres. C'est donc un résultat extrêmement puissant !

✎ ***Exemple.*** Déterminer toutes les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = A$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

On peut préciser le choix du polynôme annulateur scindé à racines simples.

Théorème 18 – CNS de diagonalisabilité par les polynômes annulateurs (bis)

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie.
Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$ pour polynôme annulateur.
On a le même résultat pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On pourrait montrer que le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$ est le polynôme annulateur *minimal* (au sens du degré), mais cette notion n'est pas au programme, même si intuitivement elle se comprend bien...

✎ ***Exemple.*** On nota $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $a = c = 0$.

2.3 Restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable

Nous savons déjà que la restriction d'un endomorphisme u à un sous-espace stable $\mathbb{F}$, donne un endomorphisme $u_{|\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}$. Examinons le cas où u est diagonalisable.

Théorème 19 – Restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sev stable

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ un endomorphisme *diagonalisable*.
Alors, si $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ *stable* par u, l'endomorphisme induit $u_{|\mathbb{F}}$ est lui aussi diagonalisable.

Ce résultat a une conséquence importante.

Corollaire 20 – Diagonalisabilité et décomposition en somme directe

On suppose que $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et que $\mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_p$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ vérifiant $\mathbb{E} = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathbb{F}_k$.
Soit u un endomorphisme de $\mathbb{E}$ tel que $\mathbb{F}_k$ est *stable* par u, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.
Alors u est diagonalisable si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, l'endomorphisme induit $u_{|\mathbb{F}_k}$ est diagonalisable.
Dans ce cas, si $\mathscr{B}_k$ est une base de $\mathbb{F}_k$ telle que $u_{|\mathbb{F}_k}$ est diagonalisable (pour tout $k \in [\![1, n]\!]$), alors $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_p$ est une base de diagonalisation de u.

Ce corollaire permet de définir un endomorphisme diagonalisable sur chaque « bloc » d'une somme directe.

✎ ***Exemple.*** Si u et v commutent et sont diagonalisables, montrer que u et v sont diagonalisables dans une même base. Que dire de la réciproque ?

2.4 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 21 – Théorème de Cayley-Hamilton

En suppose que $\mathbb{E}$ est un espace de dimension finie et que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$. On note χ_u le polynôme caractéristique de u.
Alors $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$. En d'autres termes, le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur de u.
On a le même résultat pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

⚠ Dans la formule $\chi_u(X) = \det(X\mathrm{id}_{\mathbb{E}} - u)$ on peut substituer à X un scalaire, mais on ne peut pas substituer à X l'endomorphisme u. La démonstration n'est donc pas aussi évidente !

On obtient une nouvelle preuve de l'existence de polynômes annulateurs, mais elle est bien plus compliquée que celle donnée en début de section !

✎ ***Exemple.*** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ annule A.

✎ ***Exemple.*** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ si et seulement si A est semblable à une matrice triangulaire stricte :

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

✎ ***Exemple.*** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que son *indice de nilpotence* est inférieur ou égal à n.

3 Exercices

Calculs de polynôme caractéristique

Exercice 1

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie impaire et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ un endomorphisme de $\mathbb{E}$.
Montrer qu'il existe une droite vectorielle stable par u.

Exercice 2 – Matrice par blocs

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on forme la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

1. Exprimer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.
   Par opérations élémentaires sur les colonnes, on se ramènera à une matrice triangulaire par blocs.
2. En déduire le spectre de M.
3. M est-elle inversible ?
4. Déterminer $\det(M)$.

Exercice 3 – Matrices compagnons

On considère un polynôme unitaire

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^n + X^n \in \mathbb{K}_n[X]$$

À partir des coefficients de ce polynôme, on forme sa *matrice compagnon* :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_C(\lambda)$.
   Par opérations élémentaires sur les lignes, on se ramènera à une matrice triangulaire.
2. En déduire que si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X + X^n \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme unitaire,

si $z \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors

$$|z| \leq \max\big(|a_0|, 1+|a_1|, \dots, 1+|a_{n-1}|\big)$$

Polynôme caractéristique et diagonalisabilité

Exercice 4 – Diagonalisation d'une matrice

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 – Diagonalisation sans calculs (?)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Donner $\mathrm{rg}(A)$.
En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 6 – Matrice à paramètres

On considère deux complexes $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?
On distinguera les cas $a = 0$ et $a \neq 0$.

Exercice 7 – Matrice d'ordre n

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$.
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

3. A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 8 – Matrice d'ordre n à paramètres

On considère un entier $n \geq 2$ et deux complexes $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $a \neq 0$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} b & a & \dots & \dots & a \\ a & b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & \dots & a & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

1. La matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est diagonalisable.
   Hint : remarquer que $A - (b-a)I_n = aH$.
3. En déduire $\det(A)$.

Exercice 9 – Matrices de rang 1

1. On considère deux matrices colonnes non nulles $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et l'on forme la matrice $A = X^t Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 1$ et déterminer $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$. Exprimer matriciellement $\mathrm{Tr}(A)$ à l'aide de X et Y.
2. Réciproquement, montrer que toute matrice de rang 1 s'écrit $A = X^t Y$ où X et Y sont des matrices colonnes non nulles.
3. Que vaut le polynôme caractéristique d'une matrice de rang 1 ?
4. Montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
5. On considère la matrice $A = \left(\left(\frac{i}{j}\right)\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Diagonaliser cette matrice.

Polynôme caractéristique et trigonalisabilité

Exercice 10 – Trigonalisation des matrices d'ordre 2

Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique χ_A scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Si χ_A possède deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, que peut-on dire de la matrice A ?
2. On suppose que χ_A a une racine double α. À quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.
4. On suppose que χ_A a une racine double α et que A n'est pas diagonalisable.
   Montrer que A est semblable à la matrice $J_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Exercice 11 – Trigonalisation d'une matrice d'ordre 3

Trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

Exercice 12 – Application de la trigonalisabilité des matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Calculer $\det(I_n + A)$.

Exercice 13 – Équation polynomiale matricielle

Trouver les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A^2$ et $\mathrm{Tr}(A) = n$.

Exercice 14 – Équation polynomiale matricielle

Soit $A \in \mathscr{M}_{15}(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^5 + A + I_{15} = 0_{15}$.
Montrer que $\det(A) < 0$.

Exercice 15 – Caractérisation ultra-classique des matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.
Pour la réciproque faire apparaître une matrice de Vandermonde.

Exercice 16 – Un peu d'espaces vectoriels normés

1. Montrer que les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Montrer que ce résultat est faux dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Exercice 17 – Endomorphismes tels que $f^2 = -\mathbb{E}$

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.
Que peut-on dire du polynôme caractéristique, de la trace, du déterminant de f ? de la dimension de $\mathbb{E}$?

Exercice 18 – Diagonalisabilité d'une matrice d'ordre n

On considère la matrice de taille $2n$ suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$

1. Est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$?
2. Dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$? La diagonaliser.

Exercice 19 – Diagonalisabilité d'une matrice par blocs

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$.
Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0_n$.

Exercice 20 – Calcul de $\lim\limits_{p \to +\infty} A^p$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_n$.
Montrer que la suite $\left(A^p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice d'une projection.

Exercice 21 – Diagonalisabilité d'un endomorphisme matriciel

On considère l'endomorphisme

$$\begin{array}{rcl} u : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A + 2\,{}^tA \end{array}$$

1. u est-il diagonalisable ?
2. Quels sont les sous-espaces propres de u ?

Exercice 22 – Diagonalisabilité d'un endomorphisme matriciel

L'endomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M + \mathrm{Tr}(M).In \end{array}$$

est-il diagonalisable ?

Exercice 23 – Diagonalisabilité d'une matrice triangulaire à paramètres

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K})$$

Trouver une CNS sur (a, b, c, d, e, f) pour que A soit diagonalisable.

Exercice 24 – Diagonalisabilité à partir d'un projecteur

Soit un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie, $p \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ un projecteur et un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ vérifiant $u^2 = u + 2p$. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 25 – CNS de trigonalisabilité - Cotrigonalisabilité

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.

1. On suppose que u est trigonalisable. Montrer qu'il admet un polynôme annulateur scindé.
2. Réciproquement on suppose que u admet un polynôme annulateur $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé.
   (a) Montrer que $\mathrm{Sp}(u)$ est non vide.
   (b) En procédant pat récurrence sur $n = \dim(\mathbb{E})$, montrer que u est trigonalisable.
3. Conclure.
4. On suppose que u est trigonalisable et que $\mathbb{F}$ est stable par u.
   Montrer que l'endomorphisme induit $u_{|\mathbb{F}}$ est trigonalisable.
5. Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{E}$ trigonalisables, et tels que $u \circ v = v \circ u$.
   Montrer que u et v sont trigonalisables dans une même base.
   La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 26 – Matrices diagonalisables telles que $A^3 = B^3$

Soient deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables, telles que $A^3 = B^3$.

1. Vérifier qu'il existe un polynôme L tel que $A = L(A^3)$.
2. En déduire que A et B commutent puis que A et B sont codiagonalisables.
3. Conclure que $A = B$.

Chapitre 10

Séries de fonctions

Sommaire

1 Modes de convergence d'une série de fonctions 240

1.1 Convergence simple 240

1.2 Convergence uniforme 241

1.3 Convergence normale 243

2 Propriétés des séries de fonctions uniformément convergente 244

2.1 Interversion $\sum$ et limite 244

2.2 Continuité d'une série de fonctions 245

2.3 Intégration des signes somme et intégrale 246

2.4 Dérivation d'une série de fonctions 246

3 Exercices 248

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$|.|$ désigne indifféremment la valeur absolue ou le module.

1 Modes de convergence d'une série de fonctions

1.1 Convergence simple

On considère un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.

Définition 1 – Série de fonctions

On appelle *série de fonctions* définie sur I, de terme général u_n, la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} S_n : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x) \end{array}$$

La fonction S_n est appelée somme partielle de rang n de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

✎ ***Exemple.*** Considérons $u_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = t^n$. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k = \begin{cases} \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} & \text{si } t \neq 1 \\ n+1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Donnons un premier mode de convergence pour une série de fonctions.

Définition 2 – Convergence simple d'une série de fonctions

On dit qu'une série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge *simplement* sur l'intervalle I si et seulement si :

$$\forall x \in I \text{ fixé, la série numérique } \sum_{n\geq 0} u_n(x) \text{ converge}$$

On définit alors la fonction $S : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

1. La fonction S s'appelle la *somme de la série de fonctions* est est notée $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $S - S_n$ s'appelle le *reste d'ordre n* de la série de fonctions et est noté $R_n = S - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Dire qu'une série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I revient donc à dire que la *suite de fonctions* des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I.

Remarque. Il se peut qu'une série de fonctions ne converge simplement que sur un sous-ensemble $D \subset I$. On dit alors que D est le *domaine de définition* de la série de fonctions et on dit aussi que la série de fonctions $\sum u_n$ converge sur D.

Le résultat suivant est issue du chapitre sur les séries numériques.

Théorème 3 – Reste d'une série de fonctions simplement convergente

Si la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge *simplement* sur l'intervalle I, alors la suite de fonctions des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction nulle :

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = 0$$

✎ ***Exemple.*** On considère la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} u_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$, calculer sa somme, ses sommes partielles et son reste d'ordre n.

✎ ***Exemple.*** On définit la fonction ζ de Riemann par :

$$\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$$

Déterminer le domaine de définition de ζ.

On définit ensuite la notion de convergence absolue (pas explicitement au programme...).

Définition 4 – Convergence absolue d'une série de fonctions

On dit qu'une série de fonctions $\sum u_n$ *converge absolument* sur I si et seulement si

$$\forall x \in I \text{ fixé, la série numérique } \sum |u_n(x)| \text{ converge}$$

Il est clair que la convergence *absolue* sur I implique la convergence *simple* sur I(cf chapitre sur les séries numériques).

1.2 Convergence uniforme

Vient ensuite la notion de convergence uniforme.

Définition 5 – Convergence uniforme d'une série de fonctions

On dit qu'une série de fonctions $\sum u_n$ *converge uniformément* sur I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sommes partielles) converge uniformément sur I.

Il est clair que la convergence *uniforme* sur I implique la convergence *simple* sur I (cf chapitre sur les suites de fonctions).

On dispose de la condition nécessaire suivante de convergence uniforme d'une série de fonctions.

Théorème 6 – Condition nécessaire de convergence uniforme de $\sum u_n$

Si une série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I, alors la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

On peut se servir de ce résultat pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément : il suffit de montrer que la suite numérique $\|u_n\|_\infty$ ne converge pas vers 0.

✎ ***Exemple.*** Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, avec $u_n(x) = nx^n(1-x)$, ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

⚠ Comme pour le séries numériques, la réciproque est fausse. Mais les contre-exemples sont trop techniques pour être donnés ici...

En utilisant la suite des restes on obtient une CNS de convergence uniforme.

Théorème 7 – Caractérisation pratique de l'uniforme convergence

Une série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si :
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur I ;
- La suite de fonctions des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Il est en général difficile de montrer qu'une série de fonctions converge uniformément, et on le vérifie assez rarement. Si l'on doit le prouver, on utilise la plupart du temps la caractérisation précédente : pour cela on essaie de calculer explicitement le reste $R_n(x)$ ou de le majorer en valeur absolue.
Pour cela, le CSSA (Critère Spécial des Séries Alternées) est tout indiqué !

✎ ***Exemple.*** Considérons $u_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{n+t}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $t \in \mathbb{R}^+$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{n+t}$ est convergente en vertu du CSSA donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
La fonction $S : t \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+t}$ est donc définie sur $\mathbb{R}^+$.

On a $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+t}$.
Par le CSSA : $|R_n(t)| \leq \frac{1}{n+1+t} \leq \frac{1}{n+1}$.
Par majoration uniforme, on peut affirmer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

1.3 Convergence normale

Comme il est difficile de vérifier la convergence uniforme directement, on va définir une notion de convergence « plus forte » et surtout plus simple à vérifier.

Définition 8 – Convergence normale

On dit qu'une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge normalement* sur I, si et seulement si la série numérique

$$\sum_{n\geq 0} \|u_n\|_\infty$$

converge où $\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in I} |u_n(x)|$.

Les différentes modes de convergence sont en relation de la manière suivante.

Théorème 9 – Comparaison des modes de convergence

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ CV normalement} \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{n\geq 0} u_n \text{ CV uniformément} \\ \sum_{n\geq 0} u_n \text{ CV absolument} \end{cases} \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ CV simplement}$$

Et en cas de convergence normale :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_\infty$$

La convergence normale d'une série est la notion la plus forte qui entraîne toutes les autres. On commence donc toujours par étudier la convergence normale.

En pratique, on procède de la manière suivante :

1. Commencer par étudier la convergence *normale*. Si il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :
   - $\forall x \in I, \quad |u_n(x)| \leq \alpha_n$,
   - la série numérique $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ converge,

   alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement, donc uniformément (absolument), donc simplement.
   ⚠ Il est **indispensable** que α_n *ne dépende pas* de x !!

2. Si on n'arrive pas à montrer la convergence normale, étudier d'abord la convergence simple (ou absolue).
3. S'il y a convergence simple, étudier la convergence uniforme (on entre dans les cas plus complexes) :
   - La suite de fonctions $\|u_n\|_\infty$ converge-t-elle vers la fonction nulle ? Si ce n'est pas le cas, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ ne converge pas uniformément.
   - Essayer de montrer que la suite des restes (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle. On peut :
     - ⋆ utiliser une comparaison avec une intégrale,
     - ⋆ utiliser le critère spécial des séries alternées, qui majore $|R_n(x)|$ par le premier terme négligé,
     - ⋆ majorer en valeur absolue la série $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)$ en faisant apparaître des séries plus simples (géométriques, ...)

✎ ***Exemple.*** La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx^2)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$, mais converge normalement sur tout intervalle $[0, a]$, $a > 0$.

2 Propriétés des séries de fonctions uniformément convergente

2.1 Interversion $\sum$ et limite

La convergence uniforme permet de calculer la limite d'une série de fonctions.

Théorème 10 – Double limite

Soit une série de fonctions $\sum_{\geq 0} u_n$ où $u_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et un point adhérent $a \in \overline{I}$. On suppose que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_n \in \mathbb{R}$;
- la série de fonctions $\sum_{\geq 0} u_n$ converge *uniformément* sur I.

Alors, en notant S la fonction somme de la série,

1. la série numérique $\sum_{\geq 0} \ell_n$ converge ;
2. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Sous hypothèse de convergence uniforme, on peut donc intervertir limite et signe somme :

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} u_n(x)\right)$$

✎ ***Exemple.*** On considère la fonction :

$$S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1}$$

Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = 1$.

On peut aussi se servir de ce théorème pour justifier qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément sur I.

✎ ***Exemple.*** Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{x^n}{1+nx^n}$ converge simplement et non uniformément sur $]0,1[$.

2.2 Continuité d'une série de fonctions

La convergence uniforme assure la continuité d'une série de fonctions.

Théorème 11 – CV uniforme et continuité

Soit une série de fonctions $\sum u_n$ où $u_n : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in I$. On suppose que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue au point a ;
- la série de fonctions $\sum u_n$ converge *uniformément* sur I.

Alors la fonction somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue au point a.

Remarque. Pour montrer que la fonction $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur I, il suffit donc de montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a,b] \subseteq I$.
(Par contre il peut ne pas y avoir convergence uniforme sur I.)

✎ ***Exemple.*** Montrer que la fonction :

$$S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$$

est définie et continue sur $[0,1]$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que la fonction :

$$S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2.3 Intégration des signes somme et intégrale

La convergence uniforme donne un cadre simple pour intervertir les signes $\sum$ et $\int$.

Théorème 12 – CV uniforme et intégration

Soit une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ définies sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue sur le segment $[a,b]$;
- la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge *uniformément* sur le segment $[a,b]$.

Alors :

1. La fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur le segment $[a,b]$;
2. La série numérique $\sum_{n\geq 0} \left(\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x \right)$ converge ;
3. On peut inverser les signes sommes : $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right)$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$$

✎ ***Exemple.*** Montrer que :

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$$

2.4 Dérivation d'une série de fonctions

La convergence uniforme permet de dériver une série de fonctions.

Théorème 13 – CV uniforme et dérivation

Soit un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $u_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe C^1 sur l'intervalle I.
- La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge *simplement* sur I.
- La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u'_n$ converge *uniformément sur tout segment* de I

Alors :

1. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur tout segment de I ;
2. La fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe C^1 sur I ;
3. On peut dériver terme à terme : $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$.

✎ ***Exemple.*** On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
Donner le domaine de définition de f ; montrer que $f \in C^1(]0,+\infty[;\mathbb{R})$.
Calculer $f'(x)$ et en déduire $f(x)$.

Par récurrence, on en déduit le théorème suivant.

Théorème 14 – CV uniforme et dérivation d'ordre k

Soit un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $u_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in C^k(I,\mathbb{R})$;
- $\forall i \in [\![1, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n^{(i)}$ converge *simplement* sur I ;
- la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ converge *uniformément sur tout segment* de I.

Alors,

1. $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum u_n^{(i)}$ converge uniformément sur tout segment de I ;
2. La fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe C^k sur I ;
3. $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(i)}$.

✎ ***Exemple.*** On définit la fonction ζ de Riemann par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Domaine de définition de ζ ?
2. Étudier les modes de convergence de cette série de fonctions.
3. Montrer que ζ est continue sur $]1,+\infty[$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x)$.
4. En utilisant une comparaison avec une intégrale, trouver un équivalent simple de ζ lorsque $x \to 1^+$.
5. Montrer que ζ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et que ζ est décroissante.
6. Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$
7. Tracer le graphe de ζ.

3 Exercices

Modes de convergence

Exercice 1 – Modes de convergence d'une série de fonctions

On considère la série de fonctions $x \longmapsto \sum_{n\geq 0} nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ pour $x \in]0,+\infty[$.

1. Montrer qu'elle ne converge pas normalement sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer qu'elle converge simplement sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer qu'elle converge normalement sur $[a,+\infty[$, pour tout $a > 0$.

Exercice 2 – Modes de convergence d'une série de fonctions

On considère la série de fonctions $x \longmapsto \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+n^3x^2}$ pour $x \in]0,+\infty[$.

1. Montrer qu'elle converge simplement sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer qu'elle ne converge pas normalement sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer qu'elle converge normalement sur $[a,+\infty[$, pour tout $a > 0$.

Exercice 3 – Modes de convergence d'une série de fonctions

On considère la série de fonctions $x \longmapsto \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{x^2+n}$ sur $[-1,0[$.

1. Montrer qu'elle ne converge pas normalement sur $[-1,0[$.
2. Montrer qu'elle converge uniformément sur $[-1,0[$.

Exercice 4 – Modes de convergence d'une série de fonctions à paramètre

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la série de fonctions $x \longmapsto \sum_{n\geq 0} n^\alpha x^n (1-x)$.

1. Montrer qu'elle converge normalement sur $[0,1]$ si, et seulement si, $\alpha < 0$.
2. Montrer qu'elle converge simplement sur $[0,1]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Pour $\alpha \geq 0$, montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[0,1]$

Exercice 5 – Développement asymptotique d'une série de fonctions

Soit $a > 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} u_n : [a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{nx + (-1)^n} \end{array}$$

1. Étudier la convergence absolue de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$.
   En déduire qu'il n'y a pas convergence normale.
2. Montrer la convergence simple de la série de fonctions.
3. Montrer la convergence uniforme.
4. Donner un développement asymptotique de $S(x)$ lorsque $x \to +\infty$ à la précision $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

Exercice 6 – CSSA uniforme

Soit une suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positives définies sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. On suppose que :

- La suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
- Pour tout $x \in I$, la suite numérique $u_n(x)$ est décroissante.

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur I.

Limites et continuité d'une série de fonction

Exercice 7 – Continuité et limite d'une série de fonctions

1. Déterminer l'ensemble de définition de $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^x \mathrm{e}^{-nx}$.
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 8 – Équivalent d'une série de fonctions

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2 n^2}$

1. Domaine de définition de S.
2. Continuité de S.

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.
4. Déterminer un équivalent de S lorsque $x \to 0$.

Exercice 9 – Étude de la somme d'une série de fonctions

On définit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire.
2. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que f est continue sur D_f.
4. À l'aide d'une comparaison à une intégrale, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pi$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\pi$.
5. Étudier la convergence uniforme sur $[1, +\infty[$.

Interversion $\sum$ et $\int$

Exercice 10 – Intégrale d'une série de fonctions

Soit :

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$$

Montrer l'existence et calculer :

$$\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 11 – Expression intégrale de la constante d'Euler

On pose $S(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+t} \right)$.

1. Montrer que S est une fonction définie et continue sur $[0,1]$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t = \gamma$ (constante d'Euler).

Exercice 12 – Calcul d'une intégrale comme une somme de série

On pose :

$$u_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x & \text{pour } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0,1]$.
3. En déduire l'égalité :
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Dérivation d'une série de fonctions

Exercice 13

On pose $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$.

1. Montrer que S est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que S est décroissante sur $]0,+\infty[$.
3. Déterminer les limites de S en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 14 – Fonction zéta alternée

On définit la fonction
$$\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

1. Domaine de définition de μ et modes de convergence.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \mu(x)$ et le signe de $\mu(x)$ sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que μ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
4. Trouver une relation simple entre ζ et μ.
5. Retrouver l'équivalent de ζ au voisinage de 1.

Exercice 15

On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^n(x)\sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que S est de classe C^1 sur $]0,\pi[$ et calculer $S'(x)$.
2. En déduire S.

Chapitre 11

Continuité d'une fonction entre deux espaces vectoriels normés

Sommaire

1 Étude locale d'une application, continuité 254

1.1 Limite d'une fonction entre deux espaces vectoriels normés 254

1.2 Opérations sur les limites 255

1.3 Utilisation des coordonnées 256

1.4 Continuité 256

2 Continuité d'une fonction sur une partie 257

2.1 Définition 257

2.2 Opérations sur les fonctions continues sur une partie 258

2.3 Fonctions lipschitziennes 258

2.4 Propriétés topologiques des fonctions continues 259

2.5 Exemples usuels de fonctions continues sur un evn 259

2.6 Théorème des bornes atteintes 260

3 Exercices 262

Dans tout le chapitre $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$ et $(\mathbb{F}, \|.\|_{\mathbb{F}})$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

1 Étude locale d'une application, continuité

1.1 Limite d'une fonction entre deux espaces vectoriels normés

On commence par définir la notion de limite d'une fonction $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$.

Définition 1 – Limite

Soit une partie $A \subseteq \mathbb{E}$ et une application $f : A \mapsto \mathbb{F}$.
Soit un point $\vec{a} \in \overline{A}$ adhérent à A et $\vec{\ell} \in \mathbb{F}$.
On dit que la fonction f admet $\vec{\ell}$ comme limite au point $\vec{a}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall \vec{x} \in A, \quad \|\vec{x} - \vec{a}\|_{\mathbb{E}} \leq \alpha \Longrightarrow \left\| f(\vec{x}) - \vec{\ell} \right\|_{\mathbb{F}} \leq \varepsilon$$

On écrit alors $f(\vec{x}) \underset{\vec{x} \to \vec{a}}{\longrightarrow} \vec{\ell}$.

⚠ Éviter d'écrire $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x})$ ou de parler de la limite d'une fonction *avant d'avoir justifié son existence* !

En termes de voisinages, la définition de la limite s'interprète de la manière suivante :

$$\forall W \in \mathcal{V}(\vec{\ell}), \quad \exists V \in \mathcal{V}(\vec{a}), \quad f(V \cap A) \subseteq W$$

Comme pour les suites à valeurs dans un evn, on a le résultat suivant.

Théorème 2 – Unicité de la limite

Avec les notations précédentes,

$$\begin{cases} f(\vec{x}) \underset{\vec{x} \to \vec{a}}{\longrightarrow} \vec{\ell}_1 \\ f(\vec{x}) \underset{\vec{x} \to \vec{a}}{\longrightarrow} \vec{\ell}_2 \end{cases} \Longrightarrow \vec{\ell}_1 = \vec{\ell}_2$$

Pour calculer une limite, on procède souvent par encadrement.

Théorème 3 – Théorème de majoration

Pour montrer que $f(\vec{x}) \underset{\vec{x} \to \vec{a}}{\longrightarrow} \vec{\ell}$, majorer $\left\| f(\vec{x}) - \vec{\ell} \right\|_{\mathbb{F}}$ par $\|\vec{x} - \vec{a}\|_{\mathbb{E}}$.
On suppose qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, et un voisinage $V \in \mathcal{V}(\vec{a})$ tels que :

- $\forall \vec{x} \in V, \left\| f(\vec{x}) - \vec{\ell} \right\|_{\mathbb{F}} \leq g\left(\|\vec{x} - \vec{a}\|_{\mathbb{E}}\right)$
- $g(\theta) \underset{\theta \to 0}{\longrightarrow} 0$

Alors $f(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{a}}{\longrightarrow} \vec{\ell}$.

Le lien avec les suites à valeurs dans un evn est donné par la caractérisation séquentielle de la limite.

Théorème 4 – Caractérisation séquentielle de la limite

Soit $A \subseteq \mathbb{E}$, $\vec{\ell} \in \mathbb{F}$ et une application $f : A \longrightarrow \mathbb{F}$. On a l'équivalence

$$f(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{a}}{\longrightarrow} \vec{\ell} \iff \forall (\vec{x}_n) \in A^{\mathbb{N}}, \quad \vec{x}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \vec{a} \Longrightarrow f(\vec{x}_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \vec{\ell}$$

Rappelons que $A^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites d'éléments de A.

1.2 Opérations sur les limites

On peut « composer deux limites ».

Théorème 5 – Limite d'une composée

On considère trois evn, $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$, $(\mathbb{F}, \|.\|_{\mathbb{F}})$ et $(\mathbb{G}, \|.\|_{\mathbb{G}})$ et deux parties $A \subseteq \mathbb{E}$, $B \subseteq \mathbb{F}$.
Soient deux applications

$$\underset{\vec{a}\in\overline{A}}{A} \xrightarrow{f} \underset{\vec{b}\in\overline{B}}{B} \xrightarrow{g} \underset{\vec{\ell}}{\mathbb{G}}$$

Soit $\vec{a} \in \overline{A}$, $\vec{b} \in \overline{B}$ et $\vec{\ell} \in \mathbb{G}$. On suppose que :

- $f(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{a}}{\longrightarrow} \vec{b}$,
- $g(\vec{y}) \underset{\vec{y}\to\vec{b}}{\longrightarrow} \vec{\ell}$.

Alors $g \circ f(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{a}}{\longrightarrow} \vec{\ell}$.

On peut aussi appliquer les opérations de $\mathbb{F}$ aux limites de fonctions de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$.

Théorème 6 – Combinaison linéaire de limites

Soient deux evn $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$ et $(F, \|.\|_{\mathbb{F}})$, une partie $A \subseteq E$, $\vec{a} \in \overline{A}$, deux applications $f, g : A \mapsto \mathbb{F}$ et deux scalaires $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Si

$$\begin{cases} f(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{a}}{\longrightarrow} \vec{\ell}_1 \\ g(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{a}}{\longrightarrow} \vec{\ell}_2 \end{cases}$$

alors

$$\lambda.f(\vec{x}) + \mu.g(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{a}}{\longrightarrow} \lambda\vec{\ell}_1 + \mu\vec{\ell}_2$$

En particulier :

$$f(\vec{x})+g(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{a}}{\longrightarrow} \vec{\ell}_1+\vec{\ell}_2$$

et :

$$\lambda.f(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{a}}{\longrightarrow} \lambda.\vec{\ell}_1$$

⚠ On ne peut pas parler de *produit* de limites, puisque dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{F}$ il n'existe pas de produit entre les vecteurs.

1.3 Utilisation des coordonnées

Dans le cas où $\mathbb{F}$ est de *dimension finie*, tout vecteur de $\mathbb{F}$ peut être représenté par ses coordonnées dans une base.

Plus précisément, si $f : A \longrightarrow \mathbb{F}$ et $\mathscr{B} = \left(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}\right)$ est une base de $\mathbb{F}$, alors pour tout $\vec{x} \in \mathbb{E}$ on peut écrire $f(\vec{x})$ sous la forme :

$$f(\vec{x}) = \left(f_1(\vec{x}),\dots,f_n(\vec{x})\right)_{\vec{e}} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x).\vec{e_i}$$

Définition 7 – Fonctions coordonnées

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, les fonctions scalaires $f_i : A \longrightarrow \mathbb{K}$ sont appelées *fonction coordonnées* associées à f dans la base $\mathscr{B}$.

On a le résultat fondamental suivant.

Théorème 8 – Limite d'une fonction et limites des fonctions coordonnées

Soient deux evn $(\mathbb{E},\|.\|_{\mathbb{E}})$ et $(\mathbb{F},\|.\|_{\mathbb{F}})$, $\mathbb{F}$ étant supposé de dimension finie et muni d'une base $\mathscr{B} = \left(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}\right)$.
Soit $A \subseteq \mathbb{E}$, $\vec{a} \in \overline{A}$ et

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ x & \longmapsto & f(\vec{x}) = \left(f_1(\vec{x}),\dots,f_n(\vec{x})\right)_{\mathscr{B}} \end{array}$$

On se ramène à l'étude de la limite de chacune des applications f_i :

$$f(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{a}}{\longrightarrow} \vec{\ell} = (\ell_1,\dots,\ell_n)_{\mathscr{B}} \Longleftrightarrow \begin{cases} f_1(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{a}}{\longrightarrow} \ell_1 \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{a}}{\longrightarrow} \ell_n \end{cases}$$

1.4 Continuité

Définition 9 – Continuité en un point

Soient deux evn $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$, $(\mathbb{F}, \|.\|_{\mathbb{F}})$, une partie $A \subseteq \mathbb{E}$ et $\vec{a} \in A$.
On dit qu'une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{F}$ est *continue au point* $\vec{a}$ lorsque

$$f(\vec{x}) \underset{\vec{x} \to \vec{a}}{\longrightarrow} f(\vec{a})$$

Remarque. La définition de la continuité au point $\vec{a}$ s'écrit avec des quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall \vec{x} \in A, \quad \left\|\vec{x} - \vec{a}\right\|_{\mathbb{E}} \leq \alpha \Longrightarrow \left\|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\right\|_{\mathbb{F}} \leq \varepsilon$$

et en termes de voisinages :

$$\forall W \in \mathcal{V}(f(\vec{a})), \quad \exists V \in \mathcal{V}(\vec{a}), \quad \text{tel que } f(A \cap V) \subset W$$

On dispose de la caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

Théorème 10 – Caractérisation séquentielle de la continuité en un point

La fonction f est continue au point $\vec{a}$ si et seulement si pour *toute* suite $(\vec{a}_n) \in A^{\mathbb{N}}$ de points de A, $\vec{u}_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \vec{a} \Longrightarrow f(\vec{u}_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(\vec{a})$.

On dispose aussi d'une caractérisation de la continuité via les fonctions coordonnées.

Théorème 11 – Continuité des fonctions coordonnées

Soient deux evn $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$ et $(\mathbb{F}, \|.\|_{\mathbb{F}})$, $\mathbb{F}$ étant supposé de dimension finie et muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$.
Soient $A \subseteq \mathbb{E}$, $\vec{a} \in A$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)_{\mathscr{B}}$ On se ramène à l'étude de la continuité de chacune des applications f_i :

$$\begin{array}{ll} & f \text{ est continue au point } \vec{a} \\ \Longleftrightarrow & \text{les fonctions coordonnées } f_1, \ldots, f_n \text{ sont continues au point } \vec{a} \end{array}$$

2 Continuité d'une fonction sur une partie

2.1 Définition

Définition 12 – Continuité d'une fonction sur une partie

On dit que l'application $f : A \longrightarrow \mathbb{F}$ est (globalement) continue *sur* A lorsque f est continue en tout point de A.

On note $C(A; \mathbb{F})$ l'ensemble des fonctions continues sur A.

De même que pour la continuité en un point, on peut donner un théorème de caractérisation séquentielle de la continuité et un théorème de caractérisation par les fonctions coordonnées (dans le cas où $\mathbb{F}$ est de dimension finie).

2.2 Opérations sur les fonctions continues sur une partie

Théorème 13 – Continuité d'une composée

Soient trois evn, et deux applications

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{G}$$

Si f est continue sur A et g continue sur $B = f(A)$, alors la composée $g \circ f$ est continue sur A.

Théorème 14 – Combinaison linéaire de fonctions continues

Soient deux evn $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$ et $(\mathbb{F}, \|.\|_{\mathbb{F}})$, une partie $A \subseteq E$, deux applications $f, g : A \mapsto \mathbb{F}$ et deux scalaires $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Si f et g sont continues sur A, alors $\lambda.f + \mu.g$ est continue sur A.

En particulier $f + g$ et $\lambda.f$ sont continues sur A.

2.3 Fonctions lipschitziennes

Définition 15 – Fonctions lipschitziennes

Soient deux evn $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$ et $(\mathbb{F}, \|.\|_{\mathbb{F}})$, une partie $A \subseteq \mathbb{E}$ et une application $f : A \longrightarrow \mathbb{F}$.
On dit que l'application f est k-lipschitzienne si

$$\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in A^2, \quad \|f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{y})\|_{\mathbb{F}} \leq k\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|_{\mathbb{E}}$$

On dit qu'une application f est lipschitzienne s'il existe une constante $k > 0$ telle que f soit k-lipschitzienne.

✎ ***Exemple.*** L'ensemble des fonctions lipschitziennes sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$, noté $\mathrm{Lip}(A; \mathbb{K})$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

✎ ***Exemple.*** Une composée de fonctions lipschitziennes est une application lipschitzienne.

L'intérêt des fonctions lipschitziennes est donné par le théorème suivant.

Théorème 16 – Continuité des fonctions lipschitziennes

Une fonction lipschitzienne sur A est continue sur A.

✎ ***Exemple.*** Soit un evn $(E, \|.\|)$ et une partie $A \subset E$. Montrer que l' application $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto & \|\overrightarrow{x}\| \end{array}$ est lipschitzienne.

2.4 Propriétés topologiques des fonctions continues

Le résultat fondamental est le suivant.

Théorème 17 – Propriétés topologiques des fonctions continues

Soient $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$ et $(\mathbb{E}', \|.\|_{\mathbb{E}'})$ deux evn et $A \subseteq E$.
On considère une application $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ continue. Alors :

1. si $O \subseteq \mathbb{E}'$ est un ouvert de $\mathbb{E}'$, alors $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{E}$.
2. Si $F \subseteq \mathbb{E}'$ est un fermé de $\mathbb{E}'$, alors $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{E}$.

On rappelle la définition de *l'image réciproque* par f d'une partie B de $\mathbb{E}'$:

$$f^{-1}(B) = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{E} \middle/ f(\overrightarrow{x}) \in B\right\}$$

donc pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$:

$$\overrightarrow{x} \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(\overrightarrow{x}) \in B$$

⚠ L'image directe d'un ouvert par une fonction continue n'est pas un ouvert en général. Par exemple la fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, mais $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

On utilise très souvent cette propriété pour montrer qu'une partie d'un evn $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$ est ouverte ou fermée.

Corollaire 18 – Critère pour montrer qu'une partie est ouverte/fermée

Si $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$ est un evn, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue et $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\{\overrightarrow{x} \in E \mid f(\overrightarrow{x}) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$ est un fermé de $\mathbb{E}$;
2. $\{\overrightarrow{x} \in E \mid f(\overrightarrow{x}) < \alpha\} = f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ est un ouvert de $\mathbb{E}$;
3. $\{\overrightarrow{x} \in E \mid f(\overrightarrow{x}) \leq \alpha\} = f^{-1}(]\infty, \alpha])$ est un fermé de $\mathbb{E}$.

On a les mêmes résultats avec le signe supérieur.

✎ ***Exemple.*** Sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$ on définit la norme $\|P\| = \sup\limits_{t \in [0,1]} |P(t)|$.
Alors la partie $O = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \middle/ P(0) \neq 0\right\}$ est ouverte.

2.5 Exemples usuels de fonctions continues sur un evn

2.5.1 Applications linéaires

En dimension finie, on a le résultat fondamental suivant.

Théorème 19 – Applications linéaires en dimension finie

Si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $\mathbb{E}$ est de dimension finie, alors u est lispchitzienne, ie qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{E}^2, \quad \|u(\overrightarrow{x}) - u(\overrightarrow{y})\| \leq k.\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$$

En particulier, u est continue.

⚠ Ce résultat est faux si $\mathbb{E}$ est de dimension infinie.
Considérer $\mathbb{E} = \mathbb{F} = C^\infty([0,1];\mathbb{R})$, u l'endomorphisme de dérivation, et les fonctions $f_n : t \longmapsto t^n$.

✎ ***Exemple.*** L'application trace $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue.

✎ ***Exemple.*** L'application transposition $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est continue.

2.5.2 Applications multilinéaires

Soient $\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_p$ et $\mathbb{F}$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On rappelle qu'on appelle *application multilinéaire* de $\mathbb{E}_1 \times \ldots \mathbb{E}_p$ vers $\mathbb{F}$ toute application linéaire par rapport à chacune de ses p variables. Si $\mathbb{F} = \mathbb{K}$, on parle de *forme multilinéaire*.

✎ ***Exemple.*** Si $\mathbb{E}$ est un espace euclidien, alors le produit scalaire est une forme bilinéaire sur $\mathbb{E}^2$.

✎ ***Exemple.*** Le déterminant est une forme multilinéaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})^n$.
On a le résultat suivant.

Théorème 20 – Continuité des applications multilinéaires en dimension finie

Si $\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_p$ sont de dimension finie, alors toute application multilinéaire sur $\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_p$ est continue.

✎ ***Exemple.*** L'application det est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On en déduit que $Gl_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

2.5.3 Applications polynômiales à plusieurs variables

On généralise le résultat vu sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 21 – Continuité des applications polynômiales

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute application polynômiale sur $\mathbb{K}^n$ est continue.

2.6 Théorème des bornes atteintes

Il est connu que toute fonction réelle continue sur un segment $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Ce résultat se généralise de la manière suivante.

Théorème 22 – Théorème des bornes atteintes pour une fonction réelle

Si $\mathbb{E}$ est un espace de dimension finie et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est *continue* sur une partie A de $\mathbb{E}$ telle que A est *fermée et bornée*, alors f est bornée et ses bornes sont atteintes.
Précisons : cela signifie que $f\big(A) = [m, M]$ où on a posé

$$m = \min_{\vec{x} \in A} f(\vec{x}) \qquad \text{et} \qquad M = \max_{\vec{x} \in A} f(\vec{x})$$

Rappelons que, par définition d'un minimum et d'un maximum :

$$\exists \vec{\alpha} \in A / \ m = f(\vec{\alpha}) \qquad \text{et} \qquad \exists \vec{\beta} \in A / \ M = f(\vec{\beta})$$

et ainsi :

$$\forall \vec{x} \in A, \quad f(\vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{\beta})$$

En dimension finie, une partie fermée bornée est appelée partie *compacte*.

Si f n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}$, mais dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{F}, \|.\|_{\mathbb{F}})$, on peut appliquer le théorème à l'application $\|f\|_{\mathbb{F}}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \vec{x} & \longmapsto & \|f(\vec{x})\|_{\mathbb{F}} \end{array}$$

✎ ***Exemple.*** Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, si A est une partie de $\mathbb{E}$ fermée bornée et si $\vec{x} \in \mathbb{E}$:

$$\exists \vec{x}_0 \in A / \ d(\vec{x}, A) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_{\mathbb{E}}$$

✎ ***Exemple.*** Soient $A = (0,1)$, $B = (-1,1)$, $C = (-1,-1)$, $D = (0,-1)$ quatre points de $\mathbb{R}^2$, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = -2x^3 - x^2 - y^2 + 5$.
La restriction de f au rectangle $ABCD$ est bornée.

3 Exercices

Parties ouvertes/fermées

Exercice 1 – Exemples dans $\mathbb{R}^2$

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = f(y)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 – Graphe d'une fonction continue

Soit $f : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$ une application continue. On définit son graphe :

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F} \mid y = f(x)\}$$

Montrer que G est un fermé de $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$.

Exercice 3 – Orthogonal d'une partie

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (espace préhilbertien réel) et $A \subset \mathbb{E}$ une partie de $\mathbb{E}$. On définit l'orthogonal de la partie A par :

$$A^{\perp} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{E} \mid \forall \overrightarrow{a} \in A, \left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{a} \right\rangle = 0\}$$

Montrer que $A^{\perp}$ est un fermé.

Exercice 4 – Exemples dans $C^0\big([0,1], \mathbb{R},\big)$

Dans l'evn $E = C^0\big([0,1], \mathbb{R},\big)$ muni de la norme $\|.\|_{\infty}$, montrer que les parties suivantes sont fermées.

1. $A = \left\{ f \in E \mid \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$
2. $B = \{f \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, f(2^{-n}) \geq 0\}$

Exercice 5 – Images réciproques et continuité

Soit $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$.

1. Si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{E}'$ est ouvert dans $\mathbb{E}$, montrer que f est continue sur $\mathbb{E}$.
2. Soit $A \subseteq \mathbb{E}'$, vérifier que $\mathbb{E} \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{E}' \setminus A)$.

3. Montrer que si l'image réciproque de tout fermé de $\mathbb{E}'$ par f est un fermé de $\mathbb{E}$, alors f est continue sur $\mathbb{E}$.

Exercice 6 – Encore des exemples dans $C^0\big([0,1],\mathbb{R},\big)$

Soit $E = C^0\big([0,1],\mathbb{R},\big)$ muni de $\|.\|_\infty$.

1. Montrer que $O = \{f \in E \mid f(1) > 0\}$ est un ouvert.
2. Montrer que $F = \left\{f \in E \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leq 0\right\}$ est un fermé.

Fonctions lipschitziennes

Exercice 7 – Exemples de fonctions numériques

1. Si $f \in C^1(I;\mathbb{R})$ est une fonction telle que f' est bornée sur I, montrer que f est lipschitzienne sur I.
2. La fonction $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est-elle lipschitzienne ?
3. La fonction $\begin{array}{rcl} f:[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est-elle lipschitzienne ?

Exercice 8 – Une propriété des applications lipschitzienne

Soient deux evn $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ et une application lipschitzienne $f : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$. Montrer qu'il existe deux constantes $a, b > 0$ telles que $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$,

$$\left\|f(\overrightarrow{x})\right\| \leq a\left\|\overrightarrow{x}\right\| + b$$

Exercice 9 – Distance à une partie

Soit un evn $(\mathbb{E}, \|.\|)$ et une partie $A \subseteq \mathbb{E}$ non vide.
Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto & d(\overrightarrow{x}, A) \end{array}$$

est 1-lipschitzienne.

Normes subordonnées

Exercice 10 – Normes matricielles subordonnées

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ muni d'une norme $\|.\|$.

1. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que le réel $N(A) = \sup\limits_{\|X\| \leq 1} \|AX\|$ est bien défini.
   Calculer $N(I_n)$.
2. Vérifier que, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: $\|AX\| \leq N(A) \times \|X\|$.
3. Montrer que N définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Établir que, pour $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$: $N(AB) \leq N(A) \times N(B)$.
   En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $N\left(A^p)\right) \leq \left(N(A)\right)^p$.
5. Si $\|X\| = \|X\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|$, montrer que $N(A) = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$.
6. Si $\|X\| = \|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leq j \leq n} |x_j|$, montrer que $N(A) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$.

Exercice 11 – Norme subordonnée d'un endomorphisme

Soient deux evn $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$ et $(\mathbb{F}, \|.\|_{\mathbb{F}})$.

1. Si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, montrer qu'on a équivalence de :
   (i) u est continue sur $\mathbb{E}$;
   (ii) u est continue en 0 ;
   (iii) u est lipschitzienne ;
   (iv) u est uniformément continue ;
   (v) $\exists k \in \mathbb{R}^+ / \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E},\ \|u(\overrightarrow{x})\|_{\mathbb{F}} \leq \|\overrightarrow{x}\|_{\mathbb{E}}$.
2. Si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est continue, montrer que le réel $N(u) = \sup\limits_{\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}; \overrightarrow{x} \neq 0_{\mathbb{E}}} \dfrac{\|u(\overrightarrow{x})\|_{\mathbb{F}}}{\|\overrightarrow{x}\|_{\mathbb{E}}}$ est bien défini.
   Montrer ensuite que $N(.)$ est une norme sur $\mathbb{E}$.
3. Si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est continue, montrer que $N(u) = \sup\limits_{\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}; \|\overrightarrow{x}\|_{\mathbb{E}} = 1} \|u(\overrightarrow{x})\|_{\mathbb{F}}$
4. Si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est continue, montrer que $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E},\ \|u(\overrightarrow{x})\|_{\mathbb{F}} \leq N(u) \times \|\overrightarrow{x}\|_{\mathbb{E}}$.
   Montrer ensuite que $N(u) = \min\left\{k \in \mathbb{R}^+ / \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}, \|u(\overrightarrow{x})\|_{\mathbb{F}} \leq k \times \|\overrightarrow{x}\|_{\mathbb{E}}\right\}$.

Exercice 12 – Exemples de calculs de normes subordonnées

1. On note L^1 l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$, et on définit φ endomorphisme de L^1 par :

$$\varphi(f) : x \longmapsto \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminer $\sup\limits_{\|f\|_1} \left\|\varphi(f)\right\|_1$.

2. On note $\mathbb{E} = C^0([-1,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{-1\leq x\leq 1} |f(t)|\,\mathrm{d}t$, et on définit φ endomorphisme de $\mathbb{E}$ par :

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Trouver $k \in \mathbb{R}^+$ minimal tel que $\left|\varphi(f)\right| \leq \|f\|_\infty$.

Chapitre 12

Espaces probabilisés

Sommaire

1 Dénombrement . . . 268
- 1.1 Ensembles finis, ensembles dénombrables . . . 268
- 1.2 Dénombrement associés aux ensembles finis . . . 270
- 1.3 Coefficients binômiaux . . . 273
- 1.4 Techniques de dénombrement . . . 275

2 Vocabulaire et axiomatique des probabilités . . . 277
- 2.1 L'univers . . . 277
- 2.2 Évènements . . . 278
- 2.3 Opérations sur les évènements . . . 279
- 2.4 La tribu des évènements . . . 281
- 2.5 Systèmes complets d'évènements . . . 282
- 2.6 Probabilités sur un espace probabilisé quelconque . . . 283
- 2.7 Construction d'une probabilité sur un univers donné . . . 284
- 2.8 Exemple d'univers infini non dénombrable : $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. . . . 287
- 2.9 Propriétés de continuité monotone pour une probabilité . . . 287
- 2.10 Évènements négligeables et presque sûrs . . . 288

3 Probabilités conditionnelles . . . 289
- 3.1 Définition . . . 289
- 3.2 Formule des probabilités composées . . . 290
- 3.3 Formule des probabilités totales . . . 291
- 3.4 Formule de Bayes . . . 294

4 Indépendance . . . 295
- 4.1 Indépendance de deux évènements . . . 295
- 4.2 Indépendance mutuelle . . . 296
- 4.3 Compléments sur la formule des probabilités totales : propriété de Markov . . . 298

5 Exercices . . . 300

Dans ce chapitre nous allons généraliser la notion d'espace probabilisé à des univers Ω de cardinal infinis.

1 Dénombrement

1.1 Ensembles finis, ensembles dénombrables

Définition 1 – Ensemble fini - Cardibal

Soit E un ensemble non vide. On dit qu'il est *fini* lorsqu'il existe un entier naturel n et une bijection $\varphi : E \longrightarrow [\![1, n]\!]$. Le choix de n est alors unique : on l'appelle le *cardinal* de E, noté $\mathrm{Card}(E)$, $\#E$ ou encore $|E|$.

On adopte aussi la convention suivante : $\emptyset$ est un ensemble fini de cardinal égal à 0.

Si E est fini de cardinal $n \neq 0$ alors on peut *numéroter* ses éléments de 1 à n : $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Donnons tout d'abord le nombre d'entiers compris entre deux autres entiers n et p.

Proposition 2 – Un exemple important

Si $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq p$, alors $[\![n, p]\!]$ est un ensemble fini et $\#[\![n, p]\!] = p - n + 1$.
En particulier $\#[\![0, n]\!] = n + 1$ et $\#[\![1, n]\!] = n$.

Pour dénombrer de manière rigoureuse, on utilise le résultat suivant. Mais en pratique, la rédaction est délicate.

Théorème 3 – Ensembles finis en bijection

Soient E et F deux ensembles. On suppose que :
(i) E est fini ;
(ii) il existe une bijection $\psi : E \longrightarrow F$.
Alors F est fini et $\#E = \#F$.

Conformément à l'intuition, les parties d'un ensemble fini sont elles aussi finies.

Théorème 4 – Parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini.

1. Toute partie A de E est finie et vérifie $\#A \leq \#E$.
2. Si $A \subseteq E$: $A = E \Longleftrightarrow \#A = \#E$.

⚠ ATTENTION : en général si $\#A \leq \#E$, on ne peut pas dire que $A \subseteq E$.
De même, si $\#A = \#E$, on ne peut pas dire que $A = E$.

Une application entre deux ensembles *finis* vérifie les propriétés suivantes.

Théorème 5 – Applications entre ensembles finis / Principe des tiroirs

Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Si f est injective alors $\#E \leq \#F$.
2. Si f est surjective alors $\#E \geq \#F$.
3. Si $\#E = \#F$ alors :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

Schubfachprinzip de Dirichlet : « Si n chaussettes occupent m tiroirs, et si $n > m$, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette. Une autre formulation serait que m tiroirs ne peuvent contenir strictement plus de m chaussettes avec une seule chaussette par tiroir ; ajouter une autre chaussette obligera à réutiliser l'un des tiroirs ».

✎ ***Exemple.*** On choisit 11 nombres réels dans l'intervalle $[0, 10[$. Montrer qu'au moins deux de ces nombres ont la même partie entière.

On définit aussi les ensembles *infinis*.

Définition 6 – Ensembles infinis

Si E n'est pas fini, on dit qu'il est infini. Son cardinal est dit transfini.

Dès qu'on manipule l'infini mathématique, l'intuition peut rapidement être mise en défaut.

⚠ Les cardinaux transfinis ne sont pas tous égaux !
Par exemple on peut montrer que $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$ (hors-programme), et même que $2^{\#\mathbb{N}} = \#\mathbb{R}$.

Définition 7 – Ensembles dénombrables

On dit que E est dénombrable lorsqu'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ (dans ce cas E est infini).
On dit que E est au plus dénombrable lorsque E est fini ou dénombrable.

Intuitivement le fait pour un ensemble d'être dénombrable signifie qu'on peut *compter* ou *énumérer* ses éléments.

Un ensemble *fini* peut se noter en extension : $E = \{x_1, \ldots, x_p\}$.

Un ensemble *infini dénombrable* peut se noter en extension : $E = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$.

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne le sont pas.

Le seul résultat à connaître sur les ensembles dénombrables est le suivant.

Théorème 8 – Produit cartésien d'ensembles dénombrables

Si E et F sont dénombrables, leur produit cartésien $E \times F$ est aussi dénombrable.

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^3$, $\mathbb{N}^4$ ... sont dénombrables.

L'ensemble $\mathbb{R}$, et tout ensemble en bijection avec $\mathbb{R}$, n'est pas dénombrable. On dit que $\mathbb{R}$ a *la puissance du continu.*

1.2 Dénombrement associés aux ensembles finis

Pour dénombrer de manière rapide, on se ramène à certaines situations connues.

1.2.1 Dénombrement dans un ensemble fini

On sait dénombrer le nombre de parties d'un ensemble fini.

Théorème 9 – Dénombrement des parties d'un ensemble fini

Si E est fini alors $\mathscr{P}(E)$ l'est aussi et $\#\mathscr{P}(E) = 2^{\#E}$.

Une méthode très riche consiste à partitionner un ensemble en parties qu'on sait dénombrer.

Théorème 10 – Principe des bergers

1. Si A et B sont deux ensembles finis et disjoints alors $A\cup B$ est fini et $\#(A\cup B) = \#A+\#B$.
2. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles finis et deux à deux disjoints : $\#\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \#A_k$.

✎ ***Exemple.*** « Quand les bergers veulent compter leurs moutons, ils comptent leurs pattes et divisent par quatre ».

On en déduit les formules classiques de dénombrement.

Corollaire 11 – Cardinal d'une différence

Si A et B sont deux ensembles finis : $\#(B\setminus A) = \#B - \#(A\cap B)$.

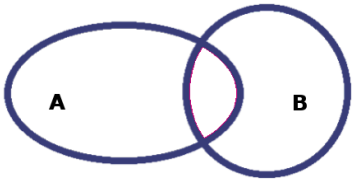
Rappelons que $B\setminus A = B - A = \{x\in B \,/\, x\notin A\}$ est la *différence* de A et B, qu'on lit « B moins A ». Si A est inclus dans B, alors $B\setminus A$ est le *complémentaire* de A dans B, noté $\complement_B A$. D'autre part, si A et B sont deux parties d'un ensemble Ω, alors $B\setminus A = B\cap\overline{A}$ où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans Ω.

Corollaire 12 – Cardinal d'une union

Si A et B sont deux ensembles finis alors $A \cap B$ et $A \cup B$ sont finis et :

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Ces formules se retrouvent facilement à l'aide d'un diagramme :



On obtient aussi le cardinal du complémentaire d'un ensemble fini.

Corollaire 13 – Cardinal du complémentaire

Si E est fini et A est une partie de E alors : $\#\overline{A} = \#E - \#A$.

Un produit cartésien d'ensembles finis donne encore un ensemble fini.

Théorème 14 – Cardinal d'un produit cartésien

Si E et F sont finis alors $E \times F$ est fini et $\#(E \times F) = (\#E).(\#F)$
(le point désigne la multiplication des nombres).

1.2.2 Dénombrement de p-listes

Rappelons la définition d'une *p-liste*.

Définition 15 – p-listes

On appelle p-liste d'éléments d'un ensemble F tout p-uplet d'éléments de F, noté $(x_1, \ldots, x_p)$ avec $x_i \in F$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.
Ces éléments x_i sont appelés *composantes* de la p-liste.

L'ensemble des p-listes d'éléments de F est donc le produit cartésien F^p.

⚠ Rappelons la différence entre la p-liste $(x_1, \ldots, x_p)$ et l'ensemble défini en extension $\{x_1, \ldots, x_p\}$:
- dans une p-liste les éléments ne sont pas nécessairement distincts, et leur ordre est pris en compte ;
- dans un ensemble défini en extension, les éléments sont deux à deux distincts, et leur ordre d'énumération n'est pas pris en compte.

On sait dénombrer les p-listes.

Théorème 16 – Dénombrement des p-listes

Le nombre de p-listes d'éléments de F est égal à $(\#F)^p$.

✎ ***Exemple.*** $\#[\![1;6]\!]^2 = 36$.

Lorsque ses composantes sont deux à deux distinctes, une p-liste est appelé *arrangement*.

Définition 17 – Arrangements

Si F est un ensemble fini tel que $\#F = n$ et p un entier naturel non nul, on appelle arrangement de p éléments de F toute p-liste d'éléments de F, dont les composantes sont *deux à deux distinctes*.

On sait dénombrer les arrangements.

Théorème 18 – Dénombrement des arrangements

Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n, noté A_n^p, est égal à :

$$A_n^p = \begin{cases} n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } n \geq p \\ 0 & \text{si } n < p \end{cases}$$

avec $n = \#F$ et $p = \#E$.

✎ ***Exemple.*** $A_3^7 = 0$ et $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5$.

Dans le cas $p \leq n$, on calcule A_n^p en multipliant entre eux les p entiers inférieurs ou égaux à n.

1.2.3 Dénombrement des applications entre ensembles finis

On sait aussi dénombrer les applications entre deux ensembles finis.

Théorème 19 – Dénombrement des applications

Si E et F sont deux ensembles finis alors F^E est fini et $\#F^E = (\#F)^{\#E}$.

✎ ***Exemple.*** Si $n = \#E$ alors $\#\left(\{0,1\}^E\right) = 2^n$, et donc $\#\mathscr{P}(E) = 2^n$.

On va maintenant dénombrer les applications injectives.

Théorème 20 – Dénombrement des applications injectives

Soient E et F deux ensembles finis.

1. Si $\#E \leq \#F$, il y a au total $\dfrac{(\#F)!}{(\#F-\#E)!} = A_{\#F}^{\#E}$ applications injectives sur E à valeurs dans F.

2. Si $\#E > \#F$, il y n'a aucune application injective sur E à valeurs dans F.

On en déduit le nombre de bijections.

Corollaire 21 – Dénombrement des bijections

Si $\#E = \#F$ alors le nombre de bijections de E sur F est égal à $(\#E)!$.
Si $\#E \neq \#F$ alors il n'existe pas de bijection de $\#E$ sur $\#F$.

En particulier, on obtient le dénombrement des *permutations*.

Définition 22 – Permutations

On appelle *permutation* de E toute bijection de E sur E.

Théorème 23 – Dénombrement des permutations

Si E est fini de cardinal n, le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Le dénombrement des surjections est plus compliqué et n'est pas au programme.

1.3 Coefficients binômiaux

Définition 24 – Coefficients binômiaux

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \in [\![0,n]\!]$. On pose $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

$\binom{n}{p}$ se lit « p parmi n ». La notation C_n^p n'est plus utilisée aujourd'hui.
Si $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$ et que l'une des deux conditions $n \geq 0$ ou $p \in [\![0,n]\!]$ n'est pas vérifiée on adopte la convention $\binom{n}{p} = 0$.

Nous allons voir que ces nombres interviennent dans de très nombreuses formules.

Théorème 25 – Nombre de parties à p éléments

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, le nombre de parties de E à p éléments est égal à $\binom{n}{p}$.

Définition 26 – Combinaisons

Si E est un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$, on appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E dont le cardinal est égal à p.

Théorème 27 – Dénombrement des combinaisons

Si E est fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$, le nombre de combinaisons à p éléments de E est égal à $\binom{n}{p}$ (la formule est vraie même si $n < p$).

Proposition 28 – Règles de calcul

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$.

1. Factorisation : si $p \neq 0$, $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.
2. Addition ou formule de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.
3. Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
4. $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{n-2}$.

En pratique on peut calculer les $\binom{n}{p}$ à l'aide de leur définition avec des factorielles :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

✎ ***Exemple.*** $\binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 20 \times 19 \times 3 = 1140.$

Pour de petites valeurs de n la formule de factorisation permet de construite le **triangle de Pascal**. Dans un tableau dont les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0, on place la valeur de $\binom{n}{p}$ à l'intersection de la ligne n et la colonne p. La formule de Pascal donne que la somme de deux coefficients consécutifs sur la même ligne (colonnes p et $p+1$), donne le coefficient situé sur la ligne suivante,colonne $p+1$. Au départ on part d'un tableau avec des 1 sur la colonne 0 et sur la diagonale.

✎ ***Exemple.***

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & \\ 1 & & & 1 & & & \\ 1 & & & & 1 & & \\ 1 & & & & & 1 & \\ 1 & & & & & & 1 \end{array} \quad \text{donne} \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

et on en déduit $\binom{6}{3} = 20$.

Proposition 29 – Les coefficients binômiaux sont des nombres entiers naturels

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

1.4 Techniques de dénombrement

Pour bien dénombrer les éléments d'un ensemble fini E il faut :

- ne compter que les éléments de E ;
- ne pas en oublier ;
- ne pas compter plusieurs fois le même élément, ou penser à rectifier le résultat final.

Si on dénombre des objets en les décrivant **par étapes successives** (pour une carte : on choisit sa couleur puis sa hauteur), il faut à la fin **multiplier** les résultats.

Si on dénombre par **disjonction des cas**, il faut à la fin **additionner** les résultats (c'est le lemme des bergers).

• **p-listes :** si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **avec répétition autorisée, l'ordre des tirages étant pris en compte**, alors on a n^p possibilités au total.

✎ ***Exemple.*** Nombre de coloriages possibles d'une carte des 27 pays de l'UE, avec 4 couleurs = 4^{27}.

✎ ***Exemple.*** Nombre de tirages successifs **avec remise** de p boules dans une urne de n boules = n^p.

• **Arrangements :** si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **sans répétition, l'ordre des tirages étant pris en compte**, alors on a A_n^p possibilités au total.

✎ ***Exemple.*** Nombre de coloriages possibles d'une carte des 27 pays de l'UE, avec 40 couleurs, de telle sorte que chaque pays ait une couleur différente de celle des autres = A_{40}^{27}.

✎ ***Exemple.*** Nombre de tirages successifs **sans remise** de p boules dans une urne de n boules = A_n^p.

• **Combinaisons :** si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **sans répétition, l'ordre des tirages n'étant pas pris en compte**, alors on a $\binom{n}{p}$ possibilités au total.

✎ ***Exemple.*** Nombre d'équipes de football possibles dans une classe de 45 élèves = $\binom{45}{11}$.

✎ ***Exemple.*** Nombre de tirages **simultanées** de p boules dans une urne de n boules = $\binom{n}{p}$.

⚠ Le cas du choix de p éléments dans un ensemble à n éléments, **avec répétition, l'ordre des tirages n'étant pas pris en compte**, n'est pas au programme.

• **Permutations :** si on permute n éléments, alors on a $n!$ possibilités au total.

✎ ***Exemple.*** Nombre de façons de ranger 10 manteaux dans une penderie = 10!.

⚠ Lorsqu'on permute les éléments, certains peuvent revenir à leur position intiale ! (on parle de points fixes).

• **Situations plus complexes :**

⋆ On dispose d'une urne de n boules dont n_1 sont noires et n_2 sont blanches. On tire p boules dans cette urne. Le nombre de tirages différents donnant p_1 blanches et p_2 noires ($p_1 + p_2 = p$) qu'on peut obtenir est :

$\longrightarrow$ $\underbrace{\binom{n_1}{p_1}\binom{n_2}{p_2}}_{\textit{Choix des boules}}$ si les boules sont tirées simultanément ;

$\longrightarrow$ $\underbrace{A_{n_1}^{p_1} A_{n_2}^{p_2}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et sans remise ;

$\longrightarrow$ $\underbrace{n_1^{p_1} n_2^{p_2}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et avec remise.

⋆ On dispose d'une urne de n boules dont n_1 sont noires, n_2 sont blanches et n_3 sont rouges. On tire p boules dans cette urne. Le nombre de tirages différents donnant p_1 noire, p_2 blanches et p_3 rouges ($p_1 + p_2 + p_3 = p$) qu'on peut obtenir est :

$\longrightarrow$ $\underbrace{\binom{n_1}{p_1}\binom{n_2}{p_2}\binom{n_3}{p_3}}_{\textit{Choix des boules}}$ si les boules sont tirées simultanément ;

$\longrightarrow$ $\underbrace{A_{n_1}^{p_1} A_{n_2}^{p_2} A_{n_3}^{p_3}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}\binom{p-p_1}{p_2}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et sans remise ;

$\longrightarrow$ $\underbrace{n_1^{p_1} n_2^{p_2} n_3^{p_3}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}\binom{p-p_1}{p_2}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et avec remise.

⋆ Etc… Ces formules se généralisent facilement.

2 Vocabulaire et axiomatique des probabilités

2.1 L'univers

On considère une expérience aléatoire (= expérience dont le résultat ne peut pas être prédit ou calculé à l'avance).

On désigne par Ω l'ensemble des résultats possibles de cette expérience aléatoire.

Ω est appelé **univers** ou encore **espace des possibles**, **espace des réalisations** ou **espace des observations**. Les éléments $\omega \in \Omega$ sont appelés **observations** ou **réalisations** de l'expérience aléatoire.

Donnons tout d'abord les exemples usuels d'univers finis.

✎ ***Exemple.*** On lance un dé à 6 faces : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} = [\![1,6]\!]$. Un élément $\omega \in \Omega$ est un chiffre entre 1 et 6 qui représente le chiffre obtenu en lançant le dé.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés à 6 faces distinguables : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} \times \{1;2;3;4;5;6\} = [\![1,6]\!]^2$. Un élément $\omega \in \Omega$ est un couple (ω_1, ω_2) où ω_1 représente le chiffre obtenue avec le premier dé, et ω_2 le chiffre obtenu avec le second.

✎ ***Exemple.*** On lance 1 fois une pièce : $\Omega = \{P, F\}$ ou $\Omega = \{0,1\}$ avec la convention que « 1 » représente « pile », et « 0 » représente « face ».

✎ ***Exemple.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce : $\Omega = \{P, F\}^n$ ou $\Omega = \{0,1\}^n$ avec la convention que « 1 » représente « pile », et « 0 » représente « face ». Un élément $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des résultats obtenus aux n lancers. Par exemple pour 6 lancers, on peut avoir $\omega = (P, P, F, P, F, P)$ qui se note aussi $\omega = (1,1,0,1,0,1)$.

✎ ***Exemple.*** Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$.

• On effectue n tirages successifs **avec remise** d'une boule, dans une urne de N boules : $\Omega = [\![1, N]\!]^n$. Ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des numéros tirés.

Par exemple $\omega = (6,2,2,6,4,3,5)$ pour 7 tirages avec remise dans une urne de 6 boules.

• On effectue n tirages successifs **sans remise** d'une boule, dans une urne de N boules (dans ce cas $n \leq N$) : Ω = ensemble des arrangements de n éléments de $[\![1, N]\!]$ = ensemble des n-uplets $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in [\![1, N]\!]^n$ dont les composantes sont deux à deux distinctes. Encore une fois ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des numéros tirés.

Par exemple $\omega = (6,2,3)$ pour 3 tirages sans remise dans une urne de 10 boules.

• On effectue 1 tirage de n boules prises **simultanément** dans une urne de N boules (dans ce cas $n \leq N$) : Ω = ensemble des combinaisons de n éléments de $[\![1, N]\!]$ = ensemble des parties $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \subseteq [\![1, N]\!]$. Encore une fois ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \in \Omega$ est une partie qui représente les numéros tirés.

Par exemple $\omega = \{6,2,3\}$ pour 1 tirage de 3 boules prises simultanément dans une urne de 10 boules.

✎ ***Exemple.*** On mélange une jeu de n cartes : $\Omega = \{\omega : [\![1, n \longrightarrow [\![1, n]\!] / \omega \text{ bijective}\}$. Ceci sous-entend qu'on a numéroté les cartes de 1 à n en fonction de leur position initiale. Pour la carte numéro i, l'entier $\omega(i)$ représente sa position après la permutation ω.

Donnons ensuite des exemples d'univers infinis.

✎ ***Exemple.*** On lance une infinité de fois une pièce : $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ ou $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Un élément $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$ est une suite réelle qui représente la liste des résultats obtenus aux lancers, le terme de rang n (ie ω_n) représentant le résultat du $(n+1)$-ième lancer. Par exemple n'obtenir que des « pile » se note $\omega = (1,1,1,\dots)$.

✎ ***Exemple.*** Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
On effectue une infinité de tirages successifs **avec remise** d'une boule, dans une urne de p boules : $\Omega = [\![1,p]\!]^{\mathbb{N}}$. Ceci sous-entend qu'on a numéroté les p boules de 1 à p ; un élément $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle qui représente la liste des numéros tirés, la terme de rang n (ie ω_n) représente le numéro obtenu lors du du n-ième tirage.

2.2 Évènements

Intuitivement, un évènement A est défini par une phrase qui peut être vraie ou fausse selon le résultat de l'expérience aléatoire.

✎ ***Exemple.*** On lance un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1,6]\!]$.
A = « obtenir un 6 » donne la partie de Ω : $A = \{6\}$
B = « obtenir un nombre pair » donne la partie de Ω : $B = \{2;4;6\}$

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés à 6 faces distinguables : $\Omega = [\![1,6]\!]^2$.
A = « obtenir un double 6 » donne la partie de Ω : $A = \{(6,6)\}$
B = « obtenir un double » donne la partie de Ω :

$$\begin{aligned} B &= \{(i,i) \,/\, i \in [\![1,6]\!]\} \\ &= \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\} \end{aligned}$$

C = « obtenir au moins un 6 » donne la partie de Ω :

$$\begin{aligned} C &= \{(i,6) \,/\, i \in [\![1,6]\!]\} \cup \{(6,j) \,/\, j \in [\![1,6]\!]\} \\ &= \{(1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5)\} \end{aligned}$$

✎ ***Exemple.*** On mélange un jeu de n cartes : $\Omega = \{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \,/\, \omega \text{ bijective}\}$.
A = « la première carte se retrouve dans la première moitié du paquet » donne la partie de Ω :

$$A = \left\{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \text{ bijective} \,/\, \omega(1) \leq \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right\}$$

Pour $i \in [\![1,r]\!]$ fixé, B_i = « la carte numéro i n'a pas changé de place » donne la partie de Ω :

$$B = \left\{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \text{ bijective} \,/\, \omega(i) = i\right\}$$

On voit sur ces exemples qu'un évènement A est nécessairement **une partie de** Ω, ie que $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

Si on note $\mathscr{A}$ l'**ensemble de tous les évènements** qu'on peut associer à l'expérience aléatoire, alors $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$.

Une question vient naturellement : a-t-on l'égalité $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$?
On admettra que sous l'hypothèse que Ω est fini ou dénombrable, l'ensemble des évènements est $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, ie que toutes les parties de Ω sont des évènements : on pourra donc calculer leur probabilité.

Dans le cas d'un univers infini non dénombrable, certaines parties de Ω ne pourront pas être considérées comme des évènements ; nous ne développerons pas ce point cette année.

Retenons simplement que $\mathscr{A} \subsetneq \mathscr{P}(\Omega)$ et que $\mathscr{A}$ ne sera pas précisé, par souci de simplicité. La seule chose à savoir sera que $\mathscr{A}$ représente l'ensemble de toutes les parties de Ω qui sont des *évènements*, ie dont on peut calculer la probabilité.

Vocabulaire :

- On dit que l'**observation** $\omega \in \Omega$ **réalise l'évènement** A lorsque $\omega \in A$. Inversement, si $\omega \notin A$, on dit que l'observation ω **ne réalise pas** A.
- L'évènement $\emptyset$ est appelé **évènement impossible**.
- L'évènement Ω est appelé **évènement certain**.

Il est clair qu'aucune observation ne réalise l'évènement impossible $\emptyset$, et que toutes les observations réalisent l'évènement certain Ω.

Dans le cas des probabilités discrètes, on utilise souvent les *évènements élémentaires*.

Définition 30 – Évènements élémentaires

On appelle évènements élémentaires les singletons de Ω, ie les évènements de la forme $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$.

Une remarque importante : tout évènement A est réunion d'évènements élémentaires. En effet, on a :

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

La notion de *famille* généralise la notion de p-listes et de suite.

Définition 31 – Famille d'évènements

Une famille d'évènements $(A_i)_{i \in I}$ indexée par I est une application $i \in I \longmapsto A_i \in \mathscr{A}$.
Pour chaque $i \in I$, A_i est donc un évènement.

Pour $I = [\![1, p]\!]$, $(A_i)_{1 \leq i \leq p} = (A_1, \dots, A_p)$ est une p-liste d'évènements ou une *famille finie* de p évènements.

Pour $I = \mathbb{N}$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *suite d'évènements*.

2.3 Opérations sur les évènements

Définition 32 – Opérations sur les évènements

Soient A et B deux évènement, c'est-à-dire $(A, B) \in \mathscr{A}^2$.

1. Contraire. L'évènement $\complement_\Omega A = \overline{A}$ est appelé contraire de A.
   Pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in \overline{A} \iff \omega \notin A$
   Autrement dit : $\overline{A}$ est réalisé $\iff$ A n'est pas réalisé
2. Union. Pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in A \cup B \iff \omega \in A$ ou $\omega \in B$
   Autrement dit : $A \cup B$ est réalisé $\iff$ A est réalisé $\boxed{\text{ou}}$ B est réalisé
3. Intersection. Pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in A \cap B \iff \omega \in A$ et $\omega \in B$
   Autrement dit : $A \cap B$ est réalisé $\iff$ A est réalisé $\boxed{\text{et}}$ B est réalisé

4. Différence. Pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in A \backslash B \iff \omega \in A$ et $\omega \notin B$
   Autrement dit : $A \backslash B$ est réalisé $\iff$ A est réalisé et B n'est pas réalisé
5. Implication. $A \subseteq B$ signifie que, pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in A \Longrightarrow \omega \in B$
   Autrement dit : A est réalisé $\Longrightarrow$ B est réalisé

Rappels : Si A, B et C sont des évènements :

$A \backslash B \subseteq A$	$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$	
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(distributivité)
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	(commutativité)
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \Omega = A$	
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	(lois de Morgan)

⚠ Grâce à *l'associativité*, $A \cap B \cap C$ désigne $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
Par contre l'expression $A \cap B \cup C$ n'a **aucun sens** puisque $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$.

Généralisation pour $(A_i)_{i \in I}$ famille d'évènements :

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \qquad \text{(lois de Morgan)}$$

$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) \qquad B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i) \qquad \text{(distributivité)}$$

• L'évènement $\bigcup_{i \in I} A_i$ correspond à l'évènement « au moins un des A_i est réalisé » :

$$\omega \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I / \omega \in A_i$$

• L'évènement $\bigcap_{i \in I} A_i$ correspond à l'évènement « tous les A_i sont réalisés » :

$$\omega \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, \omega \in A_i$$

• L'évènement $\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ correspond à l'évènement « aucun des A_i n'est réalisé ».

Définition 33 – Évènements incompatibles

1. Deux évènements A et B sont dits *incompatibles* lorsqu'ils sont disjoints :

$$A \cap B = \emptyset$$

2. Les évènements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont dits *deux à deux incompatibles* lorsque :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

Intuitivement, A et B sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas se produire simultanément.

✎ ***Exemple.*** Lorsqu'on lance un dé à 6 faces : les évènements A = « obtenir un chiffre pair » et B = « obtenir un chiffre impair » sont incompatibles.

2.4 La tribu des évènements

Nous avons vu qu'en général l'ensemble $\mathscr{A}$ de tous les évènements vérifie : $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$.

D'autre part, il est clair que l'intersection ou l'union de deux évènements doit encore être un évènement etc...L'ensemble $\mathscr{A}$ doit donc vérifier certaines hypothèses qui sont données dans la définition suivante.

Définition 34 – Tribu d'évènements

Soit $\mathscr{A}$ un ensemble de parties de Ω, ie $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$. On dit que $\mathscr{A}$ est une *tribu d'évènements* lorsque :
(i) $\Omega \in \mathscr{A}$;
(ii) $\mathscr{A}$ est stable par passage au *complémentaire* :

$$\forall A \in \mathscr{A}, \quad \overline{A} \in \mathscr{A}$$

(iii) $\mathscr{A}$ est stable par *union dénombrable* :

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, \quad \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$$

Précisons quelques notations :
• $\mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites d'évènements, donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ signifie simplement que $A_n \in \mathscr{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
• $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est égal à $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

✎ ***Exemple.*** Pour tout univers Ω, on a les exemples triviaux de tribus suivants : $\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.

En pratique si Ω est fini ou dénombrable (ie en bijection avec $\mathbb{N}$), on choisira $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Dans les autres cas (univers infinis non dénombrables, par exemple $\Omega = \mathbb{R}$), on ne précisera pas la tribu $\mathscr{A}$ par souci de simplicité (et parce que le programme de PSI ne permet pas de la décrire rigoureusement).

Donnons maintenant les propriétés algébriques d'une tribu d'évènements.

Théorème 35 – Propriétés d'une tribu d'évènements

Soit $\mathscr{A}$ une tribu d'évènements. Alors :

(iv) $\emptyset \in \mathscr{A}$;

(v) $\mathscr{A}$ est stable par *union finie* :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall (A_1, \dots, A_N) \in \mathscr{A}^N, \quad \bigcup_{k=1}^{N} A_k \in \mathscr{A}$$

(vi) $\mathscr{A}$ est stable par *intersection dénombrable* :

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, \quad \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$$

(vii) $\mathscr{A}$ est stable par *intersection finie* :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall (A_1, \dots, A_N) \in \mathscr{A}^N, \quad \bigcap_{k=1}^{N} A_k \in \mathscr{A}$$

Définition 36 – Espace probabilisable

Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathscr{A})$, où Ω est l'univers et $\mathscr{A}$ est une tribu d'évènements.

✎ ***Exemple.*** Sur $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ on peut choisir comme tribu :
• $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ si on s'intéresse au chiffre obtenu en lançant un dé ;
• $\mathscr{A} = \{\emptyset; \{2,4,6\}; \{1,3,5\}, \Omega\}$ si on s'intéresse seulement à la parité du chiffre obtenu en lançant un dé.
Le choix de la tribu dépend donc de l'expérience à modéliser.

Intuitivement, le choix de la tribu va donc dépendre de l'information dont on dispose sur l'expérience aléatoire qu'on observe.

2.5 Systèmes complets d'évènements

Définition 37 – Système complet d'évènements

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements de Ω. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements (= s.c.e.) lorsque :
(i) les $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux incompatibles :

$$\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

(ii) $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$
(iii) $\forall i \in I, \quad A_i \neq \emptyset$

Un système complet d'évènements est donc une *partition* de Ω, avec la condition supplémentaire que la partition soit constitué uniquement d'évènements.

Intuitivement, un s.c.e. correspond à une disjonction des cas, suivant le résultat de l'expérience aléatoire.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés à 6 faces. On définit les évènements A = « obtenir deux chiffres pairs », B = « obtenir deux chiffres impairs » et C = « obtenir un chiffre pair et un chiffre impair ».
Alors (A, B, C) est un s.c.e..

✎ ***Exemple.*** Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$, alors $\left(A, \overline{A}\right)$ s.c.e..

✎ ***Exemple.*** On lance une infinité de fois une pièce de monnaie. On note P_∞ = « on obtient une infinité de piles », et pour $n \in \mathbb{N}$, P_n = « on on obtient exactement n piles ». Alors la famille $(P_\infty, P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots)$ est un s.c.e.. Remarquez que sur cet exemple, on a une famille composée d'un infinité d'évènements.

Proposition 38 – Décomposition d'un évènement sur un s.c.e.

Tout évènement se décompose sur un s.c.e. $(A_i)_{i\in I}$ en une union d'évènements deux à deux incompatibles :

$$\forall B \in \mathscr{P}(\Omega), \quad B = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$$

et les $\left(B \cap A_i\right)_{i\in I}$ sont deux à deux incompatibles.
Autrement dit la famille $(B \cap A_i)_{i\in I}$ est une partition de B.

2.6 Probabilités sur un espace probabilisé quelconque

Définition 39 – Probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$ telle que :
(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
(ii) $\mathbb{P}$ est σ-*additive* :

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, \quad \text{les } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont 2 à 2 incompatibles} \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Si A est un évènement, alors le réel $\mathbb{P}(A)$ est appelé probabilité de l'évènement A.

Dans le point (ii), il est sous-entendu que : si les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ converge.

Le σ devant la propriété de σ-additivité signifie qu'on prend une famille dénombrable, et qu'on obtient la somme d'une série.

⚠En général (si les évènements ne sont pas deux à deux incompatibles), la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est divergente !

Donnons un exemple de calcul de la probabilité d'un évènement du type $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

✎ ***Exemple.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne composée de n boules noires, 1 boule rouge et 1 boule verte (donc $n+2$ boules au total). On effectue une infinité de tirages successifs d'une boule avec remise.
Montrer que la probabilité de l'évènement E = « au moment où on obtient la boule rouge pour la première fois, la boule verte n'a jamais été obtenue » est égale à $\frac{1}{2}$.

Définition 40 – Espace probabilisé

Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ où Ω est l'univers, $\mathscr{A}$ est la tribu des évènements et $\mathbb{P}$ est une probabilité définie sur $\mathscr{A}$.

Théorème 41 – Propriétés d'une probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors :
(iii) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
(iv) $\mathbb{P}$ est *additive* :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{A}^n, \text{les } (A_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \text{ 2 à 2 incompatibles} \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

On se donne deux évènements A et B :
(v) $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
(vi) $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et donc si $B \subseteq A$, alors $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$;
(vii) si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
(viii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Dans le cas d'une union d'évènements non incompatibles, on dispose de l'inégalité de Boole.

Théorème 42 – Inégalité de Boole

1. Si $(A_1, \dots, A_N)$ est une famille finie d'évènements, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(A_k)$$

2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements telle que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Si la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, on peut poser $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ (dans le cas d'une série divergente à termes positifs, les sommes partielles divergent vers $+\infty$). Dans ce cas l'inégalité est encore vérifiée puisque $1 \leq +\infty$.

2.7 Construction d'une probabilité sur un univers donné

2.7.1 Cas d'un univers fini

On considère un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{F})$ où Ω est fini. Dans ce cas, on choisit $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ (toute partie de Ω est un évènement).

Pour définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{P}(\Omega)$, il faut se donner $\mathbb{P}(A)$ pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, ce qui

n'est pas toujours possible. On va démontrer qu'il suffit de définir $\mathbb{P}$ sur les évènements élémentaires.

On note $n = \#\Omega$ et $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Théorème 43 – Probabilité sur un univers fini

1. Soit $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ avec Ω fini. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $p_i = \mathbb{P}\big(\{\omega_i\}\big)$. Alors les réels $p_1, \dots, p_n$ sont dans $[0, 1]$ et vérifient $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
2. Réciproque. On se donne des réels $p_1, \dots, p_n$ vérifiant :
   • ils sont positifs ;
   • $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
   Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}\big(\{\omega_i\}\big)$. Et donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \in [0, 1]$.

C'est le deuxième point que nous utiliserons pour définir une probabilité dans le cas d'un univers fini. Cette probabilité $\mathbb{P}$ vérifie :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i$$

Par exemple, si $A = \{\omega_2, \omega_5, \omega_6\}$, alors : $\mathbb{P}(A) = p_2 + p_5 + p_6$.

En pratique, il suffit donc de connaître la probabilité des évènements élémentaires, pour être capable de calculer la probabilité de n'importe quel évènement.

✎ ***Exemple.*** On lance un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1, 6]\!]$ et $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. On définit une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$ par :

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{12}; \quad p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{4}$$

ce qui modélise un dé **truqué**.
On a alors $\mathbb{P}(\text{« Chiffre pair »}) = \dfrac{7}{12}$.

✎ ***Exemple.*** On reprend le même espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{F})$ et on définit une autre probabilité $\mathbb{Q}$ par :

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = \frac{1}{6}$$

ce qui modélise un dé **équilibré**.
On a alors $\mathbb{Q}(\text{« Chiffre pair »}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

On voit sur ces deux exemples qu'on effectue la même expérience aléatoire : lancer un dé à 6 faces. Le choix de la probabilité permet de traduire le fait que le dé est **équilibré** ou **truqué**, c'est-à-dire de choisir la probabilité des évènements élémentaires.

Définition 44 – Équiprobabilité

Lorsque Ω est fini on note $n = \#\Omega$. L'unique probabilité définie par :

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$$

est appelée *probabilité uniforme* sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.
Pour tout évènement A, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

2.7.2 Cas d'un univers infini dénombrable

On considère un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ où Ω est dénombrable, ie $\Omega = \{\omega_n / n \in \mathbb{N}\}$. Dans ce cas, on choisit $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ (toute partie de Ω est un évènement).

Théorème 45 – Probabilité sur un univers infini dénombrable

1. Soit $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \mathbb{P}\big(\{\omega_n\}\big)$.
   Alors les réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $[0,1]$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n$ converge et vérifie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
2. Réciproque. On se donne une suite de réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
   • ils sont positifs ;
   • la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
   Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}\big(\{\omega_n\}\big)$. Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in [0,1]$.

C'est le deuxième point que nous utiliserons pour définir une probabilité dans le cas d'un univers infini dénombrable. Cette probabilité $\mathbb{P}$ vérifie :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \omega_n \in A}} p_n$$

le nombre de termes de la somme pouvant éventuellement être infinie. Par exemple, si $A = \{\omega_0, \omega_2, \omega_4, \omega_6, \ldots, \omega_{2n}, \ldots\}$, alors : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_{2n}$.

✎ ***Exemple.*** On peut poser : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Quelle est la probabilité de choisir un entier pair ?

Théorème 46 – L'équiprobabilité n'existe pas dans le cas dénombrable

Lorsque Ω est dénombrable, on ne peut pas définir de probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

2.8 Exemple d'univers infini non dénombrable : $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Dans le cas du jeu de pile ou face infini, l'univers est l'ensemble des suites de nombres égaux à 0 ou 1 : $\Omega = \{0,1\}$. On peut montrer que cet ensemble est *infini non dénombrable*.

Une réalisation $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$ est une suite telle que $\omega_n = 0$ ou 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telle que ω_n représente le résultat du $(n+1)$-ième lancer (1 pour « Pile » et 0 pour « Face »).

Comme Ω n'est pas dénombrable, il ne suffit pas de connaître la probabilité des évènements élémentaires $\{\omega\}$ pour déterminer entièrement une probabilité. En effet, la formule $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big)$ n'aurait pas de sens puisqu'on écrit une somme avec un ensemble d'indices non dénombrable...
On commence par définir une *tribu* sur Ω. Pour cela il faut voir l'ensemble Ω comme une infinité de produit cartésien de l'ensemble $\{0,1\}$ avec lui-même.
On appellera *cylindre* d'ordre $p \in \mathbb{N}$ toute partie de Ω de la forme :

$$C_p = \{\varepsilon_0\} \times \{\varepsilon_1\} \times \ldots \times \{\varepsilon_{p-1}\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots$$

où $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ sont des nombres égaux à 0 ou 1.
Noter qu'il n'y a qu'un seul cylindre d'ordre 0 qui est Ω.
On note alors $\mathscr{A}$ la plus petite tribu de Ω qui contient tous les cylindres. On admettra son existence, ainsi que le fait qu'elle n'est pas égale à $\mathscr{P}(\Omega)$.

On construit ensuite une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{A})$. On définit d'abord $\mathbb{P}$ sur les cylindres par la formule :

$$\mathbb{P}\big(\{\varepsilon_0\} \times \{\varepsilon_1\} \times \ldots \times \{\varepsilon_{p-1}\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots\big) = \frac{1}{2^p}$$

C'est la formule dont on a besoin en pratique pour calculer la probabilité des évènements les plus courants.
On admet ensuite qu'on peut alors prolonger $\mathbb{P}$ à toute la tribu $\mathscr{A}$ (grâce à un théorème de Carathéodory).

L'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ modélise ainsi le jeu de pile ou face infini avec une pièce de monnaie équilibré. Avec la même démarche, on peut imposer à la pièce d'être truquée.

2.9 Propriétés de continuité monotone pour une probabilité

Pour calculer la probabilité d'évènements complexes, sur des univers infinis, on a parfois besoin du résultat suivant.

Théorème 47 – Théorème de continuité monotone

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements, ie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \subseteq A_{n+1}$$

Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \qquad \text{(continuité croissante)}$$

2. On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements, ie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} \subseteq A_n$$

Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \qquad \text{(continuité décroissante)}$$

La démonstration repose sur la propriété de σ-additivité.

✎ ***Exemple.*** On lance une infinité de fois une pièce de monnaie.
Alors $\mathbb{P}$(« on obtient que des faces ») = 0, et donc $\mathbb{P}$(« on obtient au moins un pile ») = 1.

On peut se passer de l'hypothèse de monotonie.

Corollaire 48 – Théorème de continuité monotone : cas général

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

Ce théorème permet, entre autres, de calculer $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$ sans l'hypothèse d'incompatibilité des A_n.

2.10 Évènements négligeables et presque sûrs

Définition 49 – Évènement négligeable

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A un évènement. On dit que A est *négligeable* pour $\mathbb{P}$, ou que A est $\mathbb{P}$*-négligeable*, ou que A est *quasi-impossible*, lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$.

✎ ***Exemple.*** L'évènement *impossible* $\emptyset$ est $\mathbb{P}$-négligeable pour toutes les probabilités $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

✎ ***Exemple.*** Dans le jeu de pile ou face infini, l'évènement « on obtient que des faces » est négligeable.

⚠ A $\mathbb{P}$-négligeable ne signifie pas que $A = \emptyset$! A peut même être « très gros »...

Théorème 50 – Propriétés des évènements négligeables

1. Si A est $\mathbb{P}$-négligeable et $B \subseteq A$, alors B est lui aussi $\mathbb{P}$-négligeable.
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'évènements tous $\mathbb{P}$-négligeables, alors l'évènement $C = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est lui aussi $\mathbb{P}$-négligeable.

Par complémentaire, on obtient les évènements presque sûrs.

Définition 51 – Évènement presque sûr

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A un évènement. On dit que A est *presque sûr* pour $\mathbb{P}$, ou que A est vrai $\mathbb{P}$-*presque sûrement*, ou que A est *quasi-certain*, lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$. On le note : A est vrai $\mathbb{P}$-p.s..

✎ ***Exemple.*** Par contre l'évènement certain Ω est vrai $\mathbb{P}$-p.s. pour toutes les probabilités $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

✎ ***Exemple.*** Dans le jeu de pile ou face infini, l'évènement « on obtient au moins un pile » est vrai p.s..

⚠ A vrai $\mathbb{P}$-p.s. ne signifie pas que $A = \Omega$!

⚠ Ces notions dépendent du choix de $\mathbb{P}$!

3 Probabilités conditionnelles

Dans tout ce paragraphe, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

3.1 Définition

Intuitivement : si on lance un dé cubique, équilibré, on devine que sachant que le chiffre obtenu est pair, la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 *est égale à* $\frac{2}{3}$.
D'autre part, si on introduit les évènements A = *« obtenir un chiffre inférieur ou égal à* 5 *»*, B = *« obtenir un chiffre pair »*.
Comme on est en situation d'équiprobabilité, on trouve $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ *et* $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6}$.
On remarque alors que $\frac{2}{3} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Cet exemple motive la définition suivante.

Définition 52 – Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
On appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B*, le réel $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. $\mathbb{P}(A|B)$ est aussi notée $\mathbb{P}_B(A)$.

$\mathbb{P}_B(A)$ représente donc la probabilité de A calculée du point de vue d'un observateur qui arriverait en cours d'expérience, au moment où B vient de se réaliser. Il dispose donc de plus d'informations qu'un observateur qui assiste à l'expérience depuis qu'elle a commencée.

⚠ ATTENTION : en général on ne peut pas comparer les valeurs de $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A|B)$, comme le montre l'exemple suivant.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés distinguables à 6 faces, équilibrés. On considère les évènements A = « la somme des deux chiffres obtenus est 5 », B = « le premier dé donne 3 », et C = « le premier dé donne au moins 3 ».
Alors $\mathbb{P}(A|C) < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A|B)$.

⚠ Il n'existe pas d'évènement $A|B$ = « A sachant B ».
Pour cette raison il est préférable d'utiliser la notation $\mathbb{P}_B(A)$ au lieu de la notation $\mathbb{P}(A|B)$.

Théorème 53 – Propriétés de $\mathbb{P}_B$

Soit B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

1. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, on a : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$.
2. $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
   En particulier si A_1 et A_2 sont deux évènements :

$$\mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2) - \mathbb{P}_B(A_1 \cap A_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_B\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}_B(A)$$

On a donc à disposition deux méthodes pour calculer la probabilité d'un évènement non élémentaire :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$$

Ces deux formules s'appuient sur des techniques totalement différentes : la première est basée sur l'incompatibilité, la seconde sur la dépendance entre deux évènements. En pratique, il faut choisir la solution la plus simple (le fait que l'évènement soit composé de $\cup$ ou de $\cap$ n'est pas décisif puisque les lois de Morgan permettent d'inverser ces symboles).

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés à 6 faces : calculer la probabilité d'obtenir deux nombres de la même parité.

✎ ***Exemple.*** On tire deux fois une boule, sans remise, dans un une urne composée de 6 boules blanches et 2 noires : calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches.

3.2 Formule des probabilités composées

Théorème 54 – Formule des probabilités composées

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ des évènements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$. Alors :

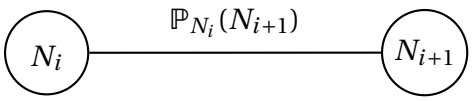
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k}(A_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right)\end{aligned}$$

avec la convention que, pour $i = 1$: $\mathbb{P}\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)$.

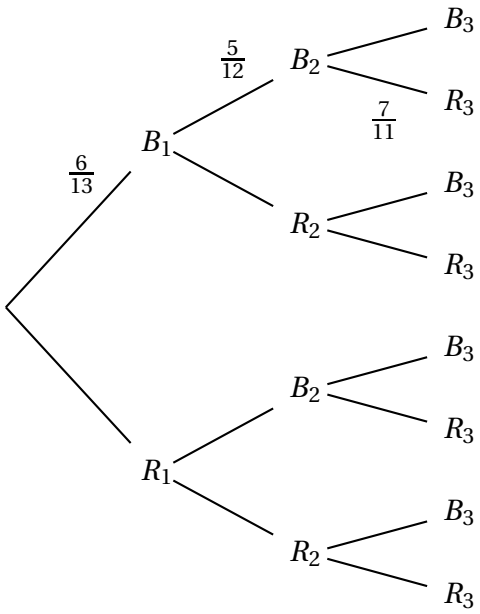
Cette formule est aussi appelée formule du conditionnement multiple.

Interprétation sur un arbre :

D'un noeud N_i à un noeud N_{i+1}, on trace une arête étiquetée par la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(N_{i+1}|N_i)$. La probabilité de la branche complète est alors obtenue en multipliant entre elles les probabilités conditionnelles placées sur les arêtes.



✎ ***Exemple.*** On considère une urne composée de 6 boules blanches et 7 boules rouges. On effectue 3 tirages successifs d'une boule sans remise. Pour $i = 1$, 2 et 3, on pose B_i = « le i-ième tirage donne une boule blanche », et on définit de même l'évènement R_i.



Alors : $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(R_3) = \dfrac{6}{13} \times \dfrac{5}{12} \times \dfrac{7}{11}$.

⚠ ATTENTION : il faut respecter l'ordre chronologique dans le conditionnement ! Sur l'exemple précédent on pouvait aussi écrire que : $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(R_3) \times \mathbb{P}_{R_3}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_2 \cap R_3}(B_1)$, mais cela ne permet pas de faire le calcul !

3.3 Formule des probabilités totales

Théorème 55 – Formule des probabilités totales

1. Cas d'un s.c.e. fini. On se donne un système complet d'évènements $(A_1, \dots, A_n)$. Pour tout évènement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

avec la convention $\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B) = 0$ lorsque $\mathbb{P}(A_k) = 0$.

2. Cas d'un s.c.e. dénombrable. On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un s.c.e.. Alors, pour tout $B \in \mathscr{A}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$ converge et :

$$\forall B \in \mathscr{A}, \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$$

avec la convention $\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B) = 0$ lorsque $\mathbb{P}(A_n) = 0$.

La formule des probabilités totales est très utile lorsqu'on effectue une expérience aléatoire en plusieurs étapes. Elle permet de raisonner par disjonction des cas, suivant le résultat de la première étape.

Définition 56 – Système quasi-complet d'évènements

On dit que qu'une famille d'évènements $(A_i)_{i\in I}$ est un *système quasi-complet d'évènements* (quasi-s.c.e.) lorsque :

(i) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$;

(ii) les $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux incompatibles ;

(iii) pour tout $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$.

La différence avec un s.c.e. est qu'on peut avoir $\bigcup_{i\in I} A_i \neq \Omega$.

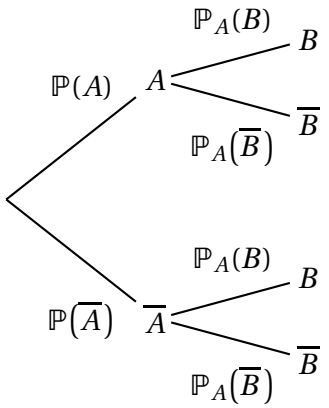
Théorème 57 – Formule des probabilités totales

La formule des probabilités totales est encore valable avec un quasi-s.c.e. à la place d'un s.c.e..

Interprétation sur un arbre :

Sur un arbre à deux générations, on multiplie les probabilités le long d'une branche et on additionne les branches qui réalisent l'évènement considéré.

Par exemple avec un s.c.e. à deux évènements $\left(A, \overline{A}\right)$:

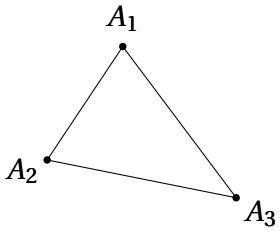


On lit sur l'arbre la formule :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$

✎ ***Exemple.*** On dispose de deux pièces : l'une honnête, l'autre truquée avec deux faces pile. On choisit une pièce au hasard et on la lance. Alors $\mathbb{P}($ « obtenir pile » $) = \dfrac{3}{4}$.

✎ ***Exemple.*** **Chaîne de Markov**. On considère un point qui se déplace sur les sommets d'un triangle $A_1A_2A_3$:

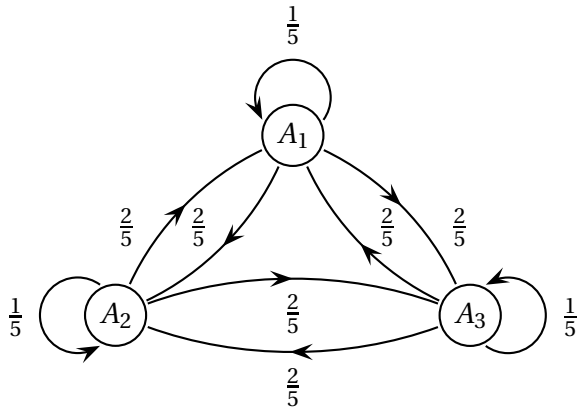


On suppose qu'initialement le point se trouve en A_1. Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante :

• si le point est en A_i alors il passe en A_j $(j \neq i)$ avec probabilité $\dfrac{2}{5}$ dans les deux cas ;

• le point reste en A_i avec probabilité $\dfrac{1}{5}$.

On peut résumer ceci grâce à un diagramme de transition :



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les évènements :

• U_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_1 » ;

- V_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_2 » ;
- W_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_3 ».

On pose alors, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \mathbb{P}(U_n)$, $v_n = \mathbb{P}(V_n)$ et $w_n = \mathbb{P}(W_n)$.

Les conditions initiales sont $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$, et grâce à la formule des probabilités totales, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n \\ v_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n \\ w_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{1}{5}w_n \end{cases}$$

On peut alors déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n, grâce au calcul matriciel. En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

où A est la matrice donnée par $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

Le problème est donc ramené au calcul des puissances de la matrice A.

3.4 Formule de Bayes

On va essayer de relier les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$, ce qui permettra en pratique d'inverser causes et conséquences.

Théorème 58 – Formule de Bayes

On se donne un s.c.e. (ou un quasi-s.c.e.) $(A_i)_{i\in I}$. Pour tout évènement B non négligeable, on a :

$$\forall i \in I, \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j\in I} \mathbb{P}_{A_j}(B) \times \mathbb{P}(A_j)}$$

avec la convention $\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i) = 0$ si $\mathbb{P}(A_i) = 0$.

En particulier avec un s.c.e. de la forme $\left(A, \overline{A}\right)$:

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) \times \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}$$

✎ ***Exemple.*** **Test d'une maladie rare.** Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie. La notice précise la qualité du test :
• lorsque le test est appliqué à une personne malade, le test est positif dans 99,8% des cas ;
• lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans 99,6% des cas.

D'autre part, on sait qu'une personne sur 100 000 est malade.

Peut-on avoir confiance en ce test ? À priori oui, mais on est bien étonné de trouver que sachant que le test est positif, il n'y a que 0,25% de chances que la personne soit malade !

4 Indépendance

Dans tout ce paragraphe, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

4.1 Indépendance de deux évènements

Définition 59 – Indépendance de deux évènements

Soient A et B deux évènements.
On dit que A et B sont indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
On le note $A \perp\!\!\!\perp B$.

Le résultat suivant donne un sens intuitif à cette définition.

Proposition 60 – Lien entre indépendance et probabilité conditionnelle

Si A et B sont deux évènements avec B non négligeable : $A \perp\!\!\!\perp B$ si, et seulement si, $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

En pratique, nous verrons que l'indépendance ne se démontre pas, mais fait des hypothèses de modélisation. Elle permet de simplifier les calculs.

✎ ***Exemple.*** Lorsqu'on lance plusieurs fois une pièce de monnaie, ou lorsqu'on effectue plusieurs tirages avec remise dans une urne, on pourra supposer que les répétitions sont effectuées de manière indépendante.

⚠ ATTENTION : ce n'est pas si simple ! Si on lance deux fois une pièce, les évènements A = « obtenir pile au premier lancer » et B = « obtenir face au second lancer » sont indépendants, mais les évènements C = « obtenir pile » et B = « obtenir face » ne le sont pas.

⚠ ATTENTION : cette notion dépend du choix de la probabilité $\mathbb{P}$. En particulier si on a trois évènements A, B et C : on peut avoir A et B indépendants pour $\mathbb{P}$, mais A et B non indépendants pour $\mathbb{P}$ sachant C (ie pour $\mathbb{P}_C$) :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \quad \text{mais} \quad \mathbb{P}_C(A \cap B) \neq \mathbb{P}_C(A) \times \mathbb{P}_C(B)$$

ou l'inverse : A et B indépendants pour $\mathbb{P}_C$, mais A et B non indépendants pour $\mathbb{P}$, comme le montre l'exemple suivant.

✎ ***Exemple.*** Quels sont les évènements A tels que $A \perp\!\!\!\perp A$?

✎ ***Exemple.*** On dispose de deux pièces : un équilibrée et une truquée (deux piles). On lance un dé (non truqué) à 6 faces :
• si on obtient le chiffre 1, on lance deux fois la pièce équilibrée ;
• si on obtient un chiffre différent de 1, on lance deux fois la pièce truquée.
On note A = « obtenir pile au premier lancer de la pièce », B = « obtenir pile au second lancer de la pièce », et C = « le lancer du dé donne le chiffre 1 ».
Alors $A \perp\!\!\!\perp B$ pour $\mathbb{P}_C$ (et pour $\mathbb{P}_{\overline{C}}$), mais $A \not\perp\!\!\!\perp B$ pour $\mathbb{P}$.

Proposition 61 – Indépendance et contraire

Si $A \perp\!\!\!\perp B$, alors $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$ et $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

4.2 Indépendance mutuelle

4.2.1 Cas de n évènements

On se donne n évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Définition 62 – Indépendance deux à deux

On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont *deux à deux indépendants* lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \perp\!\!\!\perp A_j$$

On a donc : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$. Mais par contre, on ne peut rien dire sur $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Pour cela on a besoin d'une notion plus forte.

Définition 63 – Indépendance mutuelle

On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants lorsque :

$$\forall J \subseteq [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in J} A_k\right) = \prod_{k\in J} \mathbb{P}(A_k)$$

Dans ce cas on peut dire que : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$.

En pratique, l'hypothèse d'indépendance mutuelle fera partie des hypothèses de modélisation. Elle ne sera pas démontrée.

4.2.2 Cas d'une famille infinie d'évènements

On se donne une famille dénombrable d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 64 – Indépendance deux à deux

On dit que les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux indépendants lorsque :

$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\quad n\neq p \Longrightarrow A_n \perp\!\!\!\perp A_p$$

Définition 65 – Indépendance mutuelle

On dit que les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants lorsque :

$$\forall J\subseteq\mathbb{N},\quad J \text{ finie} \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in J} A_n\right) = \prod_{n\in J}\mathbb{P}(A_n)$$

⚠ On ne peut pas dire que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \prod_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n)$ (pas de produit infini).

Pour montrer rigoureusement l'indépendance mutuelle, on a la C.N.S. suivante.

Théorème 66 – C.N.S. d'indépendance mutuelle

Les évènements de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants si, et seulement si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, les évènements de la famille $(A_1,\dots,A_n)$ sont mutuellement indépendants.

En pratique, l'indépendance mutuelle est une hypothèse de modélisation.

4.2.3 Propriétés de l'indépendance

On se donne une famille d'évènements $(A_i)_{i\in I}$.

Théorème 67 – Lien entre indépendance mutuelle et indépendance deux à deux

Si les évènements $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse.

Théorème 68 – Lemme des coalitions

On suppose que les évènements $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants.

1. Si pour tout $i\in I$, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, alors les évènements $(B_i)_{i\in I}$ sont encore mutuellement indépendants.
2. Pour toute partie $J\subseteq I$, les $(A_i)_{i\in J}$ sont aussi mutuellement indépendants.

3. Pour toute partie $J \subseteq I$, tout évènement construit à partir des $(A_i)_{i\in J}$ est indépendant de tout évènement construit à partir de $(A_i)_{i\notin J}$.

✎ ***Exemple.*** On lance 5 fois une pièce de monnaie, et on note A = « obtenir pile aux deux premiers lancers », B = « obtenir pile aux lancers numéros 3 à 5 » et C = « obtenir pile aux lancers numéros 2 à 5 ».
Alors A et B sont indépendants, mais A et C (et de même B et C) pourrait ne pas l'être.

✎ ***Exemple.*** On lance une infinité de fois une pièce de monnaie. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'évènement « obtenir P au n-ième lancer ». Alors les évènements $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants.

✎ ***Exemple.*** On effectue une infinité de tirages successifs d'une boule avec remise , dans une urne constituée de boules blanches et de boules noires. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement « obtenir une blanche au n-ième tirage ». Alors les évènements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants.

4.3 Compléments sur la formule des probabilités totales : propriété de Markov

Elle n'est pas au programme mais la « propriété de Markov » doit être souvent utilisée, et la rédaction est assez acrobatique vu qu'on fleurte allègrement avec les limites du programme d'ECS...

Nous allons donc donner une liste d'exemples classiques qui devraient permettre de traiter la plupart de situations. Dans chaque, on est dans le cadre de répétitions mutuellement indépendantes d'une même expérience aléatoire, mais le nombre de répétitions est lui-même aléatoire (ce qui complique vraiment les choses).

• **Ruine du joueur.** Un joueur joue à un jeu d'argent : à chaque tour il gagne 1 euro avec probabilité p, ou perd 1 euro avec probabilité $1-p$ ($p \in]0,1[$). On voudrait calculer la probabilité qu'il termine ruiné (ou bout d'un nombre quelconque de tours), partant d'une fortune initiale de n euros ($n \in \mathbb{N}$). On note cette probabilité u_n ; notons que $u_0 = 1$ puisqu'il commence ruiné.

La formule des probabilité totales (et la propriété de Markov qu'il ne faut pas citer puisque hors-programme) donnent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = p.u_{n+1} + q.u_{n-1}$$

On est ramené à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui s'étudie simplement...

• **Le lion et les gazelles.** À chaque repas, un lion mange soit un zèbre avec probabilité $\frac{1}{3}$, soit une gazelle avec probabilité $\frac{2}{3}$. On suppose que les compositions des repas du lion sont indépendantes entre elles. On veut calculer la probabilité u_n que le lion mange pour la première fois deux gazelles consécutives à son $n^{\text{ième}}$ repas ($n \geq 2$).
La formule des probabilité totales (et la propriété de Markov qu'il ne faut pas citer puisque hors-programme) donnent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}.u_{n+1} + \frac{2}{9}.u_n$$

On est ramené à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui s'étudie simplement...

• **Modèle de Galton-Watson.** On considère une cellule qui peut se diviser en 2 (par mitose) avec probabilité p, ou mourir avec probabilité $1-p$ ($p \in]0,1[$). On veut calculer la probabilité que sa lignée soit éteinte à la $(n+1)^{\text{ième}}$ génération. On note cette probabilité u_n ; notons que $u_0 = 1-p$.

La formule des probabilité totales (et la propriété de Markov qu'il ne faut pas citer puisque hors-programme) donnent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = p.u_n^2 + 1 - p$$

On est ramené à l'étude d'une suite récurrente d'ordre 1 du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sur ces exemples l'espace probabilisé n'est pas fini (en toute rigueur), mais ils sont tout de même compréhensible dans ce chapitre puisque les évènements considérés sont inclus dans des univers finis.

• **Un dernier exemple.** On considère une urne composée de n boules noires, 1 boule rouge et 1 boule verte (donc $n+2$ boules au total). On effectue une infinité de tirages successifs d'une boule avec remise.
On a vu que la probabilité de l'évènement E = « au moment où on obtient la boule rouge pour la première fois, la boule verte n'a jamais été obtenue » est égale à $\frac{1}{2}$ (le calcul utilisait la propriété de σ-additivité de $\mathbb{P}$). Retrouver ce résultat par analyse à un pas.

5 Exercices

Dénombrement

Exercice 1 – Numéros de téléphone

Combien de numéros de téléphone peut-on attribuer en France, sachant que :
• L'indicatif de région est 01, 02, 03, 04 ou 05.
• Les deux chiffres suivant doivent être distincts.
• De nouveaux numéros "internet" sont disponibles, commençant tous par 08.

Exercice 2 – Coloriages

Un étudiant en ECS veut colorier ses notes de cours en attribuant la même couleur pour chaque matière : histoire, géographie, culture générale, mathématiques, informatique, LV1 et LV2. Il dispose de 10 couleurs différentes.

1. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
2. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte que chaque matière ait une couleur différente des autres ?
3. On choisit autant de couleurs différentes qu'il y a de matières. Combien y a t-il de coloriages possibles en utilisant seulement ces couleurs ? De sorte que chaque matière ait une couleur différente des autres ?
4. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte qu'au moins deux matières aient la même couleur ?
5. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte qu'exactement deux matières aient la même couleur ?

Exercice 3 – Formule de Pascal

Dans une urne, on place n boules blanches et une noire. On tire simultanément k boules.

1. Combien y-a-t-il de tirages sans boule noire.
2. Combien y-a-t-il de tirages avec au moins une boule noire ?
3. Combien y-a-t-il de tirages possibles en tout ? Quelle propriété du cours venez-vous de démontrer ?

Exercice 4 – Urnes

On dispose d'une urne avec 8 boules blanches, 7 boules noires et 5 boules vertes.

1. Quel est le nombre de tirages simultanés de 5 boules donnant 2 blanches, 1 noire et 2 vertes ?

2. Quel nombre de tirages successifs et sans remise de 5 boules donnant 2 blanches, 1 noire et 2 vertes ? 2 blanches, 1 noire et 2 vertes *dans cet ordre* ?
3. Mêmes questions avec des tirages successifs et avec remise de 5 boules dans l'urne.

Exercice 5 – Dénombrements de k-uplets

Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de parties de E formées de k éléments ?
2. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ?
3. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E ?
4. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E, tel que le premier élément est le plus petit et le dernier élément est le plus grand ?
5. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ordonnés dans l'ordre strictement croissant ?

Exercice 6 – Anagrammes

1. Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot ECS ? du mot FINANCE ? du mot ANAGRAMME ?
2. Combien y a-t-il de mots composés de 5 lettres ? de 5 lettres distinctes ? de 5 lettres distinctes dans l'ordre alphabétique ? de 5 lettres et de sorte qu'il soit un palindrome ?

Exercice 7 – Nombre de surjections

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}$. On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments.

1. Calculer S_1^4, S_4^1 et S_4^4.
2. Plus généralement calculer S_1^p, S_n^1 et S_n^n.

Exercice 8 – Poker

Un joueur de poker reçoit une "main" de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (sans joker). Donner le nombre total de mains différentes que le joueur peut obtenir. Quel est le nombre de mains contenant :

1. une seule paire ?	2. deux paires ?	3. un brelan ?
4. un carré ?	5. un full ?	6. une couleur ?
7. une paire de roi ?	8. au moins un coeur ?	

Exercice 9 – Formule d'inversion de Pascal

1. On considère deux suites de nombres réels $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k$.
   Montrer la relation réciproque suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k$$
2. On appelle dérangement de n éléments une permutation où les n éléments changent de place, et on note $d(n)$ le nombre de dérangements de n éléments.

   Vérifier que : $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d(n-k)$. En déduire la valeur de d_n en fonction de n.

Exercice 10 – Dénombrements de parties

Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cap B = \emptyset$? tels que $A \cup B = E$?
2. Combien y-a-t-il de triplets (A, B, C) de parties de E tels que $A \cup B \cup C = E$?

Calcul des probabilités

Exercice 11 – Additivité d'une probabilité

Soient A et B des événements aléatoires avec $\mathbb{P}(A) = 1/2$ et $\mathbb{P}(B) = 1/3$.

1. Donnez un encadrement de $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Déterminez $\mathbb{P}(A \cup B)$ lorsque A et B sont incompatibles puis lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$.

Exercice 12 – Exemple d'un univers fini

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathscr{P}(\Omega)$ la tribu de ses parties et la probabilité $\mathbb{P}$ définie (partiellement, x et y étant à déterminer) par $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{\omega_3\}) = x$ et $\mathbb{P}(\{\omega_4\}) = y$. Soit les événements $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_3\}$. Pour un événement quelconque C, on désigne son complémentaire par $\overline{C}$.
1. Combien d'événements pouvons nous considérer dans cet exemple ?
2. On donne $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{8}$. Déterminer complètement la probabilité $\mathbb{P}$.
3. Ici, les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ?
4. On rappelle que la différence symétrique $A \Delta B$ peut être définie par $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

Calculer $\mathbb{P}(A\Delta B|\overline{B})$, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle de $A\Delta B$ sachant $\overline{B}$ réalisé.

Exercice 13 – Problème des anniversaires

On considère une classe de n élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.

1. Calculez la probabilité que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour. À partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5 ? A 0.8 ? Comment interpréter ce résultat ?
2. Calculez la probabilité qu'au moins un élève soit né le même jour que le professeur. Comparez le résultat obtenu avec le précédent.

Exercice 14 – Le bibliothécaire fou

Un bibliothécaire fou permute au hasard les n livres de sa bibliothèque.

1. (a) Quelle est la probabilité que les volumes 1 et 2 de "Guerre et Paix" de Tolstoï se retrouvent côte à côte dans le bon ordre ?
   (b) Dans n'importe quel ordre ?
2. (a) Quelle est la probabilité qu'aucun livre n'ait changé de place ?
   (b) Qu'exactement un livre ait changé de place ?
   (c) Qu'exactement deux livres aient changé de place ?

Probabilités conditionnelles

Exercice 15 – Cartes colorées

On considère trois cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard, on expose une face au hasard : elle est rouge.
Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ? (Construisez d'abord un arbre adéquat).

Exercice 16 – Mon voisin a deux enfants...

Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
Ma voisine a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité pour que le plus âgé soit un garçon ?

Exercice 17 – Le parapluie

On cherche un parapluie qui avec la probabilité $p/7$ se trouve dans l'un quelconque des sept étages d'un immeuble ($0 \leq p \leq 1$).

1. Quelle est la probabilité que la parapluie se trouve dans l'immeuble ?
2. On a exploré en vain les six premiers étages. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au septième étage ?

Exercice 18 – Tirages sans remise

Considérons une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.

1. Quelle est la probabilité de la suite "blanc, blanc, rouge" si on tire 3 boules sans remise ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au total deux blanches et une rouge si on tire 3 boules sans remise ?

Exercice 19 – Expérience en deux étapes

On considère n urnes ($n \geq 1$), numérotées de 1 à n. L'urne numérotée k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Exercice 20 – Les Rigolus et les Tristus

Sur Orion, les Rigolus et les Tristus cherchent à faire la paix. Heureusement, il y a trois fois plus de Rigolus que de Tristus. Pour la paix, les Rigolus sont à 60% favorables, 16% y sont opposés et 24% sont sans opinion. Par contre, pour la guerre, les Tristus sont à 68% favorables, 12% opposés et 20% sans opinion. Vous rencontrez par hasard un habitant d'Orion (on ne vous demande pas la probabilité de le rencontrer..) et vous lui demandez son opinion.
1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. S'il vous répond qu'il est favorable à la paix, quelle est la probabilité qu'il soit un Rigolus ?
3. Finalement, s'il vous répond qu'il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il soit un Tristus ?

Indépendance

Exercice 21 – Lancers de trois dés

On jette trois dés. Calculez :

1. la probabilité d'avoir exactement un 6.
2. la probabilité d'obtenir au moins un 6.
3. la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques.

Exercice 22 – Évènement non mutuellement indépendants

On jette deux dès non-pipés, un noir et un blanc. Montrez que les évènements suivants sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants :

— «le chiffre du dè noir est pair»,
— «le chiffre du dè blanc est impair»,
— «les chiffres des deux dès ont même parité».

Exercice 23 – Encore une histoire d'urnes...

1. On dispose d'une urne contenant 3 boules blanches numérotées de 1 à 3 et deux boules noires numérotées de 4 à 5.
   (a) On tire une à une successivement trois boules de l'urne, sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, deux boules blanches, puis une noire ? Dans n'importe quel ordre ?
   (b) Mêmes question pour des tirages avec remise.
   (c) Calculer la probabilité d'obtenir, deux boules blanches et une noire lors d'un tirage simultané de trois boules.
1. Dans une urne, on place 7 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement avec remise quatre boules de l'urne. On note N l'événement "obtenir une boule noire" et B l'événement "obtenir une boule blanche".
   (a) Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne le résultat (N, N, B, B) dans cet ordre ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches exactement ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?

Exercice 24 – Deux dés de couleurs différentes

On dispose de 2 dès A et B. Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir "pile" soit 1/3.

• Si on obtient "pile" on décide de jouer uniquement avec le dè A ;
• Si on obtient "face" on décide de jouer uniquement avec le dè B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au premier coup, puis au deux premiers coups. Ces deux évènements sont-ils indépendants ?
2. On a obtenu "rouge" aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au troisième coup.
3. On a obtenu "rouge" aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dè A.

Exercice 25 – La ruine du joueur

Un joueur joue à un jeu d'argent contre le casino. On suppose qu'initialement la fortune du joueur est de $a \in \mathbb{N}$ et celle du casino de $N - a$, avec $0 \leqslant a \leqslant N$ et $N \in \mathbb{N}$.
Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et $p \neq 1/2$.
A chaque répétition du jeu on suppose que le joueur gagne 1 euros avec probabilité p ou perd 1 euros avec probabilité $q = 1 - p$. Si on note x_n la fortune du joueur à l'issue du n^e jeu, alors :

$$x_0 = a \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 \text{ avec la probabilité } p \\ x_n - 1 \text{ avec la probabilité } q \end{cases}.$$

Le jeu s'arrête dès que x_n prend la valeur 0 (le joueur est ruiné) ou la valeur N (le casino est ruiné).

1. Soit u_a la probabilité que le joueur soit ruiné, étant initialement parti d'une fortune de a. On a en particulier $u_0 = 1$ et $u_N = 0$.
   (a) Montrer que pour tout entier a tel que $1 \leq a \leq N - 1$, on a :
   $$u_a = p u_{a+1} + q u_{a-1}.$$
   (b) Vérifier que :
   $$u_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$
   Déterminer la limite de u_a lorsque $N \to +\infty$ et interpréter le résultat.
2. De même, calculer la probabilité v_a que le casino soit ruiné, le joueur étant initialement parti d'une fortune de a.
3. Calculer la somme $u_a + v_a$. En déduire la probabilité que le joueur et le casino s'affrontent indéfiniment.
4. Reprendre les calculs dans le cas $p = q = \dfrac{1}{2}$.

Univers infinis

Exercice 26 – Expérience en deux étapes

On considère une infinité d'urnes. On en choisit une au hasard de telle sorte que la probabilité de choisir l'une numéro n soit égale à $\frac{1}{2^n}$ (avec $n \geq 1$). L'urne numéro n est composée de 2^n boules dont une seule blanche. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Exercice 27 – Les ricochets

Un enfant lance un galet pour faire des ricochets sur l'eau. On suppose que la probabilité que le galet ricoche pour la $n^{\text{ème}}$ fois, sachant qu'il a ricoché les $n-1$ coups d'avant, est égale à $\frac{1}{n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité p_n que le galet coule après n ricochets ?
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

Exercice 28 – Perte d'information

Sur un réseau informatique des ordinateurs se transmettent une information de manières indépendantes. On suppose qu'à chaque transmission l'information est transmise correctement avec la même probabilité $p \in]0,1[$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n que l'information soit transmise correctement n fois consécutives.
2. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

Exercice 29 – Jeu de pile ou face infini

On considère une suite lancers indépendants d'une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p et la probabilité d'obtenir "face" est $q = 1 - p$ ($p \in]0,1[$). "pile" (resp. "face") sera noté en abrégé P (resp. F).

1. Soit $n \geqslant 1$. On considère l'événement A_n : "La séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $(n-1)$ et n." Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité de l'événement A : "La séquence PF apparaît au moins une fois".
3. Soit B l'événement : "La séquence PP apparaît sans qu'il n'y ait eu de séquence PF auparavant". Calculer $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 30 – Une apparition de la fonction ln

On admettra que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ converge, et que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

On dispose d'une urne contenant initialement une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée.
On effectue des lancers successifs et indépendants de la pièce :
• si on obtient « pile » alors on tire une boule au hasard dans l'urne et on arrête les lancers ;
• si on obtient « face » alors on ajoute une boule noire dans l'urne et on continue les lancers.

1. Expliquer pourquoi cette expérience se termine presque sûrement au bout d'un nombre fini de lancers.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Exercice 31 – Lemme de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.
On note B l'événement $\bigcap_{n\geq 1} \big(\bigcup_{k\geq n} A_k \big)$.
On rappelle que cet événement est en fait :

$$B = \{\omega \in \Omega / \, \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}$$

1. On suppose que la série $\sum_k \mathbb{P}(A_k)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.
2. On suppose que les événements (A_n) sont indépendants et que la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ est divergente.
   (a) Montrer que l'événement $\overline{B}$ est égal à $\bigcup_{n\geq 1} \big(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k} \big)$, où $\overline{M}$ désigne l'événement contraire de l'événement M.
   (b) Exprimer $\mathbb{P}\big(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k} \big)$ en fonction des p_k.
   (c) Montrer que la série $\sum_k \ln(1-p_k)$ est divergente.
   (d) En déduire que $\mathbb{P}(B) = 1$.
3. Un singe tape aléatoirement sur les touches d'une machine à écrire. Montrer qu'avec probabilité 1, il écrira une infinité de fois l'intégralité de n'importe quel livre.

Chapitre 13

Variables aléatoires discrètes infinies

Sommaire

1 Variables aléatoires discrètes 310
1.1 Définitions 310
1.2 Évènements associés à une VARD 311
1.3 Loi de probabilité d'une VARD 312
1.4 Fonction de répartition d'une VARD 314
1.5 L'expérience a-t-elle une fin ? 315
1.6 Transfert de loi 318
2 Espérance mathématique d'une VARD 319
2.1 Espérance mathématique d'une VARD 319
2.2 Théorème de transfert 321
2.3 Variance d'une VARD 322
3 Lois usuelles 324
3.1 Loi certaine 324
3.2 Loi uniforme 325
3.3 Loi de Bernoulli 326
3.4 Loi binomiale 327
3.5 Loi géométrique 328
3.6 Loi de Poisson 331
4 Exercices 333

On considère une expérience aléatoire modélisée par un triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Définitions

Définition 1 – Variable aléatoire discrète

On appelle *variable aléatoire* toute application X définie sur Ω et à valeurs dans un ensemble E, et telle que pour tout $U \subseteq E$ on a $X^{-1}(U) \in \mathscr{A}$.
La variable aléatoire X est dite *discrète* lorsque $X(\Omega)$ (= ensemble des valeurs prises par X) est un ensemble fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini, on dit que X est une variable aléatoire *discrète finie*.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable, on dit que X est une variable aléatoire *discrète infinie*.

Si $E \subseteq \mathbb{R}$ on dit que la variable aléatoire X est *réelle*.

On notera dans la suite V.A.R.D. pour variable aléatoire réelle discrète.

Notations :
Pour une VARD finie l'ensemble $X(\Omega)$ est noté en extension $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_N\}$, où $x_1 < x_2 < \dots < x_N$.
Pour une VARD infinie l'ensemble $X(\Omega)$ est noté en extension $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$, où la suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dès cubiques distinguables : $\Omega = [\![1,6]\!]^2$.
On note X = Nombre de 6 obtenus. Alors X est une VARD finie et $X(\Omega) = \{0,1,2\}$.

✎ ***Exemple.*** On considère une urne de 10 boules, composée de 6 boules blanches et 4 rouges.
On effectue p tirages successifs d'une boule avec remise : $\Omega = [\![1,10]\!]^p$ (les boules sont numérotées) et $N = \text{Card}(\Omega) = 10^p$.
On note X = Nombre de boules rouges obtenues. Alors X est une VARD finie et $X(\Omega) = [\![0,p]\!]$ et $n = \text{Card}\big(X(\Omega)\big) = p+1$.

✎ ***Exemple.*** On lance une infinité de fois une pièce : $\Omega = \{0;1\}^{\mathbb{N}}$.
On note X = Rang d'apparition du premier pile. Alors X est une VARD infini et $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ (on dit que $X = +\infty$ lorsqu'on obtient toujours des Faces depuis le premier lancer).

⚠ Ne pas confondre *variable aléatoire* et *évènement*. Une variable aléatoire est un **nombre aléatoire**, et un évènement est un **prédicat aléatoire**, c'est-à-dire une phrase qui peut être vraie ou fausse.
Sur l'exemple précédent, on ne peut pas dire que « Nombre de 6 obtenus » est vrai ou faux, X n'est donc pas un évènement.
En particulier, si X est une variable aléatoire, la quantité $\mathbb{P}(X)$ **n'existe pas** !

1.2 Évènements associés à une VARD

Notation : Si X est une VARD à valeurs dans E, et U une partie de E :

$$X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in U\}$$

est un élément de $\mathscr{A}$, ie $X^{-1}(U)$ est un évènement. Cet évènement sera noté plus simplement $(X \in U)$ ou $\{X \in U\}$. On a donc :

$$(X \in U) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in U\}$$

Cas particuliers :
• Si $U = \{k\}$ où $k \in E$, alors $(X \in \{k\})$ est noté plus simplement $(X = k)$.
• Si $U =]-\infty, a]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $\big(X \in]-\infty, a]\big)$ est noté plus simplement $(X \leq a)$.
• Si $A = [a, b[$ où $(a, b) \in \big(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\big)^2$, alors $\big(X \in [a, b[\big)$ est noté plus simplement $(a \leq X < b)$ etc...

✎ ***Exemple.*** On lance simultanément deux dès distinguables : $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.
On pose X = Somme des deux chiffres obtenus. On a alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et on peut considérer les évènements :
$(X = 11) = \big\{(6,5); (5,6)\big\}$ donc $\mathbb{P}(X = 11) = \dfrac{2}{36}$
$(X > 10) = \big\{(6,5); (5,6); (6,6)\big\} = (X = 11) \cup (X = 12)$ donc $\mathbb{P}(X > 10) = \dfrac{3}{36}$
$(X \leq 1) = \emptyset$ évènement impossible, donc $\mathbb{P}(X \leq 1) = 0$
$(X \leq 12) = \Omega = (X \geq 0)$ évènement certain, donc $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$
On peut comparer les évènements associés à X.
Par exemple $(X \leq 5) \subseteq (X \leq 7)$ donc $\mathbb{P}(X \leq 5) \leq \mathbb{P}(X \leq 7)$:
en effet $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq 5 \Longrightarrow X(\omega) \leq 7$.
De plus $(X \geq 4) = (X > 3)$, donc $\mathbb{P}(X \geq 4) = \mathbb{P}(X > 3)$, car : $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 4 \Longleftrightarrow X(\omega) > 3$.
De même $(X = 3) = (X \geq 3) \cap (X < 4)$ donc $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}\big((X \geq 3) \cap (X < 4)\big)$.
⚠ Il faut bien comprendre que tous ces résultats viennent du fait que X ne prend que des valeurs **entières**.

Pour montrer qu'une application $X : \Omega \longrightarrow E$ est une VARD, on dispose de la CNS suivante.

Théorème 2 – CNS pour que X soit une VARD

Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une application. Alors on a équivalence de :
(i) X est une VARD ;
(ii) $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et pour tout $k \in X(\Omega)$, $(X = k) \in \mathscr{A}$.

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 3 – Système complet d'évènements associés à une VARD

1. Si X est une VARD finie alors la famille $\big([X = x_k]\big)_{1 \leq k \leq N}$ est un sce.
2. Si X est une VARD infinie alors la famille $\big([X = x_n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est un sce dénombrable.

⚠ Si U est une partie de E, $(X \in U)$ est un évènement, ie un élément de $\mathscr{A}$, et on peut donc calculer $\mathbb{P}(X \in U)$. Par contre $\mathbb{P}(X)$ ne veut absolument rien dire…en effet X n'est pas un **évènement** mais une **variable aléatoire**.

1.3 Loi de probabilité d'une VARD

Définition 4 – Loi de probabilité d'une VARD

Si X est une VARD sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on appelle loi de probabilité de X l'application

$$\mathbb{P}^X : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array}$$

⚠ ATTENTION ! Avant de déterminer la loi de X, il est donc *indispensable* de déterminer $X(\Omega)$, c'est-à-dire les valeurs prises par la VARD X.

Dans le cas d'une VARD *finie* telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, on peut représenter les résultats sous forme d'un tableau à une entrée :

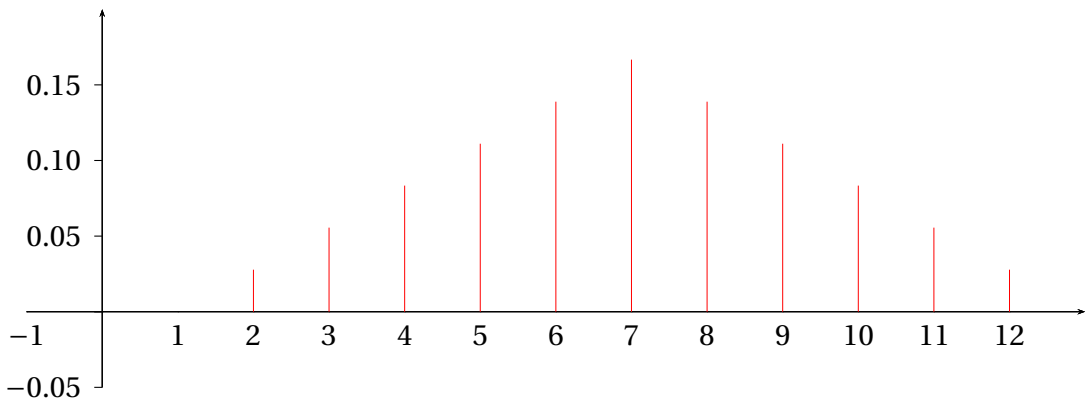
x	x_1	x_2	… …	x_n
$\mathbb{P}(X = x)$	?	?		?

ou d'un diagramme en bâtons.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chifres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On obtient le diagramme en bâtons :



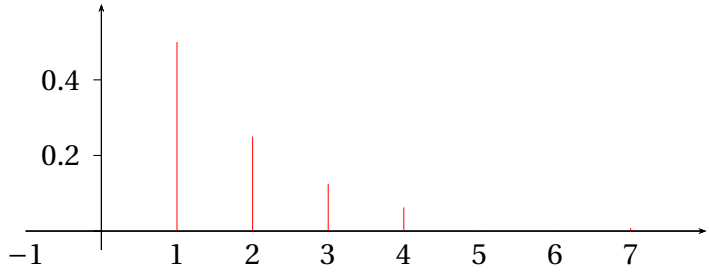
✎ ***Exemple.*** On lance une infinité de fois une pièce et on note X = Rang du lancer où on obtient le premier Pile. Alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k} \qquad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = +\infty) = 0$$

Sur cet exemple on peut considérer, par abus de notation, que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

⚠ ATTENTION : $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$ ne signifie pas que $[X = +\infty] = \emptyset$, mais seulement que cet évènement est $\mathbb{P}$-négligeable !

Même si la variable est infinie, on peut aussi représenter sa loi par un diagramme en bâtons :



Définition 5 – Égalité en loi

Si X et Y sont deux VARD, définies chacune sur un espace probabilisé, on dit que X et Y sont égales en loi lorsque $\mathbb{P}^X = \mathbb{P}^Y$.
On le note $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$.

⚠ ATTENTION : $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$ ne signifie pas que $X = Y$, même si X et Y sont définies sur le même espace probabilisé (ie associée à la même expérience aléatoire). Considérer par exemple le lancer d'un dé, $X = 1$ si le chiffre obtenu est pair et 0 sinon, et $Y = 1$ si le chiffre obtenu est impair et 0 sinon.

Proposition 6 – Propriétés élémentaires d'une loi de probabilité

Soit X une VARD. On a alors :
(i) $\forall x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) \in [0,1]$;
(ii) $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

Donc si X est une VARD *finie* telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_k) = 1$$

et si X est une VARD *infinie* telle que $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ alors $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = x_n)$ *converge* et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 1$$

et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 0$.
En particulier si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$. Dans ce cas $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)$ *converge* et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X=n)=0$.

Dans les deux théorèmes suivants l'espace probabilisable $(\Omega,\mathscr{A})$ est fixé. On donne une CNS pour définir une VARD de loi donnée à l'avance.

Théorème 7 – Construction d'une VARD finie ayant une loi de probabilité donnée

On se donne des réels $p_1,\dots,p_n$, vérifiant :
- $\forall k\in[\![1,n]\!],\ p_k\geq 0$;
- $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k=1$.

Alors pour tous réels deux à deux distincts $x_1,\dots,x_n$, il existe une variable aléatoire X et une probabilité $\mathbb{P}$ définie sur $(\Omega,\mathscr{A})$ telle que :
$X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ et $\forall k\in[\![1,n]\!],\ p_k=\mathbb{P}(X=x_k)$.
Et donc pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $p_k\in[0,1]$.

✎ ***Exemple.*** Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors il existe une VARD finie X, à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, et de loi donnée par :

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\quad \mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

Théorème 8 – Construction d'une VARD infinie ayant une loi de probabilité donnée

On se donne une suite de réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
- $\forall n\in\mathbb{N},\ p_n\geq 0$;
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n=1$.

Alors pour toute suite de réels strictement croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une variable aléatoire X et une probabilité $\mathbb{P}$ définies sur $(\Omega,\mathscr{A})$ telle que :
$X(\Omega)=\{x_n\,/\,n\in\mathbb{N}\}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ p_n=\mathbb{P}(X=x_n)$.
Et donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_n\in[0,1]$.

✎ ***Exemple.*** Il existe une VARD infinie X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et de loi donnée par :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(X=k)=\frac{3}{4^k}$$

Dans ces deux théorèmes, il n'y a unicité ni de $\mathbb{P}$, ni de la VARD X.

1.4 Fonction de répartition d'une VARD

Définition 9 – Fonction de répartition d'une VARD

Soit X une VARD. On appelle *fonction de répartition* de X la fonction

$$F_X:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1]\\ t & \longmapsto & \mathbb{P}(X\leq t)\end{array}$$

Ce n'est pas au programme, mais la fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire.

Par contre il faut savoir passer de la *loi* à la *fonction de répartition* dans le cas où X est une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$. Dans ce cas on utilise les formules suivantes (à savoir redémontrer), valables pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)\\ &= \mathbb{P}(X < k+1) - \mathbb{P}(X < k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)\end{aligned}$$

et :

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}(X=j)$$

$$\mathbb{P}(X < k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(X=j) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X > k) = \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(X=j)$$

✎ ***Exemple.*** Dans une urne de n boules numérotées, on effectue des tirages d'une boule avec remise.
On note X = nombre de tirages nécessaires pour obtenir un numéro supérieur ou égal au précédent, avec la convention que $X = n+1$si ceci ne se produit jamais.
Donner la loi de X.

Une fonction de répartition a les propriétés suivantes.

Théorème 10 – Propriétés d'une fonction de répartition

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. On a $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.

Les propriétés de continuité qui sont hors-programme seront vues en TD.

1.5 L'expérience a-t-elle une fin ?

Dans certaines situations, on note X = Nombre de répétitions d'une expérience aléatoire jusqu'à obtenir une certaine condition. On alors $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, l'évènement $[X = +\infty]$ correspondant au cas où la condition souhaitée n'est jamais vérifiée.

On cherche alors à calculer :
• $\mathbb{P}(X = +\infty)$ qui correspond à la probabilité qu'on répète indéfiniment l'expérience ;
• $\mathbb{P}(X < +\infty)$ qui correspond à la probabilité qu'on ne répète l'expérience qu'un nombre fini de fois.
Ces deux quantités étant reliés par la formule :

$$\mathbb{P}(X < +\infty) + \mathbb{P}(X = +\infty) = 1$$

Définition 11 – Expérience ne se répétant qu'un nombre fini de fois presque sûrement

On dit que l'expérience ne se répète presque sûrement qu'un nombre fini de fois, ou que l'expérience s'arrête presque sûrement au bout d'un nombre fini de tours, lorsque : $\mathbb{P}(X < +\infty) = 1$ ou de manière équivalent $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.

On dispose de deux méthodes pour déterminer ces quantités. Commençons par éliminer ce qu'il ne faut pas faire !

⚠ ATTENTION : on ne peut pas dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = +\infty)$! En effet on a toujours $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 0$ puisque la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(X = n)$ converge...

<u>Première méthode</u> : utiliser la loi de X et la σ-additivité de $\mathbb{P}$. On suppose qu'on a calculé $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On remarque alors que :

$$[X < +\infty] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X = n]$$

et comme les évènements situés dans l'union sont deux à deux incompatibles :

$$\mathbb{P}(X < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \qquad (1)$$

⚠ ATTENTION : dans l'union $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} [X = n]$ figurent tous les évènements $[X = n]$ pour $n \in \mathbb{N}$, mais ne figure pas l'évènement $[X = +\infty]$. On a pourtant l'impression que l'indice n peut prendre la valeur $+\infty$, mais ce n'est pas le cas...

Une autre façon de le voir est de partir du fait que la famille $\big([X = n]\big)_{n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$ est un s.c.e., ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = +\infty) = 1$$

et donc :

$$\mathbb{P}(X = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \qquad (2)$$

Les deux formules sont les mêmes puisque $\mathbb{P}(X < +\infty) + \mathbb{P}(X = +\infty) = 1$.

✎ ***Exemple.*** Deux joueurs A et B jouent à Pile ou Face. Le joueur A gagne si le premier Pile survient à un lancer de rang pair, et le joueur B gagne si le premier Pile survient à un lancer de rang impair. Par exemple pour les lancer « FFP » c'est le joueur B qui gagne, et pour les lancer « FFFFFP » c'est le joueur A qui gagne.
Ce jeu se termine presque sûrement en un nombre fini de tours.

<u>Deuxième méthode</u> : utiliser la fonction de répartition de X et le théorème de continuité monotone. On suppose qu'on a calculé $\mathbb{P}(X \leq n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On remarque alors que la suite d'évènements $\big([X \leq n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et donc, d'après le théorème de continuité monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leq n]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \leq n)$$

or $\bigcup_{n=0}^{+\infty}[X \leq n] = [X < +\infty]$ donc :

$$\mathbb{P}(X < +\infty) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \leq n) \qquad (3)$$

Une formule semblable est obtenue en remarquant alors que la suite d'évènements $\big([X \geq n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion et donc, d'après le théorème de continuité monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}[X \geq n]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

or $\bigcap_{n=0}^{+\infty}[X \geq n] = [X = +\infty]$ donc :

$$\mathbb{P}(X = +\infty) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) \qquad (4)$$

En fait les formule (1), (2), (3) et (4) sont les mêmes, mais nous ne rentrons pas dans le détail par souci de concision...

✎ ***Exemple.*** On considère une urne de N boules, composée d'une boule noire et de $N-1$ blanches. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise. On arrête les tirages dès qu'on a obtenu une boule noire.
Cette expérience se termine presque sûrement en un nombre fini de tours.

<u>Abus de notation</u> : Lorsque $\mathbb{P}(X < +\infty) = 0$, on considèrera que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** Nous allons construire un exemple d'expérience qui peut durer indéfiniment avec une probabilité strictement positive.
On considère une urne contenant initialement une seule boule, celle-ci étant de couleur noire.
On ajoute ensuite une boule blanche, et on tire une boule. Si elle est noire on arrête, sinon on continue selon le processus suivant :
• *avant le k-ième tirage, on remet la boule blanche tirée dans l'urne, on ajoute encore k boules blanches supplémentaires, et on tire alors une nouvelle boule.*
Les tirages ne s'arrêtent que lorsqu'on a obtenu une boule noire.
On note X le nombre de tirages effectués. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
Au moment d'effectuer le k-ième tirage, l'urne contient $S_k = 1 + 2 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ boules blanches ; cette formule étant aussi vraie pour $k = 1$.
On a donc $\mathbb{P}(X \geq n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{S_k+1}$.
Et donc $\mathbb{P}(X = +\infty) = \exp\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{n^2+n+2}\right)\right]$.
On a $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$ puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 - \frac{2}{n^2+n+2}\right)$ est convergente.

1.6 Transfert de loi

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

On considère une VARD $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et une fonction $f : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $X(\Omega) \subseteq \mathscr{D}_f$. On a alors le schéma de composition :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "f \circ X"'] & \end{tikzcd}$$

On admettra que l'application $Y = f \circ X$ est aussi une VARD sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On la note plus simplement $Y = f(X)$.

Connaissant la loi de X et l'expression de la fonction f, nous souhaiterions déterminer la loi de la VARD $Y = f(X)$: c'est ce qu'on appelle un **transfert de loi** (la loi de X est transférée par la fonction f).

Valeurs prises par Y :
• Si X est une VARD finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors $Y(\Omega) = \big\{f(x_1), \dots, f(x_n)\big\}$. On peut aussi noter $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ avec $y_1 < y_2 < \cdots < y_p$; dans ce cas $p \leq n$ (car f peut ne pas être injective).
• Si X est une VARD infinie telle que $X(\Omega) = \{x_n / \, n \in \mathbb{N}\}$, alors $Y(\Omega) = \big\{f(x_n) \big/ \, n \in \mathbb{N}\big\}$. On peut aussi noter $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ avec $y_1 < y_2 < \cdots < y_p$, ou $Y(\Omega) = \{y_n / \, n \in \mathbb{N}\}$, selon les cas (nombre fini ou dénombrable de valeurs).

✎ ***Exemple.*** $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $Y = X^2$ donne $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.

✎ ***Exemple.*** $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y = 2X$ donne $Y(\Omega) = \{2n / \, n \in \mathbb{N}^*\}$.

✎ ***Exemple.*** $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ entier pair} \\ 1 & \text{si } X \text{ entier impair} \end{cases}$ donne $Y(\Omega) = \{0, 1\}$.

On peut maintenant s'intéresser à la loi de Y. Pour cela il est important de comprendre le point suivant : si on prend $y \in Y(\Omega)$ une valeur prise par la VARD Y, alors, par définition, y a un antécédent par f dans $X(\Omega)$: $\exists x \in X(\Omega)$ tel que $y = f(x)$. Et comme f est en général non injective, il y a plusieurs valeurs de x possibles, voire même une infinité !

✎ ***Exemple.*** Sur le premier exemple, 1 a deux antécédents : -1 et 1.

✎ ***Exemple.*** Sur le troisième exemple, 1 a une infinité d'antécédents : tous les entiers impairs.

Théorème 12 – Formule de transfert de loi

La loi de $Y = f(X)$ est donnée par :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x)$$

On somme sur tous les antécédents de y.

✎ ***Exemple.*** Si la loi de X est donnée par :

k	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

et si $Y = X^2$, alors $Y(\Omega) = \{0,1,4\}$ et :

k	0	1	4
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

✎ ***Exemple.*** Si X est une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{2^k}$, et si $Y = 2X$, alors $Y(\Omega) = \left\{2k / k \in \mathbb{N}^*\right\}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = 2k) = \frac{1}{2^k}$$

✎ ***Exemple.*** Si X est une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{2^k}$, et si $Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ entier pair} \\ 1 & \text{si } X \text{ entier impair} \end{cases}$, alors $Y(\Omega) = \{0,1\}$ et :

k	0	1
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

2 Espérance mathématique d'une VARD

2.1 Espérance mathématique d'une VARD

Définition 13 – Espérance mathématique d'une VARD

1. Si X est une VARD finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors on appelle espérance de X le réel :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times \mathbb{P}(X = x_k)$$
2. Si X est une VARD infinie telle que $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$, alors on dit que $\mathbb{E}(X)$ existe lorsque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on appelle espérance de X le réel :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$$
Si X est une VARD infinie telle que $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$, on dit que $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas.

Pour une VARD infinie, il faut donc montrer que l'espérance existe avant de la calculer. Pour cela, on doit vérifier que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument, ce qui assure que sa somme *ne dépend pas de l'ordre des termes.*

On doit donc montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \times \mathbb{P}(X = x_n)$ converge, puis calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$. Dans la majorité des cas, la VARD X sera à valeurs positives, la preuve de la convergence prouvera donc convergence absolue et par suite l'existence de l'espérance de X.

Remarquons que la définition impose que : $\mathbb{E}(X)$ existe $\Longrightarrow \mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.

On a la formule « universelle » suivante, valable si X est une VARD finie ou infinie :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x)$$

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chifres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Puisque X est une VARD finie, $\mathbb{E}(X)$ existe et :

$$\mathbb{E}(X) = 2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36} = 7$$

✎ ***Exemple.*** Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$.
Alors X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 2$.

✎ ***Exemple.*** Soit X une VARD telle que : $X(\Omega) = \{2^n / n \in \mathbb{N}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = 2^n) = \dfrac{1}{2^n}$.
Alors X n'admet pas d'espérance.

L'espérance vérifie les propriétés de *positivité* et *croissance* suivantes.

Théorème 14 – Positivité et croissance de l'espérance

1. Si $X \geq 0$ p.s. alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
2. Si $X \geq Y$ p.s. alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

Dans le cas d'une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a aussi le résultat suivant.

Théorème 15 – Formule d'antirépartition

Si X est une VARD telle que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$ alors :

$$\mathbb{E}(X) \text{ existe} \iff \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq n) \text{ converge}$$

Dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

⚠ Prendre garde au fait que la somme ne commence pas à l'indice 0, mais à l'indice 1.

✎ ***Exemple.*** On effectue des tirages d'une boule avec remise dans une urne de n boules numérotées. On arrête les tirages lorsque le numéro de la boule tirée est supérieur ou égal au numéro de la boule obtenue au précédent tirage. On note X le nombre de tirages effectués. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

2.2 Théorème de transfert

On reprend les notations du paragraphe sur le transfert de loi :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "f \circ X"'] & \end{tikzcd}$$

On a vu que la loi de la VARD $Y = f(X)$ se calcule par la formule :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x)$$

On veut cette fois calculer son espérance (si elle existe). Sous réserve de convergence absolue de la série :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \times \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left[y \times \left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x) \right) \right]$$

On peut voir que le calcul est compliqué. On va donc essayer d'avoir une formule simple, donnant $\mathbb{E}(Y)$ connaissant la loi de X, et **sans avoir à calculer la loi de Y.**

Théorème 16 – Théorème de transfert

Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \to \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) \subseteq \mathscr{D}_f$.

1. <u>Cas d'une VARD finie</u> : Si $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n\}$ alors $Y = f(X)$ est aussi une VARD finie, donc admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

2. <u>Cas d'une VARD infinie</u> : Si $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) \text{ existe} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{n \geq 0} f(x_n) \times \mathbb{P}(X = x_n) \text{ converge absolument} \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{n \geq 0} \big|f(x_n)\big| \times \mathbb{P}(X = x_n) \text{ converge} \end{aligned}$$

et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \times \mathbb{P}(X = x_n)$$

On a l'énoncé « universel » suivant :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) \text{ existe} \iff \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X = x) \text{ converge absolument}$$

et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X = x)$$

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chiffres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Puisque X est une VARD fine, $\mathbb{E}(X^2)$ existe et :

$$\mathbb{E}(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{329}{6}$$

✎ ***Exemple.*** Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telle que : $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{3}{4^n}$.
Alors $\mathbb{E}\big(2^X\big)$ existe et $\mathbb{E}\big(2^X\big) = 3$.

Corollaire 17 – Linéarité de l'espérance (version 1)

Soit X une VARD telle que $\mathbb{E}(X)$ existe. Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{E}(aX + b)$ existe et :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

En particulier si $a = 0$, on a pour tout $b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{E}(b) = b$. Et donc pour $b = \mathbb{E}(X)$, on obtient $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X)\big) = \mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big) = 0$.

✎ ***Exemple.*** Si $b \in \mathbb{R}$ et $X \leq b$ p.s., alors $\mathbb{E}(X) \leq b$.

Définition 18 – VARD centrée

1. On appelle VARD centrée une VARD X, admettant une espérance, et telle que $\mathbb{E}(X) = 0$.
2. Si X est une VARD admettant une espérance, on appelle VARD centrée associée à X la VARD $Y = X - \mathbb{E}(X)$.

2.3 Variance d'une VARD

Lemme 19 – Moment d'ordre 2 et moment d'ordre 1

Soit X une VARD qui admet un moment d'ordre 2, ie telle que $\mathbb{E}(X^2)$ existe. Alors X admet une espérance.

Ce lemme permet de définir la variance d'une VARD.

Définition 20 – Variance d'une VARD

Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2. On appelle variance de X, notée $V(X)$ ou $\mathrm{Var}(X)$, son moment centré d'ordre 2 :

$$V(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right]$$

Remarquer que si X est une VARD finie, X admet toujours une variance.

La variance sert à mesurer la dispersion quadratique de X autour de sa valeur moyenne (= son espérance).

Théorème 21 – Règles de calcul de la variance

Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2.

1. $V(X) \geq 0$;
2. $V(X) = 0 \iff X$ est presque sûrement constante.
   Dans ce cas : $X = \mathbb{E}(X)$ p.s..
3. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet un moment d'ordre 2 et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Théorème 22 – Formule de Koenig-Huyghens

Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

Puisque $V(X) \geq 0$, on a $\mathbb{E}(X^2) \geq \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$.

C'est cette formule qu'on utilise en pratique pour calculer la variance d'une VARD.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chifres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Puisque X est une VARD fine, $V(X)$ existe et :

$$V(X) = \frac{329}{6} - 7^2 = \frac{35}{6}$$

✎ ***Exemple.*** Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$.
Alors X admet une variance et $V(X) = 2$.

Définition 23 – Écart-type d'une VARD

Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2. On appelle écart-type de X le réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Contrairement à la variance, l'écart-type possède la même unité que X, et s'interprète donc mieux en pratique. Il sert à mesurer la dispersion de X autour de sa valeur moyenne.

Définition 24 – VARD centrée réduite

Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2, non presque sûrement constante.

1. On dit que X est une VARD centrée réduite lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$ et $V(X) = 1$.
2. On appelle VARD centrée réduite associée à X la VARD : $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$.

En effet si $Y = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$, alors Y est une VARD centrée réduite.

3 Lois usuelles

Dans tout ce paragraphe X est une VARD définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

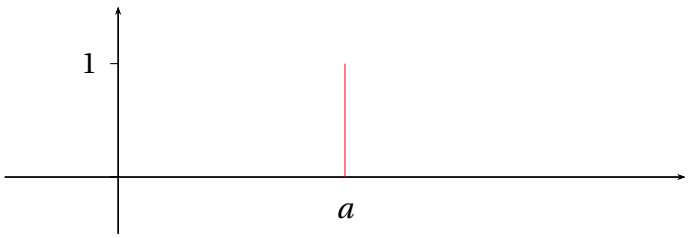
3.1 Loi certaine

Définition 25 – VARD de loi certaine

X suit la loi certaine de paramètre $a \in \mathbb{R}$, lorsque $X = a$ $\mathbb{P}$-p.s., ie $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

X est donc une VARD finie.

On obtient le diagramme en bâtons :



Par abus de notations, on peut considérer que $X(\Omega) = \{a\}$.

Théorème 26 – Espérance et variance d'une VARD de loi certaine

Soit X une VARD de loi certaine de paramètre $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = a \qquad \text{et} \qquad V(X) = 0$$

Théorème 27 – Caractérisation de la loi certaine

Soit X une VARD finie. Alors :

$$X \text{ suit une loi certaine} \iff V(X) = 0$$

et dans ce cas le paramètre est $a = \mathbb{E}(X)$.

3.2 Loi uniforme

Définition 28 – VARD de loi uniforme

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ finie et non vide. On dit que X suit la loi uniforme sur A lorsque $X(\Omega) = A$ et :

$$\forall a \in A, \quad \mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{\text{Card}(A)}$$

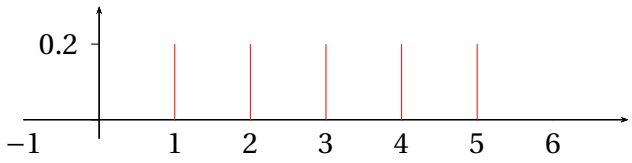
On le note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(A)$.

X est donc une VARD finie.

Si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ avec $n = \text{Card}(A)$, alors : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = a_k) = \dfrac{1}{n}$.

Si A est un singleton, $A = \{a\}$, alors $\mathscr{U}\big(\{a\}\big)$ est la loi certaine de paramètre a.

Pour $\mathscr{U}([\![1,5]\!])$, on obtient le diagramme en bâtons :



✎ ***Exemple.*** Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1, n]\!]\big)$, alors $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

Théorème 29 – Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{U}\big([\![1,n]\!]\big)$

Soit X une VARD de loi $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$. Alors X :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

⚠ ATTENTION : ces formules sont fausses si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![0,n]\!]\big)$.

Modélisation 1 : On choisit au hasard un nombre dans A, partie finie non vide de $\mathbb{R}$. On note X = Nombre obtenu. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}(A)$.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une urne de 10 boules numérotées. On tire une boule au hasard et on note X = Numéro obtenu. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1,10]\!]\big)$.

Modélisation 2 : On se donne A partie finie non vide $\mathbb{R}$, de cardinal n, et on s'intéresse à un élément donné de A noté a_0. On effectue une successions de tirages sans remise d'un élément de A. On note X = Nombre de tirages nécessaires pour obtenir l'élément a_0. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1,n]\!]\big)$.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire les cartes une à une sans remise et on note X = Nombre de tirages nécessaires pour obtenir l'as de coeur. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1,32]\!]\big)$.

✎ ***Exemple.*** Un gardien doit ouvrir une porte dans le noir, avec n clef dont une seule est la bonne. On note X le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef. On suppose que le gardien essaie les clefs une à une, sans utiliser deux fois la même. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1,n]\!]\big)$ et le nombre moyen d'essais pour trouver la bonne clef est donc $\dfrac{n+1}{2}$.

3.3 Loi de Bernoulli

Définition 30 – VARD de loi de Bernoulli

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ lorsque $X(\Omega) = \{0,1\}$ et :

$$\mathbb{P}(X=1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p = q$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

X est donc une VARD finie.

Théorème 31 – Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{B}(p)$

Soit X une VARD de loi $\mathscr{B}(p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = pq = p(1-p)$$

Modélisation : On considère une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : succès ou échec.

On note p la probabilité qu'elle donne un succès et $X = \begin{cases} 1 & \text{si l'expérience donne un succès} \\ 0 & \text{si l'expérience donne un échec} \end{cases}$

Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une pièce de monnaie truquée, de telle sorte qu'elle donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$.

On note $X = \begin{cases} 1 & \text{si la pièce donne Pile} \\ 0 & \text{si la pièce donne Face} \end{cases}$

Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

✎ ***Exemple.*** On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

On note $X = \begin{cases} 1 & \text{si la carte est un coeur} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{4}\right)$.

Théorème 32 – Caractérisation de la loi de Bernoulli

Soit X une VARD. Alors :

$$X \text{ suit une loi de Bernoulli} \iff X(\Omega) = \{0,1\}$$

et dans ce cas le paramètre est $p = \mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X = 1)$.

✎ ***Exemple.*** Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $X^2 \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

✎ ***Exemple.*** Si A est un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \notin \{0,1\}$, alors $X = \mathbb{1}_A$ est une VARD de loi $\mathscr{B}\big(\mathbb{P}(A)\big)$. En particulier on obtient que $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$, formule qui relie probabilité d'un évènement et espérance d'une VARD.

3.4 Loi binomiale

Définition 33 – VARD de loi binomiale

On dit que X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ lorsque $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

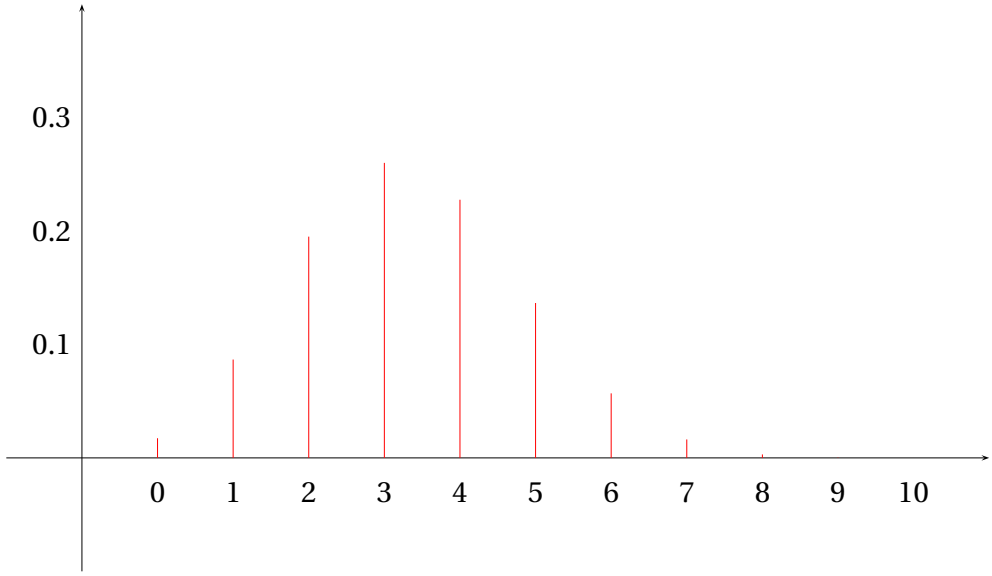
X est donc une VARD finie.

On a $\mathscr{B}(1,p) = \mathscr{B}(p)$.

Si $k \in \mathbb{Z}$, $k \notin [\![0,n]\!]$, on a par convention $\binom{n}{k} = 0$. De plus, on a aussi $\mathbb{P}(X = k) = 0$. Donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Pour $\mathscr{B}\left(10, \frac{1}{3}\right)$, on obtient le diagramme en bâtons :



Théorème 34 – Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{B}(n,p)$

Soit X une VARD de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = npq = np(1-p)$$

Modélisation : On considère une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : succès avec probabilité p ou échec avec probabilité $q = 1-p$.
On effectue n répétitions indépendantes de cette même expérience.
On note X = Nombre de succès obtenus.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une pièce de monnaie truquée, de telle sorte qu'elle donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$.
On la lance n fois de manières indépendantes.
On note X = Nombre de Piles obtenus.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.
On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{N_1}{N}\right)$.

3.5 Loi géométrique

Définition 35 – VARD de loi géométrique

On dit que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1} \qquad \text{où} \quad q = 1-p$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

X est donc une VARD infinie.

Dans certains cas, on considère une variante : la loi géométrique décalée sur $\mathbb{N}$, notée $\mathscr{G}_0(p)$. On dit que $Y \hookrightarrow \mathscr{G}_0(p)$ lorsque $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k) = pq^k$$

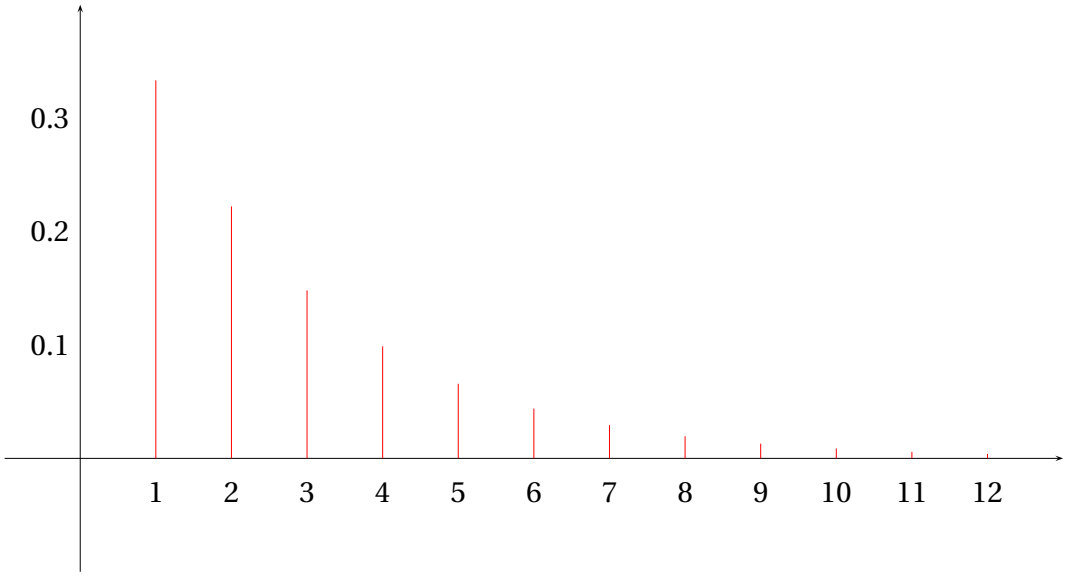
Ces deux lois sont reliées de la façon suivante.

Proposition 36 – Lien entre loi géométrique et loi géométrique décalée

Soi Y une VARD et $X = Y + 1$. Alors :

$$Y \hookrightarrow \mathscr{G}_0(p) \Longleftrightarrow X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$$

Pour $\mathscr{G}\left(\frac{1}{3}\right)$, on obtient le diagramme en bâtons :



Théorème 37 – Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{G}(p)$

Soit X une VARD de loi $\mathscr{G}(p)$. Alors X admet des moments de tous les ordres.
En particulier :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

✎ ***Exemple.*** Que dire des moments de la loi $\mathscr{G}_0(p)$?

La démonstration du théorème précédent repose sur le lemme suivant.

Lemme 38 – Dérivées de la série géométrique

1. La série $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge si, et seulement si, $x \in]-1,1[$.
   Dans ce cas :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$
   et pour $p \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{n=p}^{+\infty} x^n = \frac{x^p}{1-x}$$
2. La série $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ converge si, et seulement si, $x \in]-1,1[$.
   Dans ce cas :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
3. La série $\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$ converge si, et seulement si, $x \in]-1,1[$.
   Dans ce cas :
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

On utilise souvent la fonction de répartition d'une loi géométrique.

Théorème 39 – Fonction de répartition d'une VARD de loi $\mathscr{G}(p)$

1. Soit X une VARD de loi $\mathscr{G}(p)$. Alors :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - q^k \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \geq k) = q^{k-1}$$
2. Réciproquement, si X est une VARD telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - q^k$$
   alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, où $q = 1 - p$.

<u>Modélisation</u> : On considère une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : succès avec probabilité p ou échec avec probabilité $q = 1 - p$.
On effectue une infinité de répétitions indépendantes de cette même expérience.
On note X = Rang du premier succès obtenu.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

⚠ Plus généralement, on peut fixer $n \in \mathbb{N}^*$, et considérer X_n = Rang du n-ième succès. Pour $n = 1$, $X_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, et pour $n \geq 2$, X_n suit une loi appelée loi binomiale négative... mais ce n'est pas au programme !

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une pièce de monnaie truquée, de telle sorte qu'elle donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$.
On la lance une infinité de fois cette pièce, de manières indépendantes.

On note X = Rang du premier Pile obtenu.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Terminons par une autre propriété de modélisation des lois géométriques.

Théorème 40 – Absence de mémoire de la loi géométrique

1. Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > n+k | X > n) = \mathbb{P}(X > k)$$

2. Réciproquement, si X est une VARD telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire, alors X est suit une loi géométrique de paramètre $p = \mathbb{P}(X = 1)$.

On peut retenir que la loi géométrique est la loi d'attente du premier succès dans un processus sans mémoire.

3.6 Loi de Poisson

La loi de Poisson est la « loi des évènements rares » :
• Nombre de clients dans une file d'attente ;
• Nombre de particules rayonnées par un élément radioactif sur une période ;
• Nombre de soldats tués par des coups de pieds de chevaux dans l'armée prussienne entre 1875 et 1894.

Elle a été introduite par Siméon Denis Poisson en 1837 pour modéliser les erreurs de jugements dans un procès.

La modélisation est hors-programme : l'énoncé précisera toujours quelles sont les VARD qui suivent une loi de Poisson.

Définition 41 – VARD de loi de Poisson

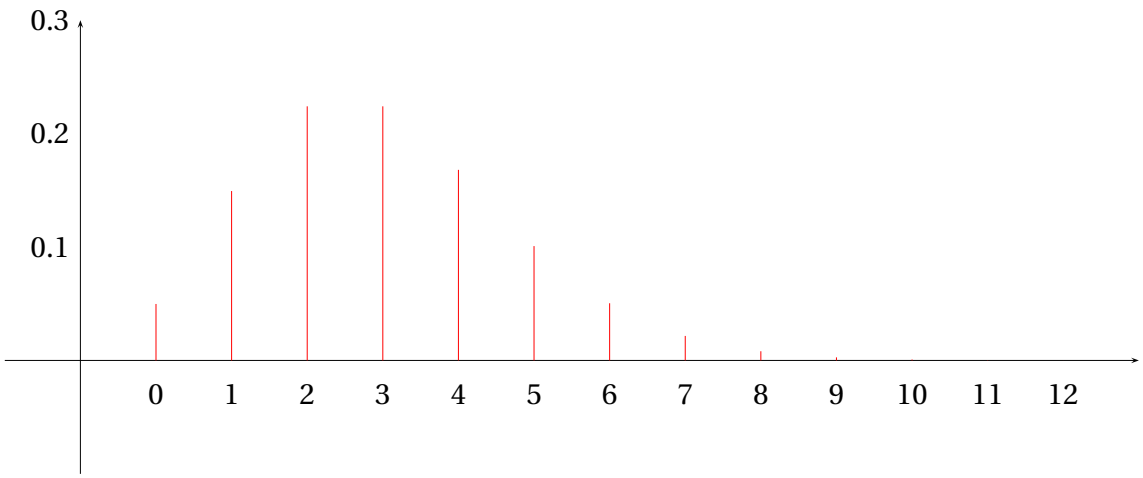
On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

X est donc une VARD infinie.

Pour $\mathscr{P}(3)$, on obtient le diagramme en bâtons :



Théorème 42 – Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{P}(\lambda)$

Soit X une VARD de loi $\mathscr{P}(\lambda)$. Alors X admet des moments de tous les ordres.
En particulier :

$$\mathbb{E}(X) = V(X) = \lambda$$

4 Exercices

VARD finies

Exercice 1 – Lois usuelles

Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs.
   X = nombre d'objets dans le premier tiroir.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos.
   X = nombre de bosses.
3. Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement et avec remise 10 boules de l'urne.
   X = nombre de boules vertes tirées.
4. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques.
   X = nombre de garçons d'une famille de 3 enfants.
5. On suppose que 1% des trèfles possédent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles.
   X = nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Exercice 2 – Jeux d'argent

Un jeu est dit *équitable* losque l'espérance du gain relatif du joueur est nulle. Pour chacun des jeux suivants, déterminer si le jeu est équitable.

1. Le joueur lance 2 dès. S'il sort 7, il gagne 5 euros, sinon il perd 1 euro.
2. Le joueur mise sur rouge ou noir à la roulette au casino (composée de 18 rouges, 18 noirs et du zéro qui est vert). Pour une mise donnée, la casino paye deux fois la mise en cas de sortie de la bonne couleur (la mise est perdue dans tous les cas).
3. Toujours à la roulette, il joue un numéro plein : s'il gagne, la casino lui paye 36 fois sa mise en cas de sortie du numéro choisi.
4. Le joueur remplit une grille de loto qui coûte ϵ euros : il choisit 6 numéros entre 1 et 49. Si ses numéros sortent, il gagne un million d'euros.

Exercice 3 – Somme des numéros tirés

Une urne contient deux boules marquées 1, deux marquées 2 et une marquée 3. On prélève simultanément deux boules au hasard et on appelle X la somme des numéros marqués sur les deux boules. Déterminer la loi de X son espérance et son écart-type.

Exercice 4 – Nombre de numéros tirés

On lance 4 dès équilibrés, on note X ="le nombre de numéros différents sortis". Déterminer la loi de X puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 5 – Plus grand numéro obtenu lors d'un tirage simultané

On effectue un tirage simultané de n boules dans une urne composée de N boules numérotées de 1 à N. On note X le plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$.
3. Déterminer l'espérance de X.
4. Mêmes questions avec Y = le plus petit numéro obtenu.

Exercice 6 – Loi hypergéométrique

1. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue n tirages successifs d'une boule sans remise.
   On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.
2. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue un tirage simultané de n boules.
   On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.
3. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.
   On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.

VARD infinies

Exercice 7 – Propriété générale d'une fonction de répartition

Soit X une VARD.

1. Montrer que F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t)$
   et $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b \Longrightarrow \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Exercice 8 – Lois usuelles

Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. Un employé de télémarketing appelle des clients pour leur vendre un volet roulant électrique. La probabilité qu'un client achète un volet est de $\frac{1}{100}$, et on suppose que sa liste de client est infinie.
   X = nombre de clients qu'elle doit appeler pour vendre le premier volet.
2. Chaque jour le cours d'une action monte avec probabilité $\frac{1}{3}$.
   X = nombre de jours consécutifs avant d'observer la première baisse.
3. Un concierge dispose d'un trousseau de n clefs, et ne sait plus laquelle ouvre sa porte. Il les essaie une par une en mettant de côté celles qui n'ouvrent pas la porte.
   X = nombre d'essais avant d'ouvrir la porte.
4. Le même concierge rentre chez lui après une soirée un peu trop alcoolisée. Cette fois il ne met plus de côté les clefs déjà essayées.
   X = nombre d'essais avant d'ouvrir la porte.

Exercice 9 – Rupture de stock

Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une vard X de loi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}$$

où $p > 0$ est le prix d'une campagne publicitaire de l'année précédente.

1. Vérifier que X suit bien une loi de probabilité.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X (si elles existent).
3. Connaissant son stock s, déterminer la probabilité de rupture de stock.

Exercice 10 – n-ième succès lors de tirages avec remise : loi binômiale négative

On admettra dans cet exercice que la série $\sum_{k \geq n} \binom{k}{n} x^k$ converge absolument si $|x| < 1$ et $n \in \mathbb{N}$, et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$$

On effectue des lancers indépendants d'une pièce qui donne pile avec probabilité $p \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé on note X_n le temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ pile.

1. (a) Donner $X_n(\Omega)$.
   (b) Pour $k \geq n$, déterminer $\mathbb{P}(X_n = k)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(X_n < +\infty)$.
   (d) Existence et calcul de $\mathbb{E}(x_n)$.
2. On note $T = X_2 - X_1$, ie T = « temps d'attente entre le premier et le second pile ».
   (a) Déterminer $T(\Omega)$.

(b) Pour $i \geq 1$ et $j \geq 2$, donner $\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j)$.

(c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, vérifier que $\mathbb{P}(T = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [X_2 = i + k]\big)$.

(d) Reconnaître la loi de T. Pouvait-on avoir ce résultat sans calcul ?

Exercice 11 – Parité d'une variable de Poisson

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. On note Y la variable aléatoire égale à 0 si X est paire et 1 sinon. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

Exercice 12 – Loi de Poisson composée

Un élément chimique émet des électrons pendant une période T. Le nombre d'électrons émis est une variable aléatoire Y qui suit une loi de POISSON de paramètre λ. Chaque électron a une probabilité p d'avoir un effet biologique (on dira qu'il est efficace). Soit Z la variable aléatoire égale au nombre d'électrons efficaces émis pendant une période T.

1. Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}([Y = i] \cap [Z = j])$.
2. Déterminez la loi de Z. Calculez son espérance.

Exercice 13 – Calcul d'espérance par analyse à un pas

On reprend l'exemple de la ruine du joueur.
Un joueur joue à un jeu d'argent contre le casino. On suppose qu'initialement la fortune du casino de est b, avec $b \in \mathbb{N}$.
Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$.
A chaque répétition du jeu on suppose que le joueur gagne 1 euros avec probabilité p ou perd 1 euros avec probabilité $q = 1 - p$.
On note X_a la variable aléatoire égale au nombre de tours de jeu avant que le joueur ou le casino soit ruiné, lors d'une partie où le joueur commence avec une fortune initiale de a euros.
Si ceci ne se produit jamais, on pose $X_a = -1$. On rappelle qu'on a démontré que $\mathbb{P}(X_a = -1)$ (et que c'est le toujours le joueur qui est ruiné si $p \leq q$).
On admet que X_a admet une espérance qu'on note $\mathbb{E}(X_a)$. On a $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{a+b}) = 0$.

1. Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, a+b-1]\!]$, montrer que :

$$\mathbb{P}(X_k = j) = q\mathbb{P}(X_{k-1} = j-1) + p\mathbb{P}(X_{k+1} = j-1)$$

   En déduire que $\mathbb{E}(X_k) = 1 + q\mathbb{E}(X_{k-1}) + p\mathbb{E}(X_{k+1})$.
2. Pour $p = q$.
   (a) Montrer l'existence d'un réel α tel que la variable $Y_k = X_k + \alpha k^2$ ait une espé-

rance qui vérifie :

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{E}(Y_k) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{k+1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{k-1})$$

(b) En utilisant la partie I montrer que $\mathbb{E}(X_a) = ab$. Calculer $\lim\limits_{b \to +\infty} \mathbb{E}(X_a)$. Interprétation ?

3. Pour $p \neq q$.

(a) Montrer l'existence d'un réel β tel que la variable $Z_k = X_k + \beta k$ ait une espérance qui vérifie :

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{E}(Z_k) = p\mathbb{E}(Z_{k+1}) + q\mathbb{E}(Z_{k-1})$$

(b) En utilisant la partie I montrer que $\mathbb{E}(X_a) = \dfrac{1}{p-q}\left(\dfrac{(a+b)(x^a-1)}{x^{a+b}-1} - a\right)$.

(c) Quelle est la limite de $\mathbb{E}(X_a)$ lorsque $b \to +\infty$ dans le cas $p < q$?

Exercice 14 – Modèle de Galton-Watson

Soit $p \in]0,1[$.
On considère une plante qui peut donner naissance à deux descendants avec la probabilité p, ou à aucun descendant avec la probabilité $1-p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de descendants issus de la $n^{\text{ème}}$ génération, c'est-à-dire le nombre de descendants de notre plante à la $(n+1)^{\text{ème}}$ génération.
On note aussi f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = px^2 + (1-p)$.

a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0,1]$.

b) On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1-p$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

Montrer qu'elle est bien défnie, puis étudier sa monotonie et sa convergence.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une relation entre $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 0)$.

d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$. Interpréter ce résultat.

Chapitre 14

Espaces préhilbertiens et euclidiens

Sommaire

1 Produit scalaire et norme associée 340

1.1 Produit scalaire 340

1.2 Norme euclidienne 341

2 Orthogonalité 343

3 Bases orthonormales 344

4 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie . . 348

5 Formes linéaires sur un espace euclidien 352

6 Exercices 353

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Produit scalaire

On commence par définir la notion de forme bilinéaire.

Définition 1 – Forme bilinéaire

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit qu'une application $\phi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *forme bilinéaire* si et seulement si $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in \mathbb{E}^3$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- ϕ **linéaire à gauche** $\phi(\lambda.\vec{x} + \mu.\vec{y}, \vec{z}) = \lambda.\phi(\vec{x}, \vec{z}) + \mu.\phi(\vec{y}, \vec{z})$
- ϕ **linéaire à droite** $\phi(\vec{x}, \lambda.\vec{y} + \mu.\vec{z}) = \lambda.\phi(\vec{x}, \vec{y}) + \mu.\phi(\vec{x}, \vec{z})$.

On dit que cette forme bilinéaire est :

1. **Symétrique** lorsque $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{E}^2$, $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = \phi(\vec{y}, \vec{x})$;
2. **Positive** lorsque $\forall \vec{x} \in \mathbb{E}$, $\phi(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$;
3. **Définie** lorsque $\forall \vec{x} \in \mathbb{E}$, $\phi(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Longleftrightarrow x = \vec{0_{\mathbb{E}}}$.

On vérifie facilement que, si ϕ est *symétrique*, elle est *bilinéaire* si et seulement si elle est *linéaire à gauche*.

Remarque. La bilinéarité a pour conséquence que si $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{E}^2$, $\phi(\vec{x}, \vec{0_{\mathbb{E}}}) = \phi(\vec{0_{\mathbb{E}}}, \vec{y}) = 0$.

En dimension finie, on peut développer une forme bilinéaire sur une base.

Définition 2 – Développement sur une base

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ une base de $\mathbb{E}$. Soit $\phi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Soient deux vecteurs décomposés sur la base $\mathscr{B}$:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i.\vec{e_i} \quad \text{et} \quad \vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j.\vec{e_j}$$

alors :

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_i.y_j.\phi(\vec{e_i}, \vec{e_j}) \right)$$

L'application bilinéaire ϕ est donc entièrement déterminée par la donnée des réels $\phi(\vec{e_i}, \vec{e_j})$, $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

On définit ensuite la notion de *produit scalaire*.

Définition 3 – Produit scalaire

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On appelle *produit scalaire* sur $\mathbb{E}$, une forme bilinéaire ϕ :

1. symétrique ;

2. définie ;
3. positive.

On note pour $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{E}^2$:

$$\phi(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = (\vec{x} \,|\, \vec{y}) = \vec{x}.\vec{y}$$

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle un *espace préhilbertien réel*.

Pour montrer que ϕ est *bilinéaire symétrique*, il suffit de montrer que ϕ est *symétrique* et *linéaire à gauche*.

✎ ***Exemple.*** Sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, on définit le *produit scalaire canonique* :

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

✎ ***Exemple.*** Sur $\mathbb{E} = C^0([a,b], \mathbb{R})$, on a un produit scalaire usuel :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t$$

✎ ***Exemple.*** Sur $\mathbb{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a le produit scalaire classique :

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A \times {}^tB)$$

✎ ***Exemple.*** Sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$, on a par exemple le produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t).Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t$$

1.2 Norme euclidienne

Définition 4 – Norme euclidienne

Si $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}$, on appelle *norme euclidienne* associée à ϕ l'application $\|.\|$ définie par :

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

Une norme euclidienne vérifie les identité suivantes.

Théorème 5 – Identités remarquables

Si $\|.\|$ norme euclidienne associée à $\langle .,. \rangle$, et si $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{E}^2$, on a les *identités remarquables* :

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \quad \text{et} \quad \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

ainsi que les *identités de polarisation* :

$$\boxed{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2\right) \quad \text{et} \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)}$$

✎ ***Exemple.*** Démontrer l'*identité du parallélogramme*, pour deux vecteurs $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{E}^2$,

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\right)$$

✎ ***Exemple.*** Soit $\mathbb{E}$ un espace préhilbertien réel et n vecteurs $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \le i < j \le n} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2$.

On suppose que $\forall i \neq j,\ \|x_i - x_j\| \ge 2$ et qu'il existe une boule fermée $\overline{B}(a, R)$ contenant les vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$. Montrer que $R \ge \sqrt{\dfrac{2(n-1)}{n}}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est valable dans un espace préhilbertien réel.

Théorème 6 – Cauchy-Schwarz

Soit un produit scalaire $\langle ., . \rangle$. Pour deux vecteurs $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{E}^2$,

$$\boxed{|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \le \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$$

avec égalité si, et seulement si, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires.

✎ ***Exemple.*** Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que : $\mathrm{Tr}(A) \le \sqrt{n.\mathrm{Tr}\,{}^tAA}$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

On en déduit l'inégalité de Minkowski.

Théorème 7 – Inégalité de Minkowski

Pour deux vecteurs $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{E}^2$,

$$\boxed{\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|}$$

avec égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\vec{y} = \lambda.\vec{x}$ ou si $\vec{x} = \vec{0}_{\mathbb{E}}$.

On obtient le résultat fondamental suivant.

Corollaire 8 – La norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire définit une norme sur $\mathbb{E}$.

Un espace préhilbertien réel est donc un cas particulier d'espace vectoriel normé.

Définition 9 – Vecteur normé

Si $\|.\|$ est la norme euclidienne associée à $\langle .,. \rangle$, un vecteur $x \in \mathbb{E}$ est dit *unitaire* ou *normé* lorsque $\|x\| = 1$.

2 Orthogonalité

On considère ici un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ et un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ sur $\mathbb{E}$.

Définition 10 – Orthogonalité

1. On dit que deux vecteurs $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{E}^2$ sont *orthogonaux* si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. On le note $\vec{x} \perp \vec{y}$.
2. On dit que deux sev $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ de $\mathbb{E}$ sont *orthogonaux* si
$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{F} \times \mathbb{G}, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$$
On note $\mathbb{F} \perp \mathbb{G}$.
3. On dit qu'une famille de vecteurs $(\vec{x_i})_{i \in I}$ est *orthogonale* si :
$$\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow \langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0$$
4. On dit qu'une famille de vecteurs $(\vec{x_i})_{i \in I}$ est *orthonormale* ou *orthonormée* si elle est à la fois orthogonale et normée, ie :
$$\forall (i,j) \in I^2, \quad \langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = \delta_{ij}$$

✎ ***Exemple.*** Le vecteur nul $\vec{0_{\mathbb{E}}}$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathbb{E}$. C'est le seul vecteur de $\mathbb{E}$ ayant cette propriété :

$$\left(\forall \vec{x} \in \mathbb{E}, \quad \langle \vec{x}, \vec{y}, = \rangle 0\right) \Longrightarrow \vec{y} = \vec{0_{\mathbb{E}}}$$

On peut généraliser le théorème de Pythagore.

Théorème 11 – Identité de Pythagore

1. Soient deux vecteurs $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{E}^2$,
$$\vec{x} \perp \vec{y} \Longleftrightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$
2. Soit $(\vec{x_i})_{1 \leq i \leq p}$ une famille finie de vecteurs orthogonale,
$$\left\| \sum_{i=1}^{p} \vec{x}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|\vec{x}_i\|^2$$

L'orthogonalité assure la liberté.

Théorème 12 – Liberté d'une famille orthogonale

Une famille orthogonale $(\overrightarrow{x_i})_{i\in I}$ de vecteurs *non-nuls* est libre.

✎ ***Exemple.*** **Polynômes de Tchebychev.** On définit la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2X.T_{n+1} - T_n$.
On peut vérifier que $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n.\theta)$.
De plus, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

On définit aussi l'orthogonal d'une partie.

Définition 13 – Orthogonal d'une partie

Soit $A \subseteq \mathbb{E}$ une partie de $\mathbb{E}$. On définit son orthogonal par :

$$A^\perp = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{E} \mid \forall \overrightarrow{a} \in A,\ \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{a} \rangle = 0\}$$

Il a les propriétés suivantes.

Théorème 14 – Propriétés de l'orthogonal

1. $A^\perp$ est un sev de $\mathbb{E}$;
2. $A \subseteq B \Longrightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$;
3. $A^\perp = [\mathrm{Vect}(A)]^\perp$;
4. $A \subseteq [A^\perp]^\perp$

Des sous-espaces deux à deux orthogonaux sont en somme directe.

Définition 15 – Somme directe orthogonale

Soient des sev $\mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_p$ tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!], \quad i \neq j \Longrightarrow F_i \perp F_j$$

Alors la somme $\mathbb{F}_1 + \cdots + \mathbb{F}_p$ est directe. On note alors

$$\mathbb{F}_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{F}_2 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{F}_p$$

3 Bases orthonormales

En dimension finie, un espace préhilbertien réel est appelé espace euclidien.

Définition 16 – Espace euclidien

On dit qu'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ est *euclidien* si :

1. $\mathbb{E}$ est préhilbertien réel (=muni d'un produit scalaire) ;
2. $\mathbb{E}$ est de dimension finie.

Dans un espace euclidien $\mathbb{E}$, on utilise des bases dont les vecteurs sont orthogonaux.

Définition 17 – Bases orthogonales, orthonormales

Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de $\mathbb{E}$. On dit que $\mathscr{B}$ est une base :

1. *orthogonale* si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Longrightarrow \langle \overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j \rangle = 0$;
2. *orthonormale* si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle \overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j \rangle = \delta_{ij}$.

Le terme « base orthonormale » est abrégé en BON.

✎ ***Exemple.*** Les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont orthonormales pour le produit scalaire canonique.

✎ ***Exemple.*** Si on note $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $P[i,j] = \langle \overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j \rangle$, où $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de $\mathbb{E}$:

1. $\mathscr{B}$ est une base orthogonale si et seulement si P est une matrice diagonale.
2. $\mathscr{B}$ est une base orthonormale si et seulement si $P = I_n$.

Les règles de calculs suivantes sont indispensables, et il faut en connaître la démonstration.

Théorème 18 – Calculs dans une bon

Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une bon de $\mathbb{E}$.

1. Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la BON $\mathscr{B}$ sont des produits scalaires :
$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{x} \rangle . \overrightarrow{e}_i$$
2. Si $\overrightarrow{x} = x_1.\overrightarrow{e_1} + \dots + x_n.\overrightarrow{e_n}$ et $\overrightarrow{y} = y_1.\overrightarrow{e_1} + \dots + y_n.\overrightarrow{e_n}$, alors :
$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i = x_1.y_1 + \dots + x_n.y_n = \sum_{i=1}^{n} \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_i} \rangle . \langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{e_i} \rangle$$
3. Si $\overrightarrow{x} = x_1.\overrightarrow{e_1} + \dots + x_n.\overrightarrow{e_n}$:
$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_i} \rangle^2$$

Matriciellement, si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale, $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{x}\right)$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{y}\right)$,

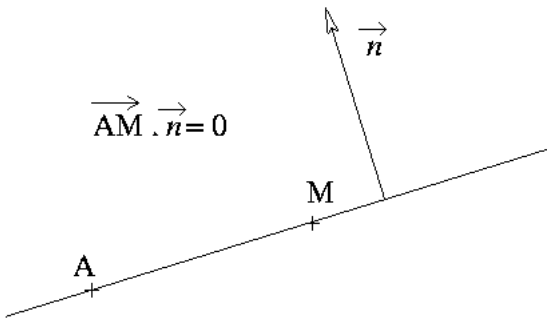
$$\boxed{\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \right\rangle = {}^tXY, \quad \left\| \overrightarrow{x} \right\| = \sqrt{{}^tXX}}$$

✎ ***Exemple.*** Soit un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ d'un espace euclidien et $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\right)$ une base orthonormale. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

✎ ***Exemple.*** Soit un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ d'un espace euclidien et $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\right)$ une base orthonormale. Vérifier que $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overrightarrow{e_i}, u\left(\overrightarrow{e_i}\right) \right\rangle$.

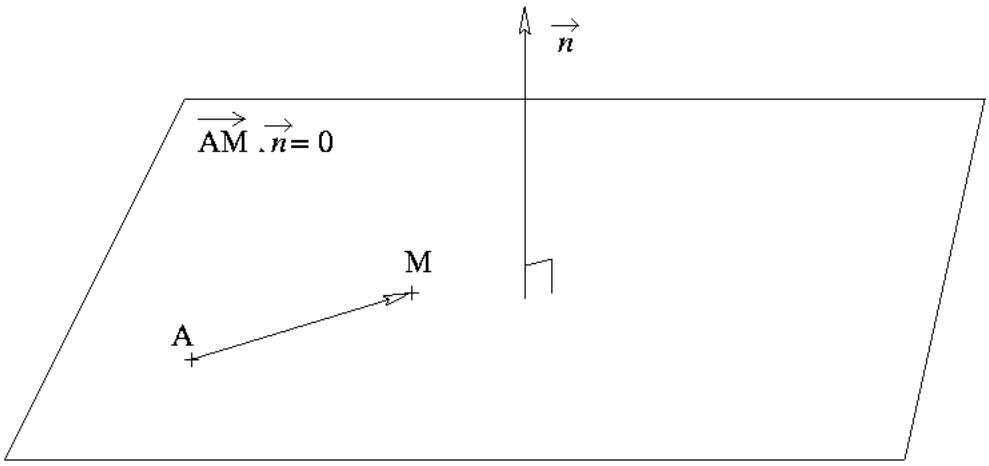
Applications géométriques.

• Dans le plan $\mathbb{R}^2$. On se donne une base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. La droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b)$ a pour équation cartésienne : $ax + by = 0$. Un vecteur directeur est donc le vecteur $\overrightarrow{u}(-b, a)$.



Le cercle de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon $r \geq 0$ a pour équation : $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$.

• Dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On se donne une base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Le plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ a pour équation cartésienne : $ax + by + cz = 0$.



La sphère de centre $A(x_A, y_A, z_A)$ et de rayon $r \geq 0$ a pour équation :
$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$.

On dispose du théorème fondamental suivant qui donne un algorithme permettant d'obtenir une base orthonomale à partir d'une base quelconque.

Théorème 19 – Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(\mathbb{E}, \|)\|$ euclidien et $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\right)$ une base quelconque de $\mathbb{E}$. Alors il existe une unique base *orthonormale* $\mathscr{C} = \left(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}\right)$ de $\mathbb{E}$ vérifiant :

1. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\overrightarrow{\varepsilon_i} \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_i}\right)$;
2. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\left\langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{\varepsilon_i} \right\rangle > 0$.

En pratique :

• On pose $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_1}$ puis $\overrightarrow{\varepsilon_1} = \dfrac{\overrightarrow{u_1}}{\left\|\overrightarrow{u_1}\right\|}$;

• On pose $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{e_2} + \lambda.\overrightarrow{\varepsilon_1}$, on choisit $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que $\left\langle \overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{u_2} \right\rangle = 0$, puis on pose $\overrightarrow{\varepsilon_2} = \dfrac{V u_2}{\left\|\overrightarrow{u_2}\right\|}$;

• On pose $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{e_3} + \lambda.\overrightarrow{\varepsilon_1} + \mu.\overrightarrow{\varepsilon_2}$, on choisit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ pour que $\left\langle \overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{u_3} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{u_3} \right\rangle = 0$, puis on pose $\overrightarrow{\varepsilon_3} = \dfrac{\overrightarrow{u_3}}{\left\|\overrightarrow{u_3}\right\|}$;

• ...

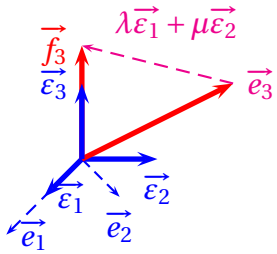


FIGURE 14.1 – Algorithme de Schmidt : redressement de e_3

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^3$, orthonormaliser la famille $\big((0,1,1);(1,0,1);(1,1,0)\big)$.

Outre son intérêt pratique, ce théorème a aussi les conséquences suivantes.

Corollaire 20 – Existence de bon

1. Tout espace euclidien possède une base orthonormale.
2. Une famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormale.

On peut donc dire que le théorème de la base incomplète est vrai pour les familles orthonormales (on rappelle qu'une famille orthonormale est libre).

✎ ***Exemple.*** Dans l'espace $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, déterminer une base orthonormale.

Matriciellement, le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt donne l'existence de la décomposition QR d'une matrice inversible.

Corollaire 21 – Décomposition QR d'une matrice inversible

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice inversible, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

1. $A = QR$;
2. Q est inversible et $Q^{-1} = {}^tQ$ (on dit que Q est une *matrice orthogonale*)
3. R est triangulaire supérieure.

Cette décomposition facilite grandement la résolution d'un système linéaire de Cramer du type $AX = B$: en effet on se ramène à $RX = C$ (où $C = {}^tQB$), système linéaire plus simple puisque R est triangulaire supérieure.

En dimension finie, l'orthogonal d'un sev dispose de propriétés supplémentaires.

Théorème 22 – Propriétés de l'orthogonal en dimension finie

Soit $\mathbb{E}$ un espace euclidien et $\mathbb{F}$ un sev de $\mathbb{E}$ de dimension p.

1. $\dim \mathbb{F}^\perp = n - p$
2. $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^\perp$
3. $(\mathbb{F}^\perp)^\perp = \mathbb{F}$

✎ ***Exemple.*** Si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont deux sev d'un espace euclidien, montrer que : $(\mathbb{F} + \mathbb{G})^\perp = \mathbb{F}^\perp \cap \mathbb{G}^\perp$ et $(\mathbb{F} \cap \mathbb{G})^\perp = \mathbb{F}^\perp + \mathbb{G}^\perp$.

4 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

On considère dans cette partie un espace préhilbertien réel $\mathbb{E}$ (pas nécessairement de dimension finie).

Définition 23 – Projecteur orthogonal

On dit qu'un endomorphisme $p \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ est un *projecteur orthogonal* si :

1. p est un projecteur : $p^2 = p$.
2. $\ker p \perp \operatorname{Im} p$.

✎ ***Exemple.*** Soit $\mathbb{E}$ un espace euclidien, et $p \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ un projecteur.
Montrer que $\forall \vec{x} \in \mathbb{E}$, $\|p(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$ si et seulement si p est un projecteur orthogonal.

On a la proposition suivante, qui est non triviale lorsque $\mathbb{E}$ est de dimension infinie.

Proposition 24 – Un sev de dimension finie possède un supplémentaire orthogonal

Soit $\mathbb{E}$ un espace préhilbertien réel et soit $\mathbb{F}$ un sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie. L'orthogonal de $\mathbb{F}$ est un supplémentaire orthogonal de $\mathbb{F}$:

$$E = \mathbb{F} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{F}^{\perp}$$

De plus il est unique au sens suivant. Si $\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ tel que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{G}$, alors $\mathbb{G} = \mathbb{F}^{\perp}$.

✎ ***Exemple.*** $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

On peut ensuite définir le projecteur orthogonal sur un sev de dimension finie.

Définition 25 – Projecteur orthogonal sur un sev de dimension finie

Soit $\mathbb{E}$ un espace préhilbertien réel et $\mathbb{F}$ un sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie. On appelle *projecteur orthogonal* sur $\mathbb{F}$, le projecteur sur $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{F}^{\perp}$.

Remarquer qu'il existe une infinité de projecteur sur $\mathbb{F}$, mais un *unique* projecteur *orthogonal*.

Il faut être capable de déterminer en pratique le projeté orthogonal d'un vecteur.

Le résultat suivant utilise une base orthonormée.

Théorème 26 – Détermination du projeté orthogonal

Soit $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ de dimension finie, et $\vec{x} \in \mathbb{E}$. Si $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ est une base orthonormale de $\mathbb{F}$, alors le projeté orthogonal $p(\vec{x})$ du vecteur $\vec{x}$ sur le sous-espace $\mathbb{F}$ vaut :

$$\boxed{p(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{p} \langle \vec{x}, \vec{e_i} \rangle . \vec{e_i}}$$

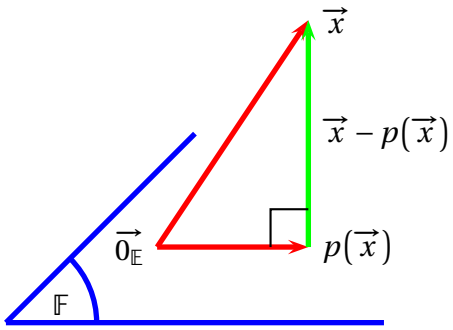
On a aussi la caractérisation suivante.

Théorème 27 – Caractérisation de $p(\vec{x})$

Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathbb{F} = \operatorname{Im} p$. Soit $\vec{x} \in \mathbb{E}$. Alors $p(\vec{x})$ est l'unique vecteur de $\mathbb{F}$ vérifiant la condition d'orthogonalité : $\boxed{\begin{cases} \vec{x} - p(\vec{x}) \in \mathbb{F}^{\perp} \\ p(\vec{x}) \in \mathbb{F} \end{cases}}$.

On peut ainsi utiliser une base de $\mathbb{F}$ qui n'est pas orthonormale :

1. on détermine une base *quelconque* de $\mathbb{F}$, $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$;
2. on décompose $p(\vec{x})$ sur cette base : $p(\vec{x}) = \lambda_1 . \vec{e_1} + \dots + \lambda_p . \vec{e_p}$;



3. on écrit les p conditions d'orthogonalité : $\forall i \in [\![1,p]\!], \langle \overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x}), Ve_i \rangle = 0$;
4. on résout alors le système de p équations : $\forall i \in [\![1,p]\!], \sum_{j=1}^{p} \lambda_j . \langle \overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_i} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_i} \rangle$;
5. si la base $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est orthonormale, alors la matrice du système est I_p et le système est déjà résolu.

Si on a déterminé $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^{\perp}$ par analyse-synthèse, alors on a aussi déterminé $p_{\mathbb{F}}$ et $p_{\mathbb{F}^{\perp}}$.

✎ ***Exemple.*** Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $p_{\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}(M)$ et $p_{\mathscr{A}_n(\mathbb{R})}(M)$.

La projection orthogonale permet de calculer la distance à un sev.

Définition 28 – Distance à un sev

Soit $\mathbb{F}$ un sev de $\mathbb{E}$ et un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$. On appelle *distance* de $\overrightarrow{x}$ au sous-espace $\mathbb{F}$:

$$d(\overrightarrow{x}, \mathbb{F}) = \inf_{\overrightarrow{y} \in \mathbb{F}} \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$$

Cette distance s'exprime à l'aide du projeté orthogonal.

Théorème 29 – Meilleure approximation

Soit $\mathbb{F}$ un sev de dimension finie de $\mathbb{E}$. On note $p_{\mathbb{F}}$ le projecteur orthogonal sur $\mathbb{F}$. Alors si $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$, $p_{\mathbb{F}}(\overrightarrow{x})$ est l'unique vecteur de $\mathbb{F}$ qui vérifie $d(Vx, \mathbb{F}) = \|\overrightarrow{x} - p_{\mathbb{F}}(\overrightarrow{x})\| = \|p_{\mathbb{F}^{\perp}}(\overrightarrow{x})\|$:

1. $\forall \overrightarrow{y} \in \mathbb{F}, \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| \geq \|\overrightarrow{x} - p_{\mathbb{F}}(\overrightarrow{x})\|$;
2. $\forall \overrightarrow{y} \in \mathbb{F}, \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| = d(\overrightarrow{x}, \mathbb{F}) \iff \overrightarrow{y} = p_{\mathbb{F}}(\overrightarrow{x})$.

On a donc :

$$d(\overrightarrow{x}, \mathbb{F}) = \min_{\overrightarrow{y} \in \mathbb{F}} \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$$

et ce minimum est atteint en l'unique vecteur $\overrightarrow{y} = p_{\mathbb{F}}(\overrightarrow{x})$.

C'est une conséquence de l'identité de Pythagore :

$$\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x} - p_{\mathbb{F}}(\overrightarrow{x})\|^2 + \|p_{\mathbb{F}}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{y}\|^2$$

✎ ***Exemple.*** Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, calculer $d\big(M, \mathscr{S}_3(\mathbb{R})\big)$.

✎ ***Exemple.*** Pour $n \geq 3$, on munit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t).Q(t)\,\mathrm{d}t$.
Vérifier que $d\big(X^3, \mathbb{R}_2[X]\big) = \dfrac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère le sous-espace $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\big((0,0,1,0),(1,1,1,1)\big)$.
Écrire la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathbb{F}$ dans la base canonique. Calculer $d\big(\vec{u}, \mathbb{F}\big)$ où $\vec{u} = (2,0,0,1)$.

✎ ***Exemple.*** Si $\mathbb{E}$ est un espace euclidien (donc de dimension finie) et $\mathbb{H}$ est un hyperplan de $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{H}^\perp$ est une droite vectorielle : $\mathbb{H}^\perp = \mathrm{Vect}\big(\vec{n}\big)$. On en déduit que pour tout $\vec{x} \in \mathbb{E}$, $p_{\mathbb{H}}\big(\vec{x}\big) = \vec{x} - \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}.\vec{n}$ et donc que :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{E}, \quad d\big(\vec{x}, \mathbb{H}\big) = \frac{\big|\langle \vec{n}, \vec{x}\rangle\big|}{\|\vec{n}\|}$$

Applications géométriques.

• Calculs de distance dans le plan. On se donne une repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Si $\vec{v}\,(x_0, y_0)$ est un vecteur et D la droite d'équation cartésienne $ax + by = 0$, alors :

$$d(\vec{v}, D) = \frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• Calculs de distance dans l'espace. On se donne une repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si $\vec{v}\,(x_0, y_0, z_0)$ est un vecteur et P le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz = 0$, alors :

$$d(\vec{v}, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

On a aussi l'inégalité suivante.

Théorème 30 – Inégalité de Bessel

Soit $\mathscr{B} = \big(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_p}\big)$ une base orthonormée de $\mathbb{F}$ et $\vec{x} \in \mathbb{E}$. On a :

$$\boxed{\|\vec{x}\|^2 = \|p_{\mathbb{F}}(\vec{x})\|^2 + \|\vec{x} - p_{\mathbb{F}}(\vec{x})\|^2}$$

D'où l'inégalité :

$$\boxed{\left\| p_{\mathbb{F}}(\vec{x}) \right\| = \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x}, \vec{e_i} \rangle^2 \leq \| \vec{x} \|^2} \quad \text{(inégalité de Bessel)}$$

5 Formes linéaires sur un espace euclidien

Théorème 31 – Formes linéaires et produit scalaire

Soit $\mathbb{E}$ un espace euclidien.

1. Pour $\vec{z} \in \mathbb{E}$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi_{\vec{z}} : \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & \langle \vec{z}, \vec{x} \rangle \end{array}$$

   est une forme linaire sur $\mathbb{E}$.

2. Pour toute forme linéaire ϕ sur $\mathbb{E}$, il existe un unique vecteur $V z_\phi$ tel que

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{E}, \quad \phi(\vec{x}) = \langle \vec{z_\phi}, \vec{x} \rangle$$

Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, pour une forme linéaire

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \end{array}$$

$z_\phi = (a_1, \ldots, a_n)$ est un vecteur orthogonal à l'hyperplan $H = \ker \phi$. On retrouve ainsi les résultats connus pour $n = 2$ et $n = 3$.

✎ ***Exemple.*** Décrire toutes les formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

6 Exercices

Produits scalaires

Exercice 1 – Caractérisation des normes euclidiennes

Soit $(\mathbb{E}, \|.\|)$ un evn. Montrer que $\|.\|$ est une norme euclidienne si, et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{E}^2, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \quad \text{(égalité du parallélogramme)}$$

Exercice 2 – Produit scalaire avec poids sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$

Sur $\mathbb{E} = C^0([a,b],\mathbb{R})$, si ω est une fonction continue sur $[a,b]$ et strictement positive, montrer qu'on a un produit scalaire : $\phi(f,g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$ Remarque : la fonction ω est appelée *fonction poids*.

Exercice 3 – Familles obtusangles

Soit $\mathbb{E}$ un espace préhilbertien réel et f une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{E}$. On définit le demi-espace :

$$\mathbb{E}^+ = \{x \in \mathbb{E} \mid f(x) > 0\}$$

1. Soient p vecteurs $(x_1,\dots,x_p) \in (\mathbb{E}^+)^p$ du demi-espace. On suppose que $\forall i \neq j$, $\langle x_i, x_j\rangle < 0$. Montrer que la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est libre.
   Hint : On pourra considérer une CL de ces vecteurs dans laquelle on séparera les coefficients positifs des coefficients négatifs.
2. En déduire que dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, il est impossible de trouver $(n+2)$ vecteurs formant deux à deux un angle obtu.
   On pourra considérer la forme linéaire f définie par $f(x) = -\langle x, x_{n+2}\rangle$.

Exercice 4 – Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Dans l'espace $\mathbb{E} = \mathbb{R}_n[X]$, on considère $(n+1)$ réels distincts $(a_0,\dots,a_n)$ et on définit :

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k) \end{array}$$

1. Vérifier que ϕ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$;
2. Trouver sans calcul (ou presque) une base orthonormale de $\mathbb{E}$.
3. Quelles sont les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 5 – Produit scalaire sur $C^1\big([0,1];\mathbb{R}\big)$

Soit $\mathbb{E} = C^1\big([0,1];\mathbb{R}\big)$. Pour $(f,g) \in \mathbb{E}^2$, on pose :

$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 \big(f(t) + f'(t)\big)\big(g(t) + g'(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

Exercice 6 – Produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

On note $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$ et on considère l'application $\varphi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que l'application φ est bien définie de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur E.
3. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, calculer $\varphi(X^p, X^q)$.
4. Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(1, X, X^2)$.

Exercice 7 – Caractérisation des BON

Soient $\mathbb{E}$ un espace euclidien et $\big(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\big)$ une famille de vecteurs *unitaires* de $\mathbb{E}$. Établir l'équivalence des propositions :

- $\big(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\big)$ est une base orthonormale de $\mathbb{E}$;
- $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E},\ \big\|\overrightarrow{x}\big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \big\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_i}\big\rangle^2$

Exercice 8 – Une inégalité

Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs d'un espace préhilbertien réel $\mathbb{E}$.
On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1, -1\}^n,\ \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right\| \leqslant M$$

Montrer

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leqslant M^2$$

Hint : procéder par récurrence.

Exercice 9 – Exemple d'adjoint

On munit l'espace $\mathbb{E} = C^0\big([0,1];\mathbb{R}\big)$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.
Pour $f \in \mathbb{E}$, on note F la primitive de f qui s'annule en 0

$$\forall x \in [0,1]\,, F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et on considère l'application $v : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ déterminée par $v(f) = F$.

1. Vérifier que v est un endomorphisme de $\mathbb{E}$.
2. Déterminer un endomorphisme $v^\star$ vérifiant

$$\forall f, g \in \mathbb{E}, \langle v(f), g\rangle = \langle f, v^\star(g)\rangle$$

3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $v^\star \circ v$.

Exercice 10 – Exemple de polynômes orthogonaux

On définit

$$Q_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

1. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que Q_n possède n racines simples dans $]-1,1[$.
2. Montrer que

$$Q_n = X^n + (X^2-1)R_n(X)$$

avec $R_n \in \mathbb{R}[X]$. En déduire $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.

3. On pose, pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4. Calculer $\|Q_n\|^2$.

Projection orthogonale

Exercice 11 – Projection orthogonale sur un hyperplan

Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on considère un vecteur $\overrightarrow{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, avec $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = 1$.
Calculer $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$ où p est le projecteur orthogonal sur l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{b}\right)^\perp$ et $\mathscr{B}$ la base canonique. On l'exprimera à l'aide de la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{b}\right)$.

Exercice 12 – Distance à un s.e.v.

Soit $\mathbb{E} = C^0\big([-\pi,\pi];\mathbb{R}\big)$. Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la quantité

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\mathrm{e}^t - (a + b\sin t + c\cos t)\big)^2\,\mathrm{d}t$$

soit minimale.

Exercice 13 – Distance à un s.e.v.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. Déterminer

$$\inf_{S\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}\sum_{1\leq i,j\leq n}[a_{ij} - s_{ij}]^2$$

Exercice 14 – Matrice d'une projection orthogonale dans une BON

Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = \big(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}\big)$ et $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ muni d'une base orthonormée $\big(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_p}\big)$.
Montrer que la matrice de $p_{\mathbb{F}}$, projecteur orthogonal sur $\mathbb{F}$, dans la base caB est

$$\sum_{k=1}^{p} X_k\,{}^tX_k$$

où X_k est la colonne des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{x_k}$ dans $\mathscr{B}$.

Exercice 15 – Matrice de Gram

Soit $\mathbb{E}$ un espace euclidien. Pour $\big(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\big)$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ on note $G\big(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\big)$ la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice $[i,j]$ est $\big\langle\overrightarrow{u_i},\overrightarrow{u_j}\big\rangle$.

1. Montrer que $\big(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\big)$ est libre si, et seulement si, $\det G\big(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\big) \neq 0$.
2. Montrer que si $\big(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p}\big)$ est une base d'un sev $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$, alors, pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$:

$$d\big(\overrightarrow{x},\mathbb{F}\big) = \sqrt{\frac{\det G\big(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p},\overrightarrow{x}\big)}{\det G\big(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p}\big)}}$$

Représentation matricielle du produit scalaire

Exercice 16 – Solutions de ${}^tXAY = {}^tXBY$

Soient deux matrices $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAY = {}^tXBY$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 17 – Solutions de ${}^tXAX = {}^tXBX$

1. Vérifier que :
$$\forall (X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAY = {}^tY\,{}^tAX$$
2. (a) Soit A une matrice d'ordre n antisymétrique.
Montrer que : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX = 0$

   (b) Soit A une matrice d'ordre n symétrique telle que :
$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX = 0$$
Montrer que $A = 0_n$.

   (c) Déterminer les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :
$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX = 0$$
On décomposera A comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
3. Déterminer les matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :
$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX = {}^tXBX$$

Exercice 18 – Sur la matrice ${}^tAA$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, démontrer les égalités suivantes :

1. $\ker\left({}^tA\right) = \mathrm{Im}(A)^\perp$
2. $\mathrm{Im}\left({}^tA\right) = \ker(A)^\perp$
3. $\ker\left({}^tAA\right) = \ker(A)$
4. $\mathrm{Im}\left({}^tAA\right) = \ker(A)^\perp$
5. $\ker\left(A\,{}^tA\right) = \mathrm{Im}(A)^\perp$

6. $\ker\left(A^tA\right) = \mathrm{Im}(A)$
7. $\mathrm{rg}\left({}^tAA\right) = \mathrm{rg}\left(A^tA\right) = \mathrm{rg}(A)$

Représentation des formes linéaires via le produit scalaire

Exercice 19 – Exemple dans $\mathbb{R}_n[X]$

1. Montrer l'existence et l'unicité de $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Montrer que A est de degré n.

Matrices symétriques positives et définies positives

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On dit que :

- A est *positive* si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geq 0$;
- A est *définie positive* si A est positive et

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX = 0 \Longleftrightarrow X = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Exercice 20 – Propriétés simples des matrices de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.

1. Montrer que A est inversible ;
2. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) > 0$.

Exercice 21 – Matrice de Hilbert

On considère la matrice $H = \left(\left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $H \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Hint : On pourra remarquer que $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k\, dt$.

Exercice 22 – D'autres propriétés de la matrice ${}^tAA$

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^tAA$.

1. Montrer que B est positive.
2. Montrer que B est définie positive si, et seulement si, A est inversible.

Chapitre 15

Séries entières

Sommaire

1 Généralités 362
1.1 Rayon de convergence 362
1.2 Calcul du rayon de convergence 366
1.3 Opérations algébriques sur les séries entières 368
1.4 Séries entières d'une variable réelle 370
2 Fonctions développables en série entière 371
2.1 Définitions 371
2.2 DSE usuels 373
3 Applications des séries entières 374
3.1 DSE d'une fonction 374
3.2 Régularité d'une fonction 374
3.3 Équations différentielles 374
3.4 Calcul de la somme d'une série entière 375
3.5 Suites récurrentes, dénombrement 375
3.6 Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète à valeurs entières 375
4 Exemples de séries entières d'une variable complexe 377
5 Exercices 379

On souhaite étudier les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Ce sont des sommes de séries de fonctions.
On étudiera le problème de la convergence, on observera leur régularité et on verra qu'un grand nombre de fonctions usuelles peuvent s'écrire ainsi.

1 Généralités

1.1 Rayon de convergence

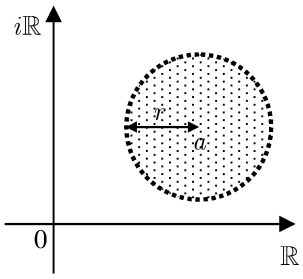
Définition 1 – Disques ouverts/fermés

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, appelle disque ouvert de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$ la partie :

$$D(a,R) = \left\{z \in \mathbb{C} \middle/ |z-a| < R\right\}$$

De même on définit le disque fermé de centre a et de rayon $R > 0$:

$$\overline{D(a,R)} = \left\{z \in \mathbb{C} \middle/ |z-a| \leq R\right\}$$



Il s'agit en fait des boules ouvertes/fermées dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}, |.|)$.

Dans ce chapitre on utilisera principalement les disques centrés en 0 :

$$D(0,R) = \left\{z \in \mathbb{C} \middle/ |z| < R\right\} \quad \text{et} \quad \overline{D(0,R)} = \left\{z \in \mathbb{C} \middle/ |z| \leq R\right\}$$

Définition 2 – Série entière

Soit une suite de complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle *série entière* la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ où

$$\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a_n z^n \end{array}$$

On note $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une telle série entière.

La suite (a_n) peut n'être définie qu'à partir du rang n_0. On note alors $\sum_{n\geq n_0} a_n z^n$ la série entière correspondante.

Les sommes partielles de cette série de fonctions sont des fonctions polynômiales :

$$\begin{array}{rcl} S_n : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \end{array}$$

Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $D \subset \mathbb{C}$, on définit la *somme* de la série entière :

$$\begin{array}{rcl} S : D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$$

Une telle fonction S généralise en quelque sorte les fonctions polynômiales et nous verrons qu'elle en partage certaines propriétés de « rigidité ». Pour une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(z)$ quelconque, le domaine de convergence peut être compliqué. Pour une série entière, nous allons voir que le domaine de convergence est très simple.

⚠ La somme d'une série entière n'est plus polynômiale.

✎ ***Exemple.*** Considérons la série entière $\sum_{n\geq 0} z^n$. C'est une série géométrique qui converge pour $|z| < 1$, sa somme est la fonction :

$$\begin{array}{rcl} S : D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{1-z} \end{array}$$

✎ ***Exemple.*** La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, est sa somme est la fonction exponentielle :

$$\begin{array}{rcl} S : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \exp(z) \end{array}$$

Remarquer qu'il y a toujours au moins un point $z \in \mathbb{C}$ où la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge : le point $z = 0$. En effet $0^0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0^n = 0$, et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0$.

Le résultat fondamental est le suivant.

Lemme 3 – Lemme d'Abel

On considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\rho > 0$.
On suppose que la *suite* $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée*.
Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

Le lemme d'Abel permet de définir le rayon de convergence d'une série entière.

Définition 4 – Rayon de convergence

On appelle *rayon de convergence* de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, la borne supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) des réels positifs $\rho \geq 0$ tels que la suite $(a_n\rho^n)$ soit bornée :

$$\boxed{R = \sup\{\rho \geq 0 \mid (a_n\rho^n) \text{ est bornée}\}}$$

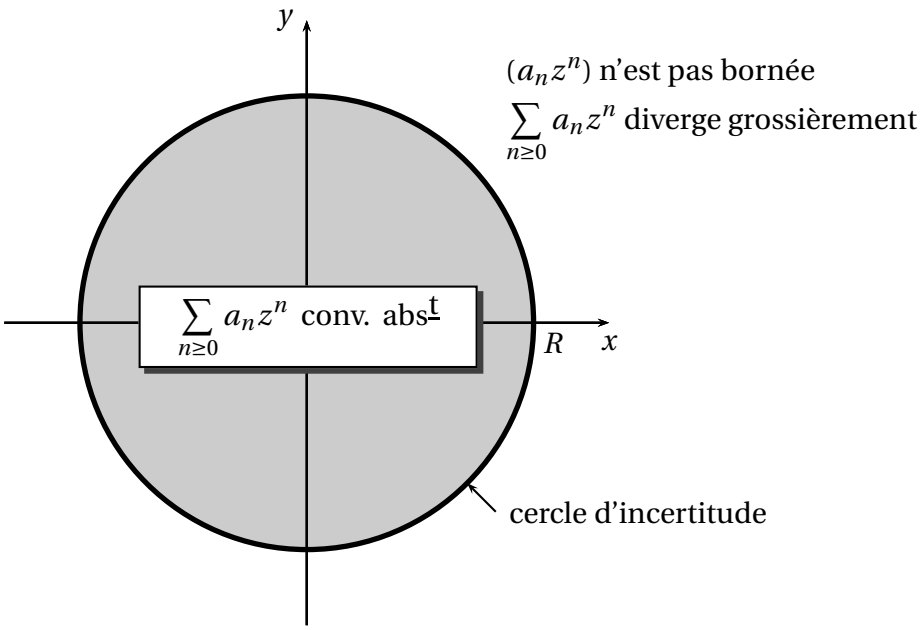
Par convention, si la suite $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $\rho \geq 0$ alors $R = \sup(\mathbb{R}^+) = +\infty$.

✎ ***Exemple.*** Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n$ a pour rayon de convergence 1.

✎ ***Exemple.*** La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

✎ ***Exemple.*** La série entière $\sum_{n\geq 0} n!z^n$ a pour rayon de convergence $R = 0$.

On définit ensuite la notion de disque de convergence, illustrée sur la figure ci-dessous.



Théorème 5 – Disque de convergence

Si R est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$,

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_n$ diverge grossièrement.
3. Pour $|z| = R$, on ne peut rien dire en général.

Le disque ouvert $D(0,R)$ s'appelle le *disque de convergence* de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
Le cercle $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ s'appelle le *cercle d'incertitude* de la série entière.

Les exemples suivants montrent qu'on ne peut rien dire en général sur la convergence en un point du cercle d'incertitude.

✎ ***Exemple.*** $\sum_{n\geq 0} z^n$: $R = 1$ et la série diverge sur le cercle d'incertitude.

✎ ***Exemple.*** $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$: $R = 1$. La série converge pour tout z sur le cercle d'incertitude, sauf pour $z = 1$.

✎ ***Exemple.*** $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$: $R = 1$. La série converge pour tout z sur le cercle d'incertitude.

Si on restreint l'étude d'une série entière à $\mathbb{R}$, elle est alors convergente sur l'intervalle $]-R,R[$, appelé *intervalle de convergence*.

Conséquences importantes du lemme d'Abel.

- La nature de la série entière en un point donne un encadrement du rayon de convergence.
  - ⋆ Si l'on trouve un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge, alors $R \geq |z_0|$.
  - ⋆ Si l'on trouve un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leq |z_0|$.
  - ⋆ Si pour $z_0 \neq 0$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $R = |z_0|$.
- Noter aussi le résultat suivant.
  - ⋆ Si $R > 0$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, alors

$$\forall \rho < R, \quad a_n \rho^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Définition 6 – Somme d'une série entière

On appelle *somme* de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, la fonction

$$\begin{array}{rcl} S : D(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$$

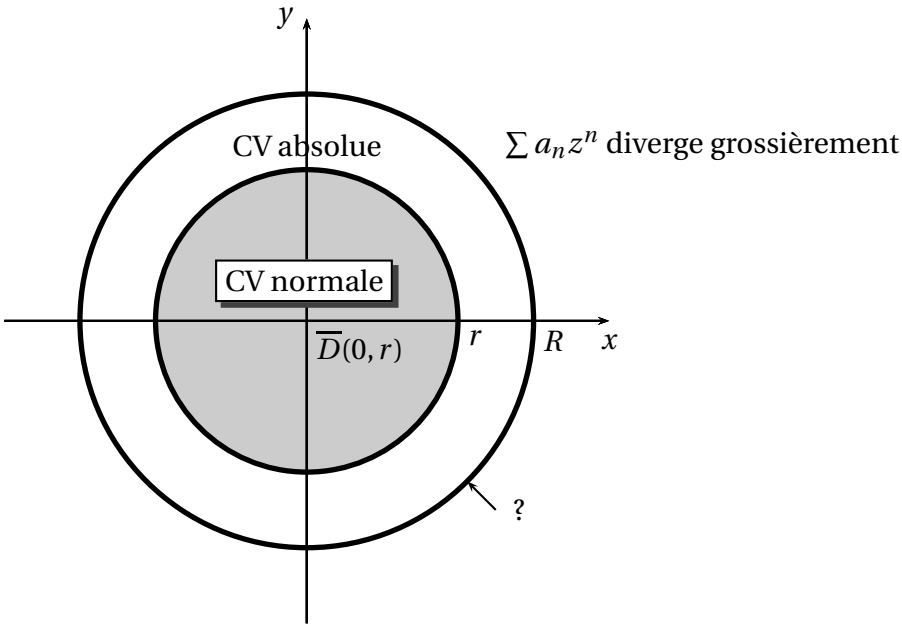
où R est le rayon de convergence.

Le théorème suivant détaille les modes de convergence d'une série entière.

Théorème 7 – Modes de convergence d'une série entière

Soit une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R. Alors, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ (où $f_n(z) = a_n z^n$) :

1. converge *absolument* sur le disque de convergence $D(0,R)$;
2. converge *normalement sur tout disque fermé* $\overline{D(0,r)}$ inclus dans le disque de convergence (ie $r < R$).



⚠ Par contre si R est le rayon de convergence, la série entière ne converge pas normalement sur $\overline{D(0,R)}$ (en général).

Si on restreint à $\mathbb{R}$:

1. la convergence est *absolue* sur *l'intervalle de convergence* $]-R,R[$;
2. la convergence est *normale* sur *tout segment* $[a,b]$ inclus dans l'intervalle de convergence $]-R,R[$;

Par contre, en générale, la série entière ne converge pas normalement sur le segment $[-R,R]$.

Corollaire 8 – Continuité de la somme

Soit une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. La fonction somme S est continue sur le disque ouvert de convergence $D(0,R)$.

1.2 Calcul du rayon de convergence

On peut utiliser une majoration ou une minoration des coefficients.

Théorème 9 – Comparaison des rayons par inégalité

Soient deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ de rayons de convergence R_a et R_b. On suppose que :

- à partir d'un certain rang, $|a_n| \leq |b_n|$.

Alors $R_a \geq R_b$.

On peut utiliser une domination du terme général.

Corollaire 10 – Comparaison des rayons par domination

Soient deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ de rayons de convergence R_a et R_b. On suppose que

- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$.

Alors $R_a \geq R_b$.

On peut utiliser un équivalent du terme général.

Théorème 11 – Utilisation des équivalents

Soient deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ de rayons de convergence R_a et R_b. On suppose que :

- $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$.

Alors $R_a = R_b$.

✎ ***Exemple.*** Rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n+1} z^n$?

On peut aussi utiliser la *règle de d'Alembert*, en s'aidant des faits suivants. On considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\rho > 0$ un réel positif :

- si la série numérique $\sum_{n\geq 0} |a_n| \rho^n$ converge, alors $R \geq \rho$;
- si la série numérique $\sum_{n\geq 0} |a_n| \rho^n$ diverge, alors $R \leq \rho$.

Pour étudier la convergence de la série numérique à termes positifs $\sum_{n\geq 0} |a_n| \rho^n$, on peut utiliser la règle de d'Alembert.

✎ ***Exemple.*** Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n} z^n$ et $\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^n$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha z^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{P(n)}{Q(n)} z^n$ où $P, Q \in \mathbb{C}[X]$.

Plan pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$:

1. Chercher un équivalent plus simple de $|a_n|$. Si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, les séries entières $\sum_{\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{\geq 0} b_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Si la suite (a_n) ne s'annule pas et si a_n est formé de produit, exponentielles, factorielles, essayer la règle de d'Alembert. Si elle ne s'applique pas, on ne peut rien en conclure...
3. Utiliser des majorations-minorations simples de $|a_n|$.

4. Utiliser la définition du rayon de convergence. Pour $\rho > 0$, on étudie les valeurs de ρ pour lesquelles la suite $(a_n\rho^n)$ est bornée.

1.3 Opérations algébriques sur les séries entières

On commence par étudier la somme de deux séries entières.

Définition 12 – Somme de deux séries entières

Soient deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$. On appelle *somme* de ces deux séries entières, la série entière $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$.

On sait calculer le rayon de convergence de la série entière « somme ».

Théorème 13 – Rayon de convergence d'une somme de séries entières

On note R_a et R_b les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ et R_{a+b} le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$. Alors :

1. $\boxed{R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)}$.
2. Si $R_a \neq R_b$, alors $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.
3. $\forall z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

De même, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, la série entière $\sum_{n\geq 0} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$ et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda . a_n + \mu . b_n) z^n = \lambda . \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \mu . \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

On étudie maintenant le produit de deux séries entières.

Définition 14 – Produit de Cauchy de deux séries entières

Soient deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$. On appelle *produit de Cauchy* de ces deux séries entières, la série entière $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}$$

On dispose d'une minoration du rayon de convergence de la série entière « produit ».

Théorème 15 – Rayon de convergence du produit de Cauchy

En notant R_a, R_b et R_{ab} les rayons de convergence des deux séries entières et de leur produit de Cauchy,,

1. $\boxed{R_{ab} \geq \min(R_a, R_b)}$.
2. $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n}$$

✎ ***Exemple.*** Utiliser ce résultat pour démontrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{e}^{2z} = \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^z$$

On peut aussi définir la série entière dérivée.

Définition 16 – Série entière dérivée

Soit une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

On appelle *série entière dérivée*, la série entière $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ ou encore $\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$.

Son rayon de convergence est le même que celui de la série initiale.

Théorème 17 – Rayon de convergence d'une série entière dérivée

En notant R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et R' le rayon de convergence de la série entière dérivée, ces deux séries entières ont même rayon de convergence.

$$\boxed{R = R'}$$

✎ ***Exemple.*** $\sum_{n\geq 0} n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

De même, on définit la série entière primitive.

Définition 18 – Série entière primitive

Soit une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

On appelle *série entière primitive* la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ou encore $\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$.

Son rayon de convergence est lui aussi inchangé.

Théorème 19 – Rayon de convergence d'une série entière primitive

En notant R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\widetilde{R}$ le rayon de convergence de sa série entière primitive,

$$\boxed{R = \widetilde{R}}$$

✎ ***Exemple.*** $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

1.4 Séries entières d'une variable réelle

Définition 20 – Série entière d'une variable réelle

Soit une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note R son rayon de convergence et on suppose $R > 0$. Pour $x \in]-R, R[$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument. On définit alors la fonction d'une variable réelle :

$$f : \begin{array}{ccc}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

On rappelle que $]-R, R[$ est appelé *intervalle de convergence*, et que la série entière converge normalement sur tout segment inclus dans $]-R, R[$.

Théorème 21 – Régularité de f

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$.
2. $\forall x \in]-R, R[$, $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$$

On rappelle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq p} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n z^{n-p}$ est encore égal à R.

On peut calculer les coefficients de la série entière à partir de sa somme f.

Théorème 22 – Expression des coefficients à partir de f

On récupère les coefficients de la série entière à partir des dérivées de f en 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

D'autre part on peut aussi intégrer terme à terme une série entière.

Théorème 23 – Primitive de f

$\forall x \in]-R, R[$, on note F l'unique primitive de f qui s'annule en 0 et on a l'expression de F comme somme d'une série :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

✎ ***Exemple.*** Pour tout $x \in]-1, 1[$: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

2 Fonctions développables en série entière

2.1 Définitions

On définit la notion de fonction développable en série entière (DSE) en 0.

Définition 24 – Fonction DSE en 0

Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction d'une variable réelle $f : V \mapsto \mathbb{C}$.
On dit que la fonction f est *développable en série entière* (DSE) à l'origine s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ *non-nul* et $0 < r < R$ tel que :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque. Si f est définie sur un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit que f est DSE au voisinage de x_0 lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non-nul $R > 0$ et $0 < r < R$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Cela revient à dire que la fonction translatée $g(x) = f(x_0 + x)$ est DSE au voisinage de 0.

Théorème 25 – Unicité du DSE

Soit f une fonction développable en série entière sur un voisinage $]-r, r[$ de 0 :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Alors :

1. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$.

2. $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$
3. Si $\forall x \in]-r, r[$,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$
alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Ne pas dire « par identification » mais « par unicité des coefficients du DSE ».

On en déduit que les développements en série entière des fonctions paires ou impaires sont des séries lacunaires.

Corollaire 26 – Utilisation de la parité

Soit une fonction f DSE sur un voisinage $]-r, r[$ de 0 :
$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Si f est paire, alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$.
2. Si f est impaire, alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$.

La série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ est appelée *série de Taylor* de f.

⚠ Si cette série converge ce n'est pas nécessairement vers f.

⚠ Si f est DSE en 0 alors elle est égale à la somme de sa série de Taylor sur un intervalle $]-r, r[$.
Si on note R le rayon de convergence de sa série de Taylor, on a donc $r \leq R$.
Sur $]-R, R[$, la série de Taylor peut converger vers une autre fonction que f...

⚠ Même si f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, sa série de Taylor peut avoir un rayon de convergence nul.
En effet, une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ peut ne pas être DSE en 0.

On peut effectuer les opérations suivantes sur les fonctions DSE en 0.

Théorème 27 – Opérations sur les DSE

Soient deux fonctions f, g DSE au voisinage de 0 : il existe $r > 0$ et deux séries entières telles que
$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

1. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est DSE et
$$\forall x \in]-r, r[, \quad (\lambda f + \mu g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$$

2. La fonction fg est DSE et

$$\forall x \in]-r,r[, \quad (fg)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) x^n$$

3. Les dérivées successives de f sont DSE et

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}$$

4. Les primitives successives de f qui s'annulent en 0 sont DSE

$$\forall x \in]-r,r[, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

⚠ Bien noter qu'à chaque fois le rayon de convergence est au moins r.

2.2 DSE usuels

Théorème 28 – Condition nécessaire de DSE en 0

Soit $f :]-\alpha,\alpha[\mapsto \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. On dispose de la formule de Taylor en 0 avec reste intégral :

$$\forall x \in]-\alpha,\alpha[, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

où $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.
Alors f est DSE en 0 si, et seulement si, il existe $0 < r < \alpha$ tel que

$$\forall x \in]-r,r[, \quad R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit les DSE suivants.

$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$	$R = 1$	$I =]-1,1[$
$\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \dots$	$R = 1$	$I =]-1,1[$
$\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$	$R = 1$	$I =]-1,1[$
$\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$	$R = 1$	$I =]-1,1[$
$\dfrac{1}{(1-x)^k} = \displaystyle\sum_{n=k-1}^{+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!} x^{n-k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$	$R = 1$	$I =]-1,1[$
$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$	$R = 1$	$I =]-1,1[$
$\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$	$R = 1$	$I =]-1,1[$

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$	$R = \infty$	$I = \mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$R = \infty$	$I = \mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$R = \infty$	$I = \mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$	$R = \infty$	$I = \mathbb{R}$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$	$R = \infty$	$I = \mathbb{R}$
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots$	$R = 1$	$I =]-1, 1[$

3 Applications des séries entières

3.1 DSE d'une fonction

Pour trouver le DSE d'une fonction f donnée :

- Utiliser des combinaisons linéaires, produit de DSE usuels ;
- Par dérivation, intégration de DSE usuels ;
- En cherchant une équation différentielle (fonctionnelle) vérifiée par f.

✎ ***Exemple.*** Développer en série entière au voisinage de 0 : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $g(x) = \arcsin(x)$, et $h(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

3.2 Régularité d'une fonction

Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3.3 Équations différentielles

<u>Méthode.</u>

- Trouver une équation différentielle vérifiée par f ;
- On suppose qu'il existe une solution DSE de cette équation différentielle sur $]-R, R[$: $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
  Trouver une relation de récurrence sur les coefficients a_n et les calculer.
- Chercher le rayon de convergence de la série entière g et montrer que $R > 0$.
- Justifier que $g = f$ en utilisant que l'équation différentielle avec condition(s) initiale(s) possède une unique solution sur $]-R, R[$.

✎ ***Exemple.*** On note $f(x) = \arcsin^2(x)$. Trouver une relation simple entre f'' et f', puis développer f en série entière au voisinage de 0.

3.4 Calcul de la somme d'une série entière

✎ ***Exemple.*** Calculer la somme de la série entière

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - 2n + 5)x^n$$

✎ ***Exemple.*** Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$.

3.5 Suites récurrentes, dénombrement

Définition 29 – Série génératrice

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on appelle *série génératrice de la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

On suppose que cette série a un rayon de convergence $R > 0$, que la valeur des a_n est inconnue mais qu'une relation de récurrence a permis de la somme de la série $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Alors on en déduit la valeur des a_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

✎ ***Exemple.*** On note a_n le nombre d'arbres binaires à n noeuds. Montrer que $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}$$

Calculer ensuite a_n.

3.6 Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète à valeurs entières

Dans tout le paragraphe, X est une variable aléatoire discrète *presque sûrement à valeurs dans* $\mathbb{N}$, ie $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$ $\mathbb{P}$-p.s..

Définition 30 – Fonction génératrice

Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit sa *fonction génératrice* G_X par :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\, t^n$$

C'est donc la série génératrice associée à la suite $\big(\mathbb{P}(X=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

G_X est la somme d'une série entière ; on notera R_X son rayon de convergence.

Théorème 31 – Rayon de convergence de G_X et convergence normale

On a :
- $R_X \geq 1$,• la série définissant G_X converge normalement sur l'intervalle fermé $[-1,1]$,

- G_x est définie et continue au moins sur l'intervalle fermé $[-1,1]$,
- G_x est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 32 – La fonction génératrice caractérise la loi

La fonction G_X donne la loi de X :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X=n)=\frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Donc deux variables aléatoires discrètes à valeurs p.s. dans $\mathbb{N}$ qui ont la même fonction génératrice, ont aussi la même loi.

Le théorème de transfert donne une interprétation de la fonction génératrice.

Théorème 33 – Fonction génératrice et théorème de transfert

Pour tout $s\in\mathbb{R}$, $G_X(t)$ est défini si, et seulement si, $\mathbb{E}\big(t^X\big)$ existe.
Dans ce cas, on a $G_X(t)=\mathbb{E}\big(t^X\big)$.

<u>Cas d'une variable aléatoire discrète finie</u>. S'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que X est à valeurs dans $[0,N]$ alors G_X est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et le rayon de convergence R_X est égal à $+\infty$:

$$\forall s\in\mathbb{R},\quad G_X(t)=\sum_{n=0}^{N}\mathbb{P}(X=n)t^n$$

Il faut connaître les exemples suivants.

✎ ***Exemple.*** Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$: $R_X=+\infty$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $G_X(t)=1-p+pt$.

✎ ***Exemple.*** Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$: $R_X=+\infty$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $G_X(t)=(1-p+pt)^n$.

✎ ***Exemple.*** Si $X\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$: $R_X=\dfrac{1}{1-p}$ et $\forall t\in\left]-\dfrac{1}{1-p},\dfrac{1}{1-p}\right[$, $G_X(t)=\dfrac{pt}{1-(1-p)t}$.

✎ ***Exemple.*** Si $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$: $R_X=+\infty$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $G_X(t)=\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

Une première application des fonctions génératrices sera le calcul des moments. En effet, G_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R_X, R_x[$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in]-R_x, R_x[, \quad G_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)t^{n-k}.\mathbb{P}(X=n)$$

et donc d'après le théorème de transfert :

$$G_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}\Big(X(X-1)\dots(X-k+1)t^{X-k}\Big)$$

Si $R_X > 1$ on peut évaluer cette expression en $t = 1$ et obtenir :

$$G_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}\Big(X(X-1)\dots(X-k+1)\Big) \quad \text{(appelés moments factorielles de } X\text{)}$$

Les théorèmes suivants donnent une condition plus générale que la condition $R_X > 1$.

Théorème 34 – Fonction génératrice et espérance

On a équivalence de :

(i) X a une espérance ;

(ii) G_X est dérivable à gauche en 1 ie $\lim\limits_{t\to 1^-} \dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t-1}$ existe.

Dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$$

Théorème 35 – Fonction génératrice et variance

On a équivalence de :

(i) X a un moment d'ordre 2 ;

(ii) G_X est deux fois dérivable à gauche en 1.

Dans ce cas :

$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \Big(G_X'(1)\Big)^2$$

Ces deux conditions sont bien sûr vérifiées si $R_X > 1$.

✎ ***Exemple.*** Retrouver l'espérance et la variance des lois usuelles.

4 Exemples de séries entières d'une variable complexe

Théorème 36 – Série géométrique complexe

La série $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ a rayon de convergence égal à 1, ie qu'elle converge (au moins) pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, et :

$$\forall z \in D(0,1), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Rappelons aussi que si $z \in D(0,1)$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}$$

Rappelons la définition de la fonction exponentielle complexe.

Définition 37 – Exponentielle complexe

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathscr{R}e(z)} \times \left[\cos\left(\mathscr{I}m(z)\right) + i.\sin\left(\mathscr{I}m(z)\right)\right]$$

Cette fonction est développable en série entière en tout point de $\mathbb{C}$.

Théorème 38 – Série exponentielle complexe

La série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$, ie qu'elle converge tout $z \in \mathbb{C}$, et :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$$

5 Exercices

Calcul du rayon de convergence

Exercice 1 – Calculs de rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^{n^2}$;
2. $\sum_{n\geq 2} a_n z^n$ où $a_n = \ln \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$;
3. $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ où $a_n = \frac{5 + (\sin n)^n}{2 - \cos n}$.
4. $\sum_{n\geq 0} E(e^n) z^n$;
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{n! n^n} z^{2n}$;
6. $\sum_{n\geq 1} n! z^{n^2}$;
7. $\sum_{n\geq 1} \ln(n).z^n$.

Exercice 2 – Calculs de rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} d(n) z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} s(n) z^n$$

où $d(n)$ et $s(n)$ désignent respectivement le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de l'entier n et la somme de ceux-ci.

Exercice 3 – Séries entières lacunaires

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^{2n}$ et $\sum_{n\geq 0} a_n z^{2n+1}$.

Exercice 4 – Critère de Cauchy

On suppose que $\sqrt[n]{|a_n|} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Étude au bord

Exercice 5 – Continuité au bord de l'intervalle de convergence

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R et on pose pour $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On suppose que $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ converge *absolument*.

Montrer que $f(x) \underset{x\to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

Exercice 6 – Continuité au bord de l'intervalle de convergence

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 0$$

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et on suppose que la fonction S est bornée.

a) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.

b) Montrer que

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Exercice 7 – Équivalent au bord de l'intervalle de convergence

Soit g la fonction définie par $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n) x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Donner un équivalent de $g(x)$ au voisinage de 1.
   Considérer $(1-x)g(x)$.

Développements en série entière

Exercice 8 – Calculs de sommes de séries numériques

Convergence et calcul de la somme des séries :

1. $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$
2. $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)2^n}$
3. $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$

Exercice 9 – Calculs de sommes de séries entières

1. Rayon de convergence et calcul de la somme :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2+1)}{n!} x^n$$

2. Rayon de convergence et calcul de la somme de la série entière : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$

Exercice 10 – Développements en série entière

1. Développer en série entière $f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x^3-5x^2+8x-4}$.
2. Développer en série entière $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ au voisinage de 0.

Exercice 11 – Avec une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \ : y' - 2xy = 1$$

1. Montrer qu'il existe une solution de (E) développable en série entière et vérifiant $y(0) = 0$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Exercice 12 – Calculs de sommes de séries numériques et continuité sur le bord

Calculer en utilisant les DSE les sommes des séries numériques :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n+1}$.

Intégration termes à termes de séries entières

Exercice 13 – Calcul d'une intégrale

Montrer

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Exercice 14 – Calcul d'une intégrale

Etablir l'identité

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)^2}$$

Dénombrements et variables aléatoires

Exercice 15 – Nombre de dérangements

On note $N(n,p)$ le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ qui ont exactement p points fixes. On pose en particulier $D(n) = N(n,0)$, puis

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!}x^n$$

1. Vérifier que $N(n,p) = \binom{n}{p}D(n-p)$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} N(n,p) = n!$.
2. Justifier la définition de f sur $]-1,1[$ puis calculer f en faisant apparaître un produit de Cauchy.
3. Calculer $N(n,p)$.

4. Etudier la limite de $\left(\frac{1}{n!}N(n,p)\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 16 – Nombre d'involutions

Si $n \geqslant 1$, soit I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$. On convient : $I_0 = 1$.

1. Montrer, si $n \geqslant 2$, que
$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$$
2. Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{I_n}{n!}x^n$ converge si $x \in]-1,1[$.
On note $S(x)$ sa somme.
3. Montrer, pour $x \in]-1,1[$, que
$$S'(x) = (1+x)S(x)$$
4. En déduire une expression de $S(x)$ puis une expression de I_n.

Exercice 17 – Transformée de Laplace et inégalités exponentielles

Si X est une variable aléatoire réelle, on appelle transformée de Laplace de X (ou fonction génératrice des moments) la fonction $\mathscr{L}_X$ définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathscr{L}_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = G_X\left(\mathrm{e}^t\right)$$

1. (a) Montrer que $\mathscr{L}_X$ est toujours définie en 0.
   (b) Calculer $\mathscr{L}_X$ dans les cas suivants :
$$X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1,n]\!]\right), \qquad X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p), \qquad X \hookrightarrow \mathscr{G}(p), \qquad X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$$
   On précisera à chaque fois son ensemble de définition
2. Montrer que si X est une variable aléatoire réelle et $t > 0$ tel que e^{tX} admet une espérance, alors :
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathrm{e}^{-ta}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

Chapitre 16

Endomorphismes des espaces euclidiens

Sommaire

1 Endomorphismes orthogonaux, matrices orthogonales 386

1.1 Endomorphismes ortohogonaux 386

1.2 Matrices orthogonales 388

1.3 Groupe spécial orthogonal 389

2 Groupe orthogonal en dimension 2 et 3 390

2.1 Orientation d'un espace euclidien 390

2.2 Isométries vectorielles d'un plan euclidien 394

2.3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3 396

3 Endomorphismes symétriques 398

4 Exercices 401

On se donne un espace euclidien $(\mathbb{E}, \langle .,. \rangle)$ de dimension $n \geq 1$, et on note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

1 Endomorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

1.1 Endomorphismes ortohogonaux

Définition 1 – Endomorphismes orthogonaux

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$. On dit que u est un *endomorphisme orthogonal* (ou une *isométrie vectorielle*) si

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{E}^2, \quad \|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$$

En particulier u conserve les distances : $\|u(\vec{x}) - u(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

On note $O(\mathbb{E})$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de $\mathbb{E}$.

Théorème 2 – Le groupe orthogonal est un sous-groupe du groupe linéaire

1. Si $u \in O(\mathbb{E})$ alors $u \in Gl(\mathbb{E})$, ie qu'un endomorphisme *orthogonal* est un *automorphisme* ;
2. si $u, v \in O(\mathbb{E})$ alors $u \circ v \in O(\mathbb{E})$;
3. si $u \in O(\mathbb{E})$, alors $u^{-1} \in O(\mathbb{E})$.
4. $\mathrm{id}_{\mathbb{E}} \in O(\mathbb{E})$.

⚠ En général $u + v \notin O(\mathbb{E})$ et $\lambda.u \notin O(\mathbb{E})$ $(\lambda \in \mathbb{K})$. De plus $0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})} \notin O(\mathbb{E})$.

Parfois on utilise le vocabulaire *automorphisme orthogonal* à la place d'endomorphisme orthogonal.

Théorème 3 – Un endomorphisme est orthogonal ssi il conserve le produit scalaire

Pour $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$:

$$u \in O(\mathbb{E}) \iff \forall (x, y) \in \mathbb{E}^2, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

✎ ***Exemple.*** Une symétrie vectorielle $s \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ est dite *orthogonale* lorsqu'elle est associée à une somme directe orthogonale $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^{\perp}$. s est en particulier une endomorphisme orthogonal : $s \in O(\mathbb{E})$.

⚠ Une projecteur $p \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ est dite *orthogonal* lorsqu'il est associée à une somme directe orthogonale $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^{\perp}$. Mais $p \notin O(\mathbb{E})$, sauf dans le cas particulier $p = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.

On dispose aussi d'une autre caractérisation des éléments de $O(\mathbb{E})$.

Théorème 4 – Image d'une bon par un endomorphisme orthogonal

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, et $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base orthonormale.
Alors : $u \in O(\mathbb{E})$ si et seulement si $u(\mathscr{B}) = \left(u(\overrightarrow{e_1}), \dots, u(\overrightarrow{e_n})\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{E}$.
Autrement dit : un endomorphisme est orthogonal si, et seulement si, il transforme une base orthonormale en une base orthonormale. Cette propriété est alors vraie pour toutes les bases orthonormales.

Pour un endomorphisme orthogonal, l'orthogonal d'un sev stable est encore stable.

Théorème 5 – Stabilité de l'orthogonal d'un sev stable

Si $u \in O(\mathbb{E})$ et $\mathbb{F}$ sev de $\mathbb{E}$ stable par u, alors $\mathbb{F}^\perp$ est aussi stable par u.
Donc un base adaptée à la somme directe $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^\perp$, la matrice représentative de u est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

où $A_1 \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ et $A_2 \in \mathscr{M}_{n-k}(\mathbb{R})$, $k = \dim(\mathbb{F})$.

La démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 6 – Image d'un sev stable par $u \in Gl(\mathbb{E})$

Si $u \in Gl(\mathbb{E})$ et $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ stable par u, alors $u(\mathbb{F}) = \mathbb{F}$.

Au niveau des éléments propres on a le résultat suivant.

Théorème 7 – Spectre d'un endomorphisme orthogonal

Si $u \in O(\mathbb{E})$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subseteq \{-1; 1\}$.

Un endomorphisme orthogonal u est donc *diagonalisable* si, et seulement si :

$$\dim\left(\ker(u - \mathrm{id}_{\mathbb{E}})\right) + \dim\left(\ker(u - \mathrm{id}_{\mathbb{E}})\right) = \dim(\mathbb{E})$$

et dans ce cas u est représenté par une matrice diagonale de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix}$$

et on en déduit que u est diagonalisable si, et seulement si, u est une symétrie vectorielle.

Remarquer aussi que, comme les sev $\ker(u - \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$ et $\ker(u + \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$ sont stables par u (propriété des polynômes en u), leurs orthogonaux sont eux aussi stables par u.

1.2 Matrices orthogonales

Définition 8 – Matrices orthogonales

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale* si et seulement si ${}^tAA = I_n$.

On note :

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$$

l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n. Cet ensemble est aussi noté $O(n)$.

Théorème 9 – Le groupe orthogonal est un sous-groupe du groupe linéaire

1. Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors $u \in Gl_n(\mathbb{R})$, ie qu'une matrice *orthogonale* est *inversible*. De plus $A^{-1} = {}^tA$.
2. Si $A, B \in O_n(\mathbb{R})$ alors $AB \in O_n(\mathbb{R})$.
3. Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.
4. $I_n \in O_n(\mathbb{R})$.
5. Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tA \in O_n(\mathbb{R})$.

⚠ En général $A + B \notin O_n(\mathbb{R})$ et $\lambda.A \notin O_n(\mathbb{R})$ $(\lambda \in \mathbb{K})$. De plus $0_n \notin O_n(\mathbb{R})$.

On peut aussi remarquer que $A \in O_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, ${}^tA \in O_n(\mathbb{R})$.
Dans ce cas $\left({}^tA\right)^{-1} = A$.

Théorème 10 – Caractérisation pratique des matrices orthogonales

Une matrice A est orthogonale si et seulement si ses vecteurs *colonnes* forment une base orthonormale pour le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.

⚠ La terminologie est trompeuse : la matrice est *orthogonale* ssi ses colonnes forment une base *orthonormale*.

✎ ***Exemple.*** $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ est orthogonale : $M \in O_3(\mathbb{R})$.

✎ ***Exemple.*** Soit $A = ((a_{ij})) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$.

Théorème 11 – Caractérisation pratique des matrices orthogonales

Une matrice A est orthogonale si et seulement si ses vecteurs *lignes* forment une base orthonormale pour le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.

Le théorème suivant relie les endomorphismes orthogonaux et les matrices orthogonales.

Théorème 12 – Caractérisation matricielle des endomorphismes orthogonaux

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, ε une base orthonormale de $\mathbb{E}$ et $A = \mathrm{Mat}_\varepsilon(u)$. Alors :

$$u \in O(\mathbb{E}) \iff A \in O_n(\mathbb{R})$$

On en déduit le théorème suivant qui caractérise les changements de base orthonormale.

Théorème 13 – Changement de base orthonormale

Soit ε une base orthonormale et $\mathscr{B}$ une base de E. On note $P = P_{\varepsilon \to \mathscr{B}}$ la matrice de passage. Alors

$$\mathscr{B} \text{ est une bon } \iff P \in O_n(\mathbb{R})$$

En particulier, si P est une matrice de passage entre deux bases orthonormales, $P^{-1} = {}^tP$.

Une matrice orthogonale peut donc être vue comme une matrice de passage entre deux bases orthonormales de $\mathbb{E}$.

Au niveau des éléments propres on a les mêmes résultats que pour les endomorphismes orthogonaux. En particulier, notons le résultat suivant.

Théorème 14 – Spectre d'une matrice orthogonale

Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq \{-1; 1\}$.

1.3 Groupe spécial orthogonal

Théorème 15 – Déterminant d'une matrice orthogonale

Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A) = \pm 1$.

On note alors :

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = +1\}$$

Cet ensemble est appelé *groupe spécial orthogonal d'ordre n*. On le note aussi $SO(n)$.

Théorème 16 – Propriétés du groupe spécial orthogonal

1. $I_n \in SO_n(\mathbb{R})$.
2. Si $A, B \in SO_n(\mathbb{R})$, alors $AB \in SO_n(\mathbb{R})$.
3. Si $A \in SO_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$.

On a les mêmes résultats pour les endomorphismes orthogonaux.

Théorème 17 – Déterminant d'une endomorphisme orthogonal

Si $u \in O(\mathbb{E})$, alors $\det(u) = \pm 1$.

On note alors :

$$SO(\mathbb{E}) = \{u \in O(\mathbb{E}) \mid \det(u) = +1\}$$

Cet ensemble est appelé *groupe des automorphismes orthogonaux directs de* $\mathbb{E}$, ou encore *groupe des isométries vectorielles directes de* $\mathbb{E}$.

Théorème 18 – Propriétés du groupe spécial orthogonal

1. $\mathrm{id}_{\mathbb{E}} \in SO(\mathbb{E})$.
2. Si $u, v \in SO(\mathbb{E})$, alors $u \circ v \in SO(\mathbb{E})$.
3. Si $u \in SO(\mathbb{E})$, alors $u^{-1} \in SO(\mathbb{E})$.

2 Groupe orthogonal en dimension 2 et 3

2.1 Orientation d'un espace euclidien

Définition 19 – Bases de même orientation

Soient $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ et $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e'_n})$ deux bases d'un espace euclidien $\mathbb{E}$. On dit qu'elles ont *même orientation* lorsque $\det\left(P_{\mathscr{B} \mapsto \mathscr{B}'}\right) > 0$.
Si $\det\left(P_{\mathscr{B} \mapsto \mathscr{B}'}\right) < 0$, on dit qu'elle sont *d'orientation inverse*.

Rappelons à toute fin utile que si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de $\mathbb{E}$ alors $\det\left(P_{\mathscr{B} \mapsto \mathscr{B}'}\right) \neq 0$.

Théorème 20 – Cas des bases orthonormales

Soient $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ et $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e'_1}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$ deux bases orthonormales d'un même espace euclidien $\mathbb{E}$.
On a équivalence de :

(i) $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ définissent la même orientation ;
(ii) $P_{\mathscr{B} \mapsto \mathscr{B}'} \in SO_n(\mathbb{R})$;
(iii) $\det\left(P_{\mathscr{B} \mapsto \mathscr{B}'}\right) = 1$.

Elles définissent une orientation inverse si, et seulement si, $P_{\mathscr{B} \mapsto \mathscr{B}'} \in O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$, si, et seulement si, $\det\left(P_{\mathscr{B} \mapsto \mathscr{B}'}\right) = -1$.

Définition 21 – Orientation d'une espace euclidien

Orienter un espace euclidien $\mathbb{E}$, c'est choisir une base orthonormale de référence $\mathscr{B}_0$.
On dit alors qu'une base orthonormale $\mathscr{B}$ est *directe* lorsqu'elle définit la même orientation que $\mathscr{B}_0$, et *indirecte* dans le cas contraire.

Définition 22 – Orientation canonique de $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique :

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

La base canonique $\mathscr{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour ce produit scalaire.
On oriente alors $\mathbb{R}^n$ en choisissant pour référence la base canonique : une base orthonormale $\mathscr{B}$ est *directe* si $\det\left(P_{\mathscr{B}_c \mapsto \mathscr{B}}\right) = 1$, et *indirecte* si $\det\left(P_{\mathscr{B}_c \mapsto \mathscr{B}}\right) = -1$.

Noter que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est en particulier une base orthonormale directe.

On est maintenant en mesure de définir le *produit mixte* d'une famille de n vecteurs.

Théorème 23 – Invariance du déterminant dans une base orthonormale directe

Soit $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right)$ est une famille de n vecteurs d'un espace euclidien $\mathbb{E}$, avec $n = \dim(\mathbb{E})$.
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormales direcetes de $\mathbb{E}$.
Alors $\det\left(\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F})\right) = \det\left(\underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F})\right)$.
Autrement dit, le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base orthonormale directe ne dépend pas du choix de cette base orthonormale directe.

Définition 24 – Produit mixte d'une famille de n vecteurs

Si $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right)$ est une famille de n vecteurs d'un espace euclidien $\mathbb{E}$, avec $n = \dim(\mathbb{E})$, on appelle produit mixte de la famille $\mathscr{F}$ le réel $\det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, où $\mathscr{B}$ est n'importe quelle base orthonormale directe de $\mathbb{E}$.
On le note $\left[\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right]$.

Il est clair que $\left[\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right] \neq 0$ si, et seulement si, $\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, si, et seulement si, $\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right)$ est libre.

En particuliers dans $\mathbb{R}^2$, on peut définir le produit mixte de deux vecteurs $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y')$:

$$\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right] = \det\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = xy' - x'y$$

Dans $\mathbb{R}^3$, on peut définir le produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$ et

$\vec{w} = (x'', y'', z'')$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z$$

Ces formules reposent sur le fait que dans $\mathbb{R}^n$ les *coordonnées* d'un vecteur dans la *base canonique* sont égales à ses *composantes*.

Interprétation géométrique :

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ alors $[\vec{u}, \vec{v}]$ est égal à l'aire algébrique du parallélogramme de côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

• Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ alors $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est égal au volume algébrique du parallépipède de côtés $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, l'application $\vec{w} \longmapsto [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. D'après le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien, il existe un unique vecteur $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle$$

Définition 25 – Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

✎ ***Exemple.*** Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormale directe, alors $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ et $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$.

Donnons les premières propriétés du produit vectoriel.

Théorème 26 – Propriétés du produit vectoriel

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}}$.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
3. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et non nuls, alors la famille
$$\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|} . \vec{u}, \frac{1}{\|\vec{v}\|} . \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} . \vec{u} \wedge \vec{v} \right)$$
est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.
4. Si la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est orthonormée, alors la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ l'est aussi, et elle est orientée dans le sens direct.

On peut remarquer que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est toujours orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ (car le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs).

Donnons ensuite les règles de calcul.

Théorème 27 – Règles de calcul du produit vectoriel

Soient $\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. **Bilinéarité.**

$$\left(\vec{u_1} + \lambda.\vec{u_2}\right) \wedge \vec{v} = \vec{u_1} \wedge \vec{v} + \lambda.\vec{u_2} \wedge \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{u} \wedge \left(\vec{v_1} + \lambda.\vec{v_2}\right) = \vec{u} \wedge \vec{v}_1 + \lambda.\vec{u} \wedge \vec{v}_2$$

2. **Antisymétrie.** $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

✎ ***Exemple.*** Si $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right)$ est une base orthonormale directe, alors $\vec{e_2} \wedge \vec{e_1} = -\vec{e_3}$.

⚠ Le produit vectoriel n'est *pas associatif* : $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)$ en général.
Si $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $\left(\vec{i} \wedge \vec{i}\right) \wedge \vec{k} = \vec{0} \neq \vec{i} \wedge \left(\vec{i} \wedge \vec{k}\right) = -\vec{k}$.

Terminons par la formule analytique de calcul du produit vectoriel dans une base orthonormale directe.

Théorème 28 – Calcul du produit vectoriel dans une base orthonormale directe

Si $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right)$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$ et si :

$$\vec{u} = x.\vec{e_1} + y.\vec{e_2} + z.\vec{e_3}, \quad \text{et} \quad \vec{v} = x'.\vec{e_1} + y'.\vec{e_2} + z'.\vec{e_3}$$

alors :

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (yz' - y'z).\vec{e_1} + (zx' - z'x).\vec{e_2} + (xy' - x'y).\vec{e_3} \\ &= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}.\vec{e_1} + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}.\vec{e_2} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}.\vec{e_3} \end{aligned}$$

Remarque importante. Tout ce qui a été dit dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ se généralise de manière immédiate à un espace euclidien de dimension 2 ou 3.

Dans la fin du paragraphe, $\mathbb{E}$ est un espace euclidien de dimension 3.

Définition 29 – Orientation d'une droite

Soit D une droite de $\mathbb{E}$.
Orienter D c'est choisir un vecteur $\vec{u}$ non nul de D.
On dit alors qu'un vecteur $\vec{u'}$ non nul de D définit la même orientation lorsque :

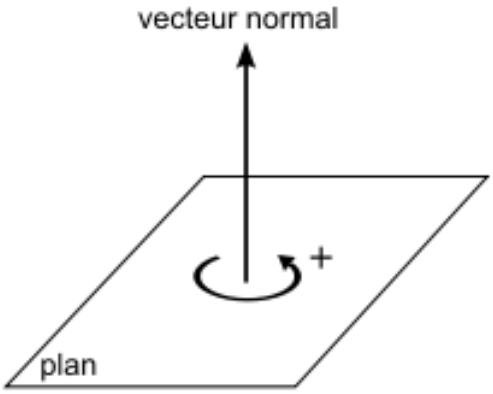
$$\left\langle \vec{u}, \vec{u'} \right\rangle > 0$$

Une droite orientée correspond à la notion intuitive d'axe.

Définition 30 – Orientation d'un plan

Soit P un plan de $\mathbb{E}$.
Orienter P c'est choisir deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de P.
On dit alors que deux vecteurs $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ non nuls de P définissent la même orientation lorsque $\left\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u'} \wedge \vec{v'} \right\rangle > 0$.

Le choix d'une orientation d'un plan revient donc à choisir un vecteur normal de référence.



2.2 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Nous allons décrire les groupes $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$.

Théorème 31 – Groupe spécial orthogonal en dimension 2

1. $SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \,;\theta \in \mathbb{R}\}$ où
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
2. $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} \times R_\theta$.
Donc les éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent (on dit que le groupe est commutatif).
3. $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

R_θ est appelé *matrice de rotation plane*, et $SO_2(\mathbb{R})$ est appelé *groupe des matrices des rotations planes*.

✎ ***Exemple.*** $R_0 = I_2$, $R_{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $R_\pi = -I_2$ sont des éléments de $SO_2(\mathbb{R})$.

Théorème 32 – Groupe orthogonal en dimension 2

1. $O_2(\mathbb{R})\setminus SO_2(\mathbb{R}) = \{A_\theta\ ;\theta\in\mathbb{R}\}$ où

$$A_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

   Ce sont les matrices de symétries orthogonales par rapport à une droite.
2. On a donc $O_2(\mathbb{R}) = \{A_\theta\ ;\theta\in\mathbb{R}\}\bigcup\{R_\theta\ ;\theta\in\mathbb{R}\}$.

⚠ Les éléments de $O_2(\mathbb{R})$ ne commutent pas.

Si $\mathbb{E}$ est un plan euclidien orienté (par exemple $\mathbb{R}^2$), on appelle rotation les éléments de $SO(\mathbb{E})$, c'est-à-dire les isométries vectorielles directes de $\mathbb{E}$.

Théorème 33 – Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté

Si $u\in SO(\mathbb{E})$, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que, dans *toute base orthonormale directe* de E, la matrice représentative de u est R_θ.
Un tel θ est unique modulo 2π, c'est-à-dire que si $R_\theta = R'_\theta$ alors $\theta = \theta'[2\pi]$.

Il est remarquable que, dans le cadre d'un plan euclidien orienté, la matrice d'une isométrie vectorielle directe est *la même dans toutes les bases orthonormales directes.*

Définition 34 – Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté

Si $u\in SO(\mathbb{E})$, on appelle *mesure de l'angle* de la rotation u tout réel $\theta\in\mathbb{R}$ tel que R_θ représente u dans une base orthonormale directe.
Sauf précision contraire, on impose $\theta\in]-\pi,\pi]$.

Si $\overrightarrow{x} = a.\overrightarrow{e_1} + b.\overrightarrow{e_2}$ dans une base orthonormale directe $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, alors :

$$u\left(\overrightarrow{x}\right) = \left(\cos(\theta)a - \sin(\theta)b\right).\overrightarrow{e_1} + \left(\sin(\theta)a + \cos(\theta)b\right).\overrightarrow{e_2}$$

Si on utilise les nombres complexes : $x = a + ib$ devient $u(x) = \mathrm{e}^{i\theta}x$. On retrouve *l'écriture complexe d'une rotation plane.*

On remarque que $\mathrm{Tr}(u) = 2\cos(\theta)$. On en déduit facilement $|\theta|$.

Théorème 35 – Composée de deux rotations planes

Si u est une rotation d'angle θ et v une rotation d'angle θ', alors $u\circ v = v\circ u$ est une rotation d'angle $\theta+\theta'$.
De plus la bijection réciproque de u, notée u^{-1} est la rotation d'angle $-\theta$.

Pour classifier les isométries vectorielles, on utilise la description de $O_2(\mathbb{R})$.

Théorème 36 – Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien orienté

Soit $u \in O(\mathbb{E})$ où $\dim(\mathbb{E}) = 2$.

1. Si $u \in SO(\mathbb{E})$, alors u est une rotation plane d'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$.
   - si $\theta = 0$, $u = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ donc $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$ et $\mathbb{E}_1(u) = \mathbb{E}$.
   - si $\theta = \pi$, $u = -\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ donc $\mathrm{Sp}(u) = \{-1\}$ et $\mathbb{E}_{-1}(u) = \mathbb{E}$.
   - dans les autres cas, $\mathrm{Sp}(u) = \emptyset$.
2. Si $u \in O(\mathbb{E}) \setminus SO(\mathbb{E})$, alors u est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. On a $\mathrm{Sp} - u) = \{-1; 1\}$ et $\dim \ker(u - \mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = \dim \ker(u + \mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = 1$.

✎ ***Exemple.*** $u \in O(\mathbb{R}^2)$ est diagonalisable si, et seulement si, u est une symétrie orthogonale (ce qui inclut les cas $u = \pm \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$).

2.3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3

Théorème 37 – Classification des isométries vectorielles directes en dimension 3

Soit $\mathbb{E}$ un espace euclidien de dimension 3 et $u \in SO(\mathbb{E})$ une isométrie vectorielle directe.

1. $\mathrm{Sp}(u) \subseteq \{-1, 1\}$.
2. $1 \in \mathrm{Sp}(u)$.
3. $\mathbb{E}_1(u)^{\perp}$ est stable par u.
4. Si $u \neq \mathrm{id}_E$, $\dim \mathbb{E}_1(u) = 1$: $\mathbb{E}_1(u) = \mathrm{Vect}\left(\vec{d}\right)$ et $P = \mathrm{Vect}\left(\vec{d}\right)^{\perp}$ est un plan vectoriel.
5. Il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que dans *toute base orthonormale directe* $\mathscr{B} = \left(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{d}\right)$, la matrice de u s'écrit :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $\theta \neq 0$, on dit que u est une *rotation* vectorielle d'axe $D = \mathrm{Vect}\left(\vec{d}\right)$ et d'angle θ.

Dans la base $\left(\vec{d}, \vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}\right)$ la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On trouve parfois cette définition d'une matrice de rotation.

En résumé, les éléments de $SO_3(\mathbb{R})$ sont I_3 et les matrices de rotations d'angle non nul :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \theta \in]-\pi, \pi]$$

Étude pratique d'une rotation en dimension 3.

1. Déterminer l'axe D de la rotation : c'est l'ensemble des vecteurs invariants.
2. Chercher un vecteur $\vec{d} \in D$ unitaire. Il définit une orientation sur le plan $P = \mathrm{Vect}\left(\vec{d}\right)^{\perp}$: une base $\left(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}\right)$ sera directe dans le plan P lorsque la base $\left(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{d}\right)$ est une base directe de $\mathbb{E}$.

3. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{\varepsilon_1} \in P$, vérifiant $\left\langle \overrightarrow{d}, \overrightarrow{\varepsilon_1} \right\rangle = 0$.
4. Poser $\overrightarrow{\varepsilon_2} = \overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{\varepsilon_1}$. Alors $\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{d}\right)$ est une bon directe de l'espace.
5. Calculer $u\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}\right)$ et le décomposer sur $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ et $\overrightarrow{\varepsilon_2}$:

$$u\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}\right) = \cos(\theta).\overrightarrow{\varepsilon_1} + \sin(\theta).\overrightarrow{\varepsilon_2}$$

On en tire $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ et donc l'angle de la rotation.
On peut aussi remarquer que $\mathrm{Tr}(A) = 2\cos(\theta) + 1$ ce qui donne facilement $|\theta|$.

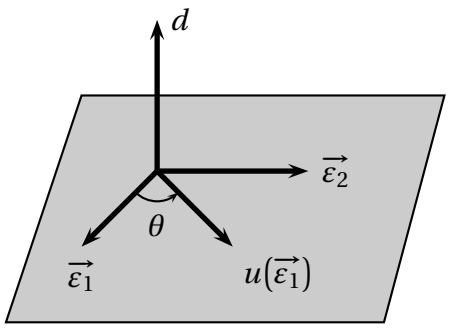


FIGURE 16.1 – Détermination de l'angle θ d'une rotation

✎ ***Exemple.*** Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté euclidien usuel, on considère l'endomorphisme de matrice

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.
Reconnaître cet endomorphisme et préciser ses éléments caractéristiques.

Théorème 38 – Classification des isométries vectorielles indirectes en dimension 3

Soit $\mathbb{E}$ un espace euclidien de dimension 3 et $u \in O(\mathbb{E}) \setminus SO(\mathbb{E})$ une isométrie vectorielle directe.

1. $\mathrm{Sp}(u) \subseteq \{-1, 1\}$.
2. $-1 \in \mathrm{Sp}(u)$.
3. $\mathbb{E}_{-1}(u)^{\perp}$ est stable par u.
4. Si $u \neq -\mathrm{id}_E$, $\dim \mathbb{E}_{-1}(u) = 1$: $\mathbb{E}_{-1}(u) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{d}\right)$ et $P = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{d}\right)^{\perp}$ est un plan vectoriel.
5. Il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que dans *toute base orthonormale directe* $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{d}\right)$, la matrice de u s'écrit :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si $\theta \neq \pi$, on dit que u est une *antirotation* d'axe $D = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{d}\right)$ et d'angle θ : u est

la composée d'une rotation d'angle θ et d'une symétrie orthogonale par rapport au plan P.

En résumé, les éléments de $O_3(R)\backslash SO_3(\mathbb{R})$ sont $-I_3$ et les matrices d'antirotations d'angle non nul :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \theta \in]-\pi,\pi]$$

3 Endomorphismes symétriques

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{E}$ est un espace euclidien quelconque.

Définition 39 – Endomorphisme autoadjoint

Soit un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$. On dit que u est *symétrique* lorsque :

$$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in \mathbb{E}^2, \quad \langle u(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, u(\vec{y})\rangle$$

✎ ***Exemple.*** Les symétries et projections orthogonales sont des exemples d'endomorphismes symétriques.

✎ ***Exemple.*** Si u est symétrique, on a $\mathbb{E} = \ker(u) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u)$.

On note parfois $\mathscr{S}(\mathbb{E})$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{E}$.

Théorème 40 – Caractérisation matricielle

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale et $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. L'endomorphisme u est symétrique si, et seulement si, ${}^tA = A$ ie A est symétrique.

Autrement dit : $u \in \mathscr{S}(\mathbb{E}) \iff A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 41 – Dimension de $\mathscr{S}(\mathbb{E})$

$\mathscr{S}(\mathbb{E})$ est un sev de $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ de dimension finie égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Théorème 42 – Stabilité de l'orthogonal d'une sous-espace stable

Si u est symétrique et si $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ stable par u, alors $\mathbb{F}^\perp$ est aussi stable par u. Dans une base adaptée à la somme directe $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^\perp$, la matrice représentative de u est diagonale par blocs.

Étudions maintenant les éléments propres d'un endomorphisme symétrique.

Théorème 43 – Les valeurs propres d'une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ sont réelles

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors toutes ses valeurs propres complexes sont réelles :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$$

Le polynôme caractéristique de A est donc scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Rappelons que $\chi_A(X)$ scindé signifie que :

$$\chi_A(X) = \lambda . \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{\beta_k}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est le coefficient dominant, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont les racines réelles de χ_u, et $\beta_1, \ldots, \beta_p$ sont les ordres de multiplicité : $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{N}^*$ et $\beta_1 + \cdots + \beta_p = n$.
Dire que $\chi_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}[X]$ signifie que toutes ses racines dans $\mathbb{C}$ sont réelles.

Corollaire 44 – Polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ un endomorphisme symétrique.
Alors son polynôme caractéristique est *scindé* dans $\mathbb{R}[X]$.
En particulier $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$.

Théorème 45 – Sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ un endomorphisme symétrique.

1. Soient deux valeurs propres λ, μ distinctes de u, alors $\mathbb{E}_\lambda(u) \perp \mathbb{E}_\mu(u)$.
2. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\mathbb{E}_\lambda(u)^\perp$ est stable par u.

Corollaire 46 – Sous-espaces propres d'une matrice symétrique

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
Soient deux valeurs propres λ, μ distinctes de A, alors $\mathbb{E}_\lambda(A) \perp \mathbb{E}_\mu(A)$.

Le résultat principal du paragraphe est le suivant.

Théorème 47 – Théorème spectral

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ un endomorphisme symétrique.

1. u est diagonalisable ;
2. Il existe une base *orthonormale* de vecteurs propres de u.
3. L'espace est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u.

Le même théorème sous forme matricielle.

Théorème 48 – Les matrices symétriques réelles sont diagonalisables

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *symétrique réelle*. Alors :

1. A est diagonalisable ;
2. Il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que
$$A = PDP^{-1} = PD^tP$$
3. La diagonale de D coïncide avec le spectre de A, chaque valeur propre étant répétée autant de fois que son ordre de multiplicité.

On dit parfois qu'une matrice symétrique réelle est *ortho-diagonalisable*.

⚠ Une matrice symétrique à coefficients complexes peut ne pas être diagonalisable !
Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

4 Exercices

Groupe orthogonal

Exercice 1 – Matrice d'une rotation

On considère $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ orienté muni de son produit scalaire canonique et le vecteur $d = (1,1,1)$. Déterminer la matrice A de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ autour de l'axe $D = \mathrm{Vect}(d)$.

Exercice 2 – Exemples d'endomorphismes orthogonaux

$\mathbb{E}$ désigne un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (i, j, k)$. Déterminer la nature, et préciser les éléments caractéristique, de l'endomorphisme orthogonal f de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est donnée ci-après :

a) $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ c) $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

Endomorphismes symétriques

Exercice 3 – Caractérisation des projecteurs orthogonaux

Montrer qu'un endomorphisme $p \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ est un projecteur orthogonal si et seulement si :

1. c'est un projecteur : $p^2 = p$;
2. il est symétrique.

Exercice 4 – Projection et symétrie orthogonales par rapport à un hyperplan

Dans un espace euclidien $\mathbb{E}$, on considère un vecteur non nul $x \in \mathbb{E}$. On définit l'hyperplan $\mathbb{H} = \mathrm{Vect}(x)^{\perp}$. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $\mathbb{E}$, on note $U = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice P du projecteur orthogonal sur $\mathbb{H}$ et la matrice S de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{H}$ (réflexion) dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 5 – La matrice ${}^tAA$

Pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, on lui associe la matrice $B = {}^tAA$.

1. Montrer que B est symétrique.
2. $\ker(B) = \ker(A)$;
3. $\operatorname{Im}(B) = \operatorname{Im} {}^tA = \ker(A)^\perp$.

Exercice 6 – Un exemple d'endomorphisme symétrique

Montrer que $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par $\varphi(x, y, z) = (x - z, y - z, -x - y + z)$, est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique.

Exercice 7 – Un exemple d'endomorphisme symétrique

Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que l'application u définie sur $\mathbb{E}$ par :

$$u(P) = \int_0^1 (X + t)^n P(t)\,\mathrm{d}t$$

est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{E}$.

Exercice 8 – Endomorphismes antisymétriques

Soit $\mathbb{E}$ un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ est *antisymétrique* si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2 \ \big\langle u(x), y\big\rangle = -\big\langle x, u(y)\big\rangle$$

1. $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. On considère un vecteur unitaire $a = (a_1, a_2, a_3)$ et l'endomorphisme f défini par $f(x) = a \wedge x$. Montrer que f est antisymétrique et déterminer sa matrice dans la base canonique.
2. Montrer que la matrice d'un endomorphisme antisymétrique dans une base orthonormale est antisymétrique.
3. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$.
4. Si u est antisymétrique, montrer que $E = \ker(u) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u)$.
5. Montrer que si u est antisymétrique, $\operatorname{rg}(u)$ est pair (considérer la matrice de la restriction de u à $\operatorname{Im} u$).

Théorème spectral

Exercice 9 – Spectre d'une matrice antisymétrique réelle

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique réelle.
Que peut-on dire de son spectre complexe ?

Exercice 10 – Une inégalité

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A)^2 \leq \mathrm{rg}(A).\mathrm{Tr}\left(A^2\right)$.

Exercice 11 – Équation matricielle

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant :

1. A et ${}^tA$ commutent ;
2. A est nilpotente.

Montrer que $A = 0$.

Exercice 12 – Équation matricielle

On considère dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation matricielle : $X\,{}^tX X = I_n$.

1. Montrer qu'une solution M est symétrique.
2. En déduire les solutions de l'équation.

Exercice 13 – Encadrement des valeurs propres d'une matrice quelconque

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = \dfrac{1}{2}(A + {}^tA)$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset [\alpha, \beta]$ où α est la plus petite et β la plus grande valeur propre de S.

Exercice 14 – Quotient de Rayleigh

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle de valeurs propres $\lambda_1 \leq \leq_2 \leq \ldots \lambda_n$. Montrer que :

$$\sup_{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0_{n,1}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_n \quad \text{et} \quad \inf_{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0_{n,1}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_1$$

Exercice 15 – Conditions impliquant qu'une matrice est orthogonale

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant

$$\begin{cases} {}^tAA = A{}^tA \\ A^2 = -I_n \end{cases}$$

Montrer que A est une matrice orthogonale.

Matrices symétriques positives et définies positives

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On dit que :

- A est *positive* si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$;
- A est *définie positive* si A est positive et

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX = 0 \Longleftrightarrow X = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Exercice 16 – Matrices symétriques positives et définies positives

1. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la matrice $S = {}^tAA$ est symétrique positive.
   Montrer ensuite que $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow A \in Gl_[(n)]\mathbb{R}$.
   Exprimer la norme de Schur de A à l'aide des valeurs propres de S.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Montrer que :
   (a) $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$;
   (b) $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset]0, +\infty[$.

Exercice 17 – Racine carrée d'une matrice symétrique positive

Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ symétrique positive telle que $R^2 = A$.

Exercice 18 – Décomposition polaire d'une matrice réelle

1. Soit $M \in Gl_{\mathbb{R}}()$ une matrice inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une unique matrice $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telles que $M = \Omega S$.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. Montrer qu'il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M = \Omega S$.

Exercice 19 – Une inégalité sur le déterminant d'une matrice de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

1. Inégalité arithmético-géométrique.
   (a) Montrer que $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.
   (b) En déduire que si $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels strictement positifs. :
   $$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$
   Poser $x_k = \dfrac{a_k}{m}$ *où* $m = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ *et utiliser l'inégalité précédente.*
2. Soit $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\det(S) \leq \left(\dfrac{\mathrm{Tr}(S)}{n}\right)^n$.
   (b) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $S[i, i] > 0$.
   (c) On note $D = \mathrm{Diag}\left(\dfrac{1}{\sqrt{S[1,1]}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{S[n,n]}}\right)$. Calculer $\det(DSD)$ et $\mathrm{Tr}(DSD)$.
   (d) En déduire :
   $$\det(S) \leq \prod_{k=1}^{n} S[k, k]$$

Chapitre 17

Couples discrets

Sommaire

1 Couples de variables aléatoires discrètes 408

1.1 Couple discret 408

1.2 Évènements associés à un couple discret 408

1.3 Loi conjointe d'une couple discret 409

1.4 Lois marginales 410

1.5 Lois conditionnelles 412

1.6 Indépendance de VARD 412

1.7 Fonction génératrice d'une somme de VARD 416

2 Covariance d'un couple discret 416

2.1 Théorème de transfert pour les couples discrets de VARD finies 416

2.2 Covariance de deux VARD finies 417

2.3 Variance d'une somme de VARD 419

2.4 Coefficient de corrélation d'un couple de VARD 420

3 Convergences et approximations 421

3.1 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev 421

3.2 Approximation binomiale-Poisson 422

4 Exercices 423

On considère une expérience aléatoire modélisée par un triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1 Couples de variables aléatoires discrètes

1.1 Couple discret

Définition 1 – Couple discret

On appelle couple de VARD, ou couple discret, toute application

$$Z = (X, Y) : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & Z(\omega) = \big(X(\omega), Y(\omega)\big) \end{array}$$

où X et Y sont deux VARD.

L'ensemble des valeurs prises par Z est :

$$Z(\Omega) = \Big\{\big(X(\omega), Y(\omega)\big) \Big/ \omega \in \Omega\Big\}$$

C'est une partie de $\mathbb{R}^2$, incluse dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Notation : Si $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j / j \in J\}$ (où I et J parties de $\mathbb{N}$, finies ou infinies) alors $Z(\Omega) \subseteq X(\Omega) \times Y(\Omega) \subseteq \{(x_i, y_j) / (i, j) \in I \times J\}$.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés cubiques distinguables. On note X = Chiffre obtenu avec le premier dé, et Y = Chiffre obtenu avec le second dé. Alors $Z = (X, Y)$ est un couple discret et $Z(\Omega) = [\![1, 6]\!]^2$.

1.2 Évènements associés à un couple discret

Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$, on note $[Z \in A]$ l'évènement :

$$Z^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / Z(\omega) \in A\}$$

Si $A = B \times C$ où B et C sont deux parties de $\mathbb{R}$, on a :

$$[Z \in B \times C] = [X \in B] \cap [Y \in C]$$

En particulier si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $[Z = (x, y)] = [X = x] \cap [Y = y]$.

Notation : Pour simplifier on pose $\mathbb{P}(X \in B, Y \in C) = \mathbb{P}\big([X \in B] \cap [Y \in C]\big) = \mathbb{P}\big(Z \in (B, C)\big)$ et $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big) = \mathbb{P}\big(Z = (x, y)\big)$.

Théorème 2 – S.c.e. associé à un couple discret

Si $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ et et $Y(\Omega) = \{y_j / j \in J\}$ alors la famille d'évènements $\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)_{(i,j) \in I \times J}$ est un s.c.e. de Ω

1.3 Loi conjointe d'une couple discret

Définition 3 – Loi conjointe d'une couple discret

Si (X,Y) est un couple discret, on appelle loi conjointe l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{L}_{(X,Y)} : & X(\Omega)\times Y(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & (x,y) & \longmapsto & \mathbb{P}(X=x, Y=y) \end{array}$$

La loi de probabilité $\mathscr{L}_{(X,Y)}$ est aussi notée $\mathbb{P}^{(X,Y)}$.

Cas d'un couple de VARD finies : $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ et $Y(\Omega)=\{y_1,\dots,y_q\}$. Dans ce cas on pose, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$, $p_{ij}=\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$.
Puisque la famille $\big([X=x_i]\cap[Y=y_j]\big)_{(i,j)\in I\times J}$ est un s.c.e., le théorème de Fubini donne :

$$1=\sum_{(i,j)\in I\times J} p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{q} p_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\right)$$

(En fait ce résultat est vraie avec des sommes infinies, mais les séries doubles ne sont pas au programme...)
Déterminer la loi de X c'est calculer la valeur des p_{ij}. On peut représenter les résultats sous forme d'un tableau à double entrée :

X \ Y	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_q
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1q}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{iq}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\dots$	p_{nj}	$\dots$	p_{nq}

La somme de toutes les cases doit être égale à 1.

⚠ ATTENTION ! Avant de déterminer la loi conjointe de (X,Y), il est donc *indispensable* de déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, c'est-à-dire les valeurs prises par les VARD X et Y.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une urne composée de 3 boules numérotées. On tire deux boules successivement, avec remise. On note X_1 = Numéro de la première boule tirée, et X_2 = Numéro de la seconde boule tirée. Alors $X_1(\Omega)=X_2(\Omega)=[\![1,3]\!]$ et la loi conjointe de (X_1,X_2) est :

X_1 \ X_2	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

De même si $Y = \max(X_1, X_2)$ alors $Y(\Omega) = [\![1,3]\!]$ et la loi conjointe de (X_1, Y) est :

$X_1 \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
3	0	0	$\frac{3}{9}$

Théorème 4 – Construction d'un couple discret finie ayant une loi conjointe donnée

On se donne des réels $(p_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ vérifiants :
- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $p_{ij} \geq 0$;
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{q} p_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\right) = 1$.

Alors pour tous réels deux à deux distincts $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_p$ il existe un couple discret (X, Y) défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ telle que :
$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$, et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$.
Et donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $p_{ij} \in [0,1]$.

Le résultat est vrai avec des VARD infinies, mais les séries doubles ne sont pas au programme...

✎ ***Exemple.*** Il existe un couple discret (X, Y) à valeurs dans $[\![1,n]\!]^2$ et de loi conjointe donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{i+j}{n^2(n+1)}$$

1.4 Lois marginales

Définition 5 – Lois marginale

Si (X, Y) est un couple discret, on appelle loi marginales de (X, Y) les lois de X et de Y.

Grâce à la formule des probabilités totales, la loi conjointe permet de déterminer les deux lois marginales.

Théorème 6 – La loi conjointe caractérise les lois marginales

Si (X, Y) est un couple discret avec $X(\Omega) = \{x_i \,/\, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \,/\, j \in J\}$, alors :

$$\forall i \in I, \quad \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j\in J} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j\in J} p_{ij}$$

et :

$$\forall j \in J, \quad \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i\in I} p_{ij}$$

On note parfois $p_{i.} = \mathbb{P}(X = x_i)$ et $p_{.j} = \mathbb{P}(Y = y_j)$. On a donc les formules :

$$p_{i.} = \sum_{j\in J} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j\in J} p_{ij} \quad \text{et} \quad p_{.j} = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i\in I} p_{ij}$$

Dans le cas de VARD finies, on peut rajouter une ligne et une colonne au tableau à double entrée représentant la loi conjointe. Pour trouver les loi marginales, il suffit ensuite d'additionner les cases en ligne et en colonne.

✎ ***Exemple.*** Sur les deux tableaux précédents, on obtient :

X_1 \ X_2	1	2	3	Loi de X_1
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
Loi de X_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

X_1 \ Y	1	2	3	Loi de X_1
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
3	0	0	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{3}$
Loi de Y	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$	1

On retrouve que $X_1 \hookrightarrow \mathscr{U}(\{1,2,3\})$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{U}(\{1,2,3\})$ (espérons que l'aviez noté depuis le début !). Par contre, pour $Y = \max(X_1, X_2)$, on ne trouve pas de loi usuelle.

⚠ ATTENTION ! Le théorème précédent n'est pas une équivalence : les lois marginales ne caractérisent pas la loi conjointe. Intuitivement, les lois marginales donnent des information sur le comportement de chacune des variables aléatoires, mais elles ne donnent aucune information que la manière dont les deux variables aléatoires interagissent au cours de l'expérience.

Comme contre-exemple, nous allons construire deux couples de VARD qui ont les mêmes lois marginales mais des lois conjointes différentes.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une urne contenant 3 boules blanches et 4 boules rouges. On effectue deux tirages successifs d'une boule dans cette urne. On note :

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est blanche} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est rouge} \end{cases}$$

et :

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la seconde boule tirée est blanche} \\ 0 & \text{si la seconde boule tirée est rouge} \end{cases}$$

On obtient les lois conjointes et marginale suivantes :

TIRAGES AVEC REMISE

X_1 \ X_2	0	1	Loi de X_1
0	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{3}{7}$
Loi de X_2	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

TIRAGES SANS REMISE

X_1 \ X_2	0	1	Loi de X_1
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
Loi de X_2	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

1.5 Lois conditionnelles

Définition 7 – Lois conditionnelles d'un couple discret

Soit (X, Y) un couple discret.

1. Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$. On appelle loi conditionnelle de X sachant $Y = y$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{L}_{X|Y=y} & X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \mathbb{P}_{Y=y}(X = x) = \mathbb{P}(X = x|Y = y) = \dfrac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \end{array}$$

2. Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$. On appelle loi conditionnelle de Y sachant $X = x$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{L}_{Y|X=x} & Y(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \mathbb{P}_{X=x}(Y = y) = \mathbb{P}(Y = y|X = x) = \dfrac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)} \end{array}$$

Les lois conditionnelles sont souvent données dans la modélisation.

✎ ***Exemple.*** On suppose que le nombre de personnes arrivant aux urgences de l'hôpital de Bellepierre, la nuit de la Saint-Sylvestre, est une VARD Y de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note X = Nombre de personnes qui sont des femmes. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X sachant que $Y = n$ est la loi $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

Très important ! si on connaît la loi de Y, ainsi que la loi de X sachant $Y = y$ pour tout $y \in Y(\Omega)$, on peut en déduire la loi conjointe de (X, Y) :

$$\forall (i, j) \in I \times J, \quad \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j) \times \mathbb{P}_{Y=y_j}(X = x_i)$$

et donc la loi de X :

$$\forall i \in I, \quad \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(Y = y_j) \times \mathbb{P}_{Y=y_j}(X = x_i)$$

où on a posé $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j / j \in J\}$.

✎ ***Exemple.*** Dans l'exemple précédent : $X \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)$.

1.6 Indépendance de VARD

Définition 8 – Indépendance de deux VARD

On dit que deux VARD X et Y (définie sur le même espace probabilisé) sont indépendantes, lorsque :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$$

On le note $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Remarquez que si X et Y sont indépendantes, les lois marginales caractérise la loi conjointe (on a vu que ce résultat est faux en général) !

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés distinguables et on note X = chiffre donné par le premier dé, et Y = chiffre donné par le second. Alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

✎ ***Exemple.*** X est une VARD certaine si et seulement si $X \perp\!\!\!\perp X$.

Pour le théorème suivant rappelons que, si A est un évènement, alors $\mathbb{1}_A$ est une VARD de loi $\mathscr{B}\big(\mathbb{P}(A)\big)$.

Théorème 9 – Lien entre indépendance d'évènements et indépendance de VARD

Soient A et B deux évènements. Alors :

A et B sont des évènements indépendants $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont des VARD indépendantes

Définition 10 – Indépendance d'un nombre fini de VARD

On définit deux notions d'indépendance pour des VARD $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (définies sur le même espace probabilisé).

1. On dit que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont deux à deux indépendantes lorsque, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$, ie lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$i \neq j \Longrightarrow \Big[\forall (x_i, x_j) \in X_i(\Omega) \times X_j(\Omega), \quad \mathbb{P}(X_i = x_i, X_j = x_j) = \mathbb{P}(X_i = x_i) \times \mathbb{P}(X_j = x_j)\Big]$$

2. On dit que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, ou indépendantes dans leur ensemble, lorsque $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \mathbb{P}(X_2 = x_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

ie :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k)$$

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une urne de N boules numérotées, dans laquelle on effectue n tirages successifs d'une boule avec remise. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note X_k = numéro inscrit sur la boule tirée au k-ième tirage.
Alors $(X_1, \ldots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Théorème 11 – Indépendance mutuelle et indépendance 2 à 2 pour des VARD

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse (comme dans le cas des évènements) !

Définition 12 – Indépendance d'un nombre infini de VARD

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se donne une VARD X_n. On a donc une suite de VARD $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (toutes définies sur le même espace probabilisé).

1. On dit que les X_n, $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux indépendantes lorsque, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i \neq j$, on a $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$, ie lorsque $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$:

$$i \neq j \Longrightarrow \Big[\forall (x_i, x_j) \in X_i(\Omega) \times X_j(\Omega), \quad \mathbb{P}(X_i = x_i, X_j = x_j) = \mathbb{P}(X_i = x_i) \times \mathbb{P}(X_j = x_j)\Big]$$

2. On dit que les X_n, $n \in \mathbb{N}$, sont mutuellement indépendantes, ou indépendantes dans leur ensemble, lorsque toutes les sous-familles finies sont mutuellement indépendantes (au sens de la définition précédentes), ie pour tout J partie finie non vide de $\mathbb{N}$, les VARD $(X_n)_{n\in J}$ sont mutuellement indépendantes.
Autrement dit, pour tout $n \geq 2$, pour tout $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ deux à deux distincts, pour tout $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \in X_{i_1}(\Omega) \times X_{i_2}(\Omega) \times \cdots \times X_{i_n}(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(X_{i_1} = x_{i_1}, X_{i_2} = x_{i_2}, \dots, X_{i_n} = x_{i_n}) = \mathbb{P}(X_{i_1} = x_{i_1}) \times \mathbb{P}(X_{i_2} = x_{i_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_{i_n} = x_{i_n})$$

ou encore :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_{i_k} = x_{i_k}]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{i_k} = x_{i_k})$$

Proposition 13 – Caractérisation des familles de VARD mutuellement indépendantes

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VARD. Alors :

$$\begin{aligned} & (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mutuellement indépendantes} \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N}, \quad (X_0, \dots, X_n) \text{ mutuellement indépendantes} \end{aligned}$$

✎ ***Exemple.*** On lance une infinité de fois une pièce truquée de telle sorte qu'elle donne « pile » avec probabilité $p \in]0,1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{cases} 1 & \text{si le } n-\text{ième lancer donne Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Alors les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes.

Théorème 14 – Indépendance mutuelle et indépendance 2 à 2 pour des VARD

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse (comme dans le cas des évènements) !

Notation : Soit une famille de VARD $(X_i)_{i\in I}$. On dit qu'elles sont i.i.d. lorsqu'elles sont mutuellement indépendantes et identiquement distribuées. En pratique, ceci correspond au cas d'une expérience répétée de manière identique et indépendante à chaque fois.

✎ ***Exemple.*** Dans l'exemple précédent, les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont i.i.d. de loi $\mathscr{B}(p)$.

⚠ ATTENTION ! En pratique, l'indépendance mutuelle n'est en général pas démontrée. Elle fait partie des hypothèses de l'énoncé.

Terminons par deux résultats classiques, qui permettent en pratique de déduire de l'énoncé l'indépendance mutuelle de VARD.

Lemme 15 – Lemme des sous-familles

Si $(X_i)_{i\in I}$ et une famille de VARD mutuellement indépendantes, alors, pour tout $J \subseteq I$, la sous-famille $(X_i)_{i\in J}$ est elle aussi composée de VARD mutuellement indépendantes.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une urne de N boules numérotées, dans laquelle on effectue des tirages successifs d'une boule avec remise. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n = numéro inscrit sur la boule tirée au n-ième tirage.
Alors (X_1, X_4, X_5) sont mutuellement indépendantes.

Lemme 16 – Lemme des coalitions

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de VARD mutuellement indépendantes.

1. Supposons que, pour tout $i \in I$, f_i est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie au moins sur $X_i(\Omega)$.
   Alors les VARD $\left(f_i(X_i)\right)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.
2. On suppose qu'on partitionne $(X_i)_{i\in I}$ en deux sous-familles $(X_i)_{i\in I_1}$ et $(X_i)_{i\in I_2}$ avec I_1 et I_2 qui forment une partition de I.
   Supposons ensuite que Y est une VARD fonction des X_i pour $i \in I_1$, et que Z est une VARD fonction des X_i pour $i \in I_2$.
   Alors Y et Z sont indépendantes.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une urne de 20 boules, dont 15 blanches et 5 noires. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise. On note Y = nombre de boules blanches obtenues au 7 premiers tirages, et Z = nombre de boules noires obtenues entre le 8-ième tirage et le 12-ième. Alors $Y \perp\!\!\!\perp Z$.
Par contre si Z = nombre de boules noires obtenues entre le 7-ième tirage et le 12-ième. Alors Y et Z ne sont, à priori, pas indépendantes.

Donnons tout de même un exemple, classique et difficile, de situation où l'indépendance mutuelle doit être démontrée, sans utiliser les résultats précédents.

✎ ***Exemple.*** On lance une infinité de fois une pièce truquée de telle sorte qu'elle donne « pile » avec probabilité $p \in]0,1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le numéro du lancer qui donne le n-ième Pile ($X_n = +\infty$ si le n-ième Pile n'est jamais observé). On note aussi $X_0 = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le temps d'attente entre le $(n-1)$−ième et le n-ième succès : $T_n = X_n - X_{n-1}$.
Les VARD $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont alors i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$ (commencer par déterminer la loi de T_n sachant $X_{n-1} = p$).

1.7 Fonction génératrice d'une somme de VARD

La notion de fonction génératrice permet d'étudier simplement une somme de VARD indépendantes.

Théorème 17 – Fonction génératrice et somme de VARD

1. Cas de deux VARD. Soient X et Y deux VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur le même espace probabilisé. Alors :

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow \forall t \in [-1,1],\ G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$$

2. Cas de n VARD. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des VARD définies sur le même espace probabilisé. Alors :

$$X_1, \ldots, X_n \text{ mutuellement indépendantes} \Longrightarrow \forall t \in [-1,1],\ G_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$$

✎ ***Exemple.*** Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n_2, p)$, avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, montrer que $X + Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$.

✎ ***Exemple.*** Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_2)$, avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $X + Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

✎ ***Exemple.*** Si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

2 Covariance d'un couple discret

2.1 Théorème de transfert pour les couples discrets de VARD finies

Théorème 18 – Théorème de transfert pour les couples discrets de VARD finies

Soit (X, Y) un couple discret de VARD finies, et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au moins sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Alors $f(X, Y)$ est une VARD finie et son espérance est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(f(X,Y)\big) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} f(x,y) \times \mathbb{P}(X = x, Y = y) \right) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{x \in X(\Omega)} f(x,y) \times \mathbb{P}(X = x, Y = y) \right)\end{aligned}$$

Si on note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_p\}$, alors :

$$\mathbb{E}\big(f(X,Y)\big) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} f(x_i, y_j) \times \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j) \times \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \right)$$

Ce théorème est valable pour des VARD infinies, mais n'est pas au programme à cause de la série double qui intervient dans la formule.

✎ ***Exemple.*** Si X et Y sont deux VARD finies telles que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$, alors $\mathbb{E}(XY)$ existe et :

$$\mathbb{E}\big(XY\big) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_i y_j \times \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_j \times \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)\right)$$

Corollaire 19 – Linéarité de l'espérance - Version 2

1. Si X et Y sont deux VARD (éventuellement infinies) admettant une espérance, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

2. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des VARD (éventuellement infinies) admettant une espérance, alors :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$$

La démonstration du cas où les VARD sont infinies n'est pas au programme de première année.

Corollaire 20 – Croissance de l'espérance

1. Si X est une VARD admettant une espérance et si $X \geq 0$ $\mathbb{P}$-ps, alors : $\mathbb{E}(X) \geq 0$ et $\mathbb{E}(X) = 0 \Longleftrightarrow X = 0$ $\mathbb{P}$-ps.
2. Si X et Y sont deux VARD admettant une espérance et si $X \leq Y$ $\mathbb{P}$-ps, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

2.2 Covariance de deux VARD finies

Définition 21 – Covariance de deux VARD finies

Si X et Y sont deux VARD finies, on appelle covariance de X et de Y le réel :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}(X)\big) \times \big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big]$$

L'espérance existe puisque les variable sont finies.

Intuitivement, la covariance mesure la dépendance entre X et Y.

Proposition 22 – Premières propriétés de la covariance

Soient X et Y deux VARD finies.

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X \times Y) - \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$
2. $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X) \geq 0$

En pratique, le calcul de $\mathrm{Cov}(X,Y)$ se ramène donc au calcul de trois espérances : $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$, cette dernière étant calculée grâce au théorème de transfert et à la loi conjointe de X et Y.

Théorème 23 – Règles de calcul de la covariance

On se donne des VARD finies X, Y, Z, $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_p$ et des réels a, b, c et d.

1. Symétrie. $\mathrm{Cov}(Y,X) = \mathrm{Cov}(X,Y)$
2. Linéarité par rapport à la première variable.
   $\mathrm{Cov}(aX+bY,Z) = a\,\mathrm{Cov}(X,Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y,Z)$
   et $\mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k, Z\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_k,Z)$.
3. Linéarité par rapport à la seconde variable.
   $\mathrm{Cov}(X,cY+dZ) = c\,\mathrm{Cov}(X,Y) + d\,\mathrm{Cov}(X,Z)$
   et $\mathrm{Cov}\left(X, \sum_{k=1}^{p} Y_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Cov}(X,Y_k)$
   et plus généralement :
   $$\mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k, \sum_{k=1}^{p} Y_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} \mathrm{Cov}(X_i,Y_j)\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i,Y_j)\right)$$
4. Absorption des constantes. $\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d) = ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Théorème 24 – Indépendance et covariance

Si X et Y sont deux VARD finies telles que $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ et donc $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse, on peut avoir $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ avec X et Y non indépendantes. Nous verrons un contre-exemple en TD.

✎ ***Exemple.*** Il existe un cas où la réciproque est vraie, et cela fait partie des résultats classiques en probabilités.
Lorsque X et Y sont des lois de Bernoulli, alors : $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Corollaire 25 – Espérance d'un produit de VARD finies mut. indépendantes

On suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont des VARD (éventuellement infinies) mutuellement indépendantes, et que $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions numériques telles que les VARD $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ sont finies. Alors :

$$\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k(X_k)\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[f_k(X_k)\right]$$

⚠ ATTENTION : ne pas confondre avec la linéarité de l'espérance !

✎ ***Exemple.*** On appelle transformée de Laplace d'une VARD finie X la fonction $\mathscr{L}_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$, définie sur $\mathbb{R}$. Ce n'est pas au programme mais cette fonction caractérise la loi de X.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont des copies i.i.d. de X, et si $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$ alors :

$$\mathscr{L}_S(t) = \left[\mathscr{L}_X(t)\right]^n$$

ce qui permet d'étudier la loi de S.

2.3 Variance d'une somme de VARD

Théorème 26 – Variance d'une somme de deux VARD finies

Si X et Y sont deux VARD finies et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\,\mathrm{Var}(X) + b^2\,\mathrm{Var}(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$

et donc :

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$

Corollaire 27 – Variance d'une somme de deux VARD indépendantes

Si X et Y sont deux VARD (éventuellement infinies) telles que $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors :

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

La démonstration dans le cas de VARD infinies n'est pas au programme.

Avant de passer au cas d'une somme de n VARD, rappelons une formule d'algèbre, valables pour des nombres $(x_1, \dots, x_n)$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} x_i x_j = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2 \times \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$$

Théorème 28 – Variance d'une somme de VARD finies

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des VARD finies, alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k) + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k) + 2 \times \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)
\end{aligned}$$

Cette formule est loin d'être simple ! On ne l'utilise que sur des cas particuliers. Par exemple, si les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont telles que $\mathrm{Var}(X_k)$ est une constante a indépendante de k, et $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ est une constant b indépendante de i et j, on a :

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = na + 2\frac{n(n-1)}{2}b$$

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une urne de N boules : N_1 blanches (numérotées) et N_2 noires (non numérotées). On en tire n simultanément, et on note X = nombre de boules blanches obtenues. On a :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Pour calculer la variance de X, on pose $p = \frac{N_1}{N}$. Pour calculer sa variance, on introduit les variables X_k, pour $k \in [\![1, N_1]\!]$, définie par :

$$X_k = \begin{cases} 0 & \text{si la boule blanche numéro } k \text{ est tirée} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $X = \sum_{k=1}^{N_1} X_k$ et on en déduit que $\mathrm{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$.

Corollaire 29 – Variance d'une somme de VARD deux à deux indépendantes

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des VARD (éventuellement infinies) deux à deux indépendantes, alors :

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k)$$

La démonstration dans le cas de VARD infinies n'est pas au programme.

✎ ***Exemple.*** On retrouve ainsi facilement que si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, alors $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

2.4 Coefficient de corrélation d'un couple de VARD

Définition 30 – Coefficient de corrélation

Soient X et Y deux VARD non presque sûrement constante (ie de variance non nulle). On appelle *coefficient de corrélation* de X et de Y le réel :

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Le coefficient de corrélation est un élément de $[-1, 1]$.

Proposition 31 – Propriété du coefficient de corrélation

On a :

$$-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1 \qquad \text{ou encore} \quad \left|\rho(X,Y)\right| \leq 1$$

Cette inégalité s'écrit aussi $\left|\mathbb{E}(XY)\right| \leq \sqrt{V(X)V(Y)} = \sigma_X \sigma_Y$. C'est une version probabiliste de l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, on sait que $\rho(X,Y) = 0$. Mais attention la réciproque est fausse.

On peut montrer que $\rho(X,Y) = \pm 1$ si, et seulement si, il existe deux constantes réelles a et b telles que $Y = aX + b$.De plus :

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)} \quad \text{et} \quad b = \mathbb{E}(Y) - \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}\mathbb{E}(X)$$

En général la variable aléatoire $aX + b$ s'appelle *régression linéaire* de X et Y. Elle approxime Y d'autant mieux que $\left|\rho(X,Y)\right|$ est proche de 1.

3 Convergences et approximations

3.1 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 32 – Inégalité de Markov

Soit X une VARD positive telle que $\mathbb{E}(X)$ existe. Alors :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

✎ ***Exemple.*** On suppose que $\mathscr{L}_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$ existe pour un $t > 0$. On a :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathrm{e}^{-ta}.\mathscr{L}_X(t)$$

On en déduit l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Théorème 33 – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

et donc en posant $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(|X - m| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Cette inégalité confirme l'utilisation de l'écart-type comme mesure de dispersion.

Elle n'est pas assez précise pour qu'on en déduise des intervalles de confiance (programme de Terminale S). Elle est surtout utilisée pour démontrer des résultats du type loi faible de grands nombres (voir le résultat suivant).

Théorème 34 – Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VARD i.i.d. admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

où $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = V(X_1)$.

On en déduit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Ce n'est pas au programme, mais donnons tout de même le vocabulaire : on dit alors que $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ *converge en probabilité* vers m lorsque $n \to +\infty$.

✎ ***Exemple.*** Si $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

donc on vient de démontrer de manière théorique que, dans le jeu de pile ou face infini, la *fréquence* d'un succès « converge » vers la *probabilité* d'un succès.

3.2 Approximation binomiale-Poisson

Théorème 35 – Approximation binomiale-Poisson

Soit X_n une VARD de loi $\mathscr{B}(n, p_n)$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Dans la grande majorité des cas, on a : $p_n = \dfrac{\lambda}{n}$.

Ce résultat explique pourquoi la loi de Poisson est appelée « loi des évènements rares ».

Ce n'est pas au programme, mais donnons tout de même le vocabulaire : on dit alors que X_n *converge en loi* vers $\mathscr{P}(\lambda)$ lorsque $n \to +\infty$.

En pratique : Si $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ et $\boxed{n \geq 3}$, $\boxed{\frac{\lambda}{n} \leq 0.01}$ et $\boxed{\lambda < 15}$, alors on peut choisir l'approximation : $X_n \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$.

4 Exercices

Couples discrets

Exercice 1 – Contre-exemples sur l'indépendance

1. Soient X_1 et X_2 i.i.d. de loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. On pose $X_3 = \mathbb{1}_{X_1 = X_2}$.
   Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont deux à deux indépendantes mais pas mutuellement indépendantes.
2. Montrer que qu'une VARD X est indépendante d'elle meme si, et seulement si, elle suit la loi certaine :
$$\exists x_0 \in X(\Omega) \big/ P(X = x_0) = 1$$

Exercice 2 – Exemple de couple discret

On choisit au hasard un nombre X entre 1 et n. On choisit alors au hasard avec équiprobabilité un entier Y entre 1 et X.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y), puis la loi de Y.
2. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de X sachant que $[Y = j]$.

Exercice 3 – Minimum et maximum lors de tirages simultanés

On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N. On tire simultanément n jetons de l'urne ($n < N$) et on note X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand.

1. Vérifier que :
$$\forall k \in [\![1, N-n+1]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{N-k+1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$
   et :
$$\forall k \in [\![n, N]\!], \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$
2. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 – Expérience en deux étapes

On dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ urnes numérotées de 1 à n : U_1, U_2, …, U_n. L'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une urne, on note X le numéro de l'urne choisie, puis on tire une boule au hasard dans l'urne choisie, on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y), en déduire la loi de Y.
2. Déterminer l'espérance de Y.
3. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5 – Transfert de lois géométriques indépendantes

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et de même loi $\mathscr{G}(p)$.

1. Déterminer la loi des variables aléatoires $Y = \min(X_1, X_2)$ et $Z = X_1 + X_2$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$.

Exercice 6 – Loi de Poisson composée

Un élément chimique émet des électrons pendant une période T. Le nombre d'électrons émis est une variable aléatoire Y qui suit une loi de POISSON de paramètre λ. Chaque électron a une probabilité p d'avoir un effet biologique (on dira qu'il est efficace). Soit Z la variable aléatoire égale au nombre d'électrons efficaces émis pendant une période T.

1. Déterminez la loi du couple (Y, Z).
2. Déterminez la loi de Z. Calculez son espérance.
3. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 – Espérance d'une somme dont le nombre de termes est aléatoires

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suit de VARD i.i.d. de loi $\mathscr{B}(p)$, et N une VARD de loi $\mathscr{P}(\lambda)$ indépendante de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $S = \sum_{k=0}^{N} X_k$. Déterminer la loi de S.
Faire le lien avec l'exercice précédent.

Exercice 8 – Espérance de la somme des numéro obtenus après deux étapes

On dispose d'une urne contenant $n \geq 2$ boules numérotées de 1 à n. Soit Y une variable uniforme à valeurs dans $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Lorsque Y prend la valeur ℓ, on tire simultanément ℓ boules dans l'urne. On appelle X la somme des numéros tirés. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire définie par $X_k = k$ si la boule numéro k a été tirée et $X_k = 0$ sinon.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la loi de X_k.
3. Justifier que $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$, en déduire l'espérance de X.

Exercice 9 – Modèle de Galton-Watson

Soit $p \in]0, 1[$.
On considère une plante qui peut donner naissance à deux descendants avec la probabilité p, ou à aucun descendant avec la probabilité $1 - p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de descendants issus de la $n^{\text{ème}}$ génération, c'est-à-dire le nombre de descendants de notre plante à la $(n+1)^{\text{ème}}$ génération.
On note aussi f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = px^2 + (1 - p)$.

a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0, 1]$.
b) On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1 - p$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

Montrer qu'elle est bien défnie, puis étudier sa monotonie et sa convergence.
c) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une relation entre $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 0)$.
d) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 10 – Application de la notion de fonctions génératrices

Montrer qu'il n'est pas possible de truquer deux dés, de telle sorte que la somme des chiffres obtenus en les lançant suive la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

Covariance

Exercice 11 – Covariance et indépendance

Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $T = U_1 - U_2$ et $V = U_1 + U_2$.

1. Déterminer la loi du couple (T, V).
2. Calculer $\mathrm{Cov}(T, V)$.
3. T et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 12 – Variable aléatoire de comptage

On dispose d'une arène entourée de n cages numérotées de 1 à n, ainsi que de N souris numérotées de 1 à N.

On place les souris au milieu de l'arène et celles-ci se répartissent au hasard, et de manière indépendante, dans les cages.
On note alors Y le nombre de cages vides et X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la cage numéro i est vide et 0 sinon.

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i, son espérance et sa variance.
2. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, déterminer $\mathbb{E}(X_i X_j)$ et $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
3. Relier Y aux variables X_i, $1 \leq i \leq n$. En déduire $\mathbb{E}(Y)$ puis $V(Y)$.
4. Déterminer la probabilité qu'aucune cage ne soit vide.

Exercice 13 – Variance d'une somme de variables non indépendantes

Soit $X_0, X_1, \ldots, X_N, X_{N+1}$ variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chaque une loi de Bernoulli de même paramètre $p \in]0, 1[$.

1. On pose, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $Y_n = \left(X_n - X_{n+1}\right)^2$. Donner la loi de Y_n.
2. Soit $Z = \sum_{k=1}^{N} Y_k$. Déterminer $V(Z)$.

Convergences et approximations

Exercice 14 – Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale

On considère une urne composée de N boules dont une proportion p de boules blanches.
On effectue n tirages d'une boule sans remise et on note X_N le nombre de boules blanches obtenues.
Montrer que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(X_N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exercice 15 – Convergences vers la loi de Poisson

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

1. On note F_n l'ensemble des **permutations** de $[\![1, n]\!]$. On choisit au hasard une de ces permutations, et on définit la variable aléatoire Y_n égale au nombre de points fixes de cette permutation.

   (a) Montrer que le nombre d'éléments de F_n n'admettant aucun point fixe vaut :

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

1. (b) Déterminer la loi de Y_n.

   (c) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

2. On note E_n l'ensemble des **applications** de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. On choisit au hasard une de ces applications, et on définit la variable X_n égale au nombre de points fixes de cette application.

   (a) Déterminer la loi de X_n.

   (b) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

Exercice 16 – Inégalités pour la loi de Poisson

Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. (a) Montrer que $\mathbb{P}(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

   (b) En déduire l'inégalité $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

2. On considère dans toute cette question une variable aléatoire discrète Z définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, d'espérance nulle et de variance σ^2.

   (a) Montrer que

$$\forall\, a > 0, \forall\, x \geq 0, \mathbb{P}(Z \geq a) \leq \mathbb{P}[(Z + x)^2 \geq (a + x)^2]$$

   (b) Montrer que $\forall\, a > 0, \forall\, x \geq 0, \mathbb{P}(Z \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}$.

   (c) Montrer que $\forall\, a > 0, \mathbb{P}(Z \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

   (d) En déduire que $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda + 1}$.

Chapitre 18

Équations différentielles linéaires

Sommaire

1 Équations du premier ordre scalaires 430

1.1 Généralités 430

1.2 Problèmes de raccord 432

2 Systèmes différentiels 433

2.1 Généralités 433

2.2 Systèmes linéaires homogènes à coefficients constants 435

3 Équations différentielles linéaires du second ordre 436

3.1 Cas général 436

3.2 Résolution de l'équation avec second membre 438

3.3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants . . 440

4 Exercices 442

1 Équations du premier ordre scalaires

1.1 Généralités

Définition 1 – Équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et trois fonctions continues $a, b, c : I \mapsto \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On dit qu'une fonction $y : I \mapsto \mathbb{C}$ est *solution* de l'équation différentielle

$$(E) \ : \ a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

si :

- la fonction y est dérivable sur I,
- $\forall t \in I,\ a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$.

Résoudre l'équation différentielle (E) sur un intervalle I consiste à déterminer l'ensemble de toutes les solutions y.

Remarque : Si la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I, les solutions de l'équation différentielle (E) sont les mêmes que celles de l'équation différentielle normalisée :

$$(E_N) \ : y'(t) + \alpha.y(t) = \beta(t)$$

où $\alpha = \dfrac{b}{a}$ et $\beta = \dfrac{c}{a}$.

Dans la suite, *on ne considère que des équations différentielles normalisées.*

Proposition 2 – Régularité des solutions

On considère une équation différentielle normalisée :

$$(E) \ : y' + a(t)y = b(t)$$

Si $a, b : I \mapsto \mathbb{C}$ sont de classe C^k sur I, toute solution de (E) est de classe C^{k+1} sur I.

L'existence et l'unicité de solutions est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3 – Cauchy-Lipschitz

Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution y au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(t)y & = b(t) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

On a l'expression explicite de y sous forme intégrale :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = \underbrace{\mathrm{e}^{-A(t)+A(t_0)}y(t_0)}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{\mathrm{e}^{-A(t))}\int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)\,\mathrm{d}s}_{\text{sol. gén.}}$$

où $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u$ est l'unique primitive de a sur I qui s'annule en t_0.

On en déduit la description de l'ensemble des solutions.

Corollaire 4 – Structure de l'ensemble des solutions

$$(H)\ : y' + a(t)y = 0$$
$$(E)\ : y' + a(t)y = b(t)$$

1. $\mathscr{S}_H$ est une droite vectorielle :

$$\boxed{\mathscr{S}_H = \{t \mapsto Ce^{-A(t)};\ C \in \mathbb{K}\}}$$

   où $A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de a sur I.
2. $\mathscr{S}_E \neq \emptyset$.
3. Pour toute solution particulière $\widetilde{y} \in \mathscr{S}_E$:

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \{t \mapsto \widetilde{y} + Ce^{-A(t)};\ C \in \mathbb{K}\}}$$

   ie qu'une solution générale de l'équation différentielle est égale à la somme d'une solution particulière et d'une solution générale de l'équation homogène.

<u>Plan de résolution</u> :

1. **Résolution de l'équation différentielle homogène :**

$$(H)\ : y' + a(t)y = 0$$

   — On cherche une primitive de la fonction a sur I : $A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$,
   — L'ensemble des solutions est la droite vectorielle

$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto Ce^{-A(t)};\ C \in \mathbb{K}\}$$

2. **Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre (méthode de la variation de la constante)** : On cherche une solution particulière $\widetilde{y}$ de l'équation normalisée avec second membre :

$$(E)\ : y' + a(t)y = b(t)$$

   sous la forme

$$\boxed{\widetilde{y}(t) = C(t)e^{-A(t)}}$$

   Alors $\widetilde{y}$ est solution de (E) si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad \boxed{C'(t)e^{-A(t)} = b(t)}$$

3. **L'ensemble de toutes les solutions de E est :**

$$\mathscr{S} = \{t \mapsto \widetilde{y}(t) + Ce^{-A(t)};\ C \in \mathbb{K}\}$$

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $]0,\pi[$ (E) : $\sin^3(x)y' = 2\cos(x)y$.

1.2 Problèmes de raccord

On considère une équation différentielle non-normalisée

$$(E): \quad a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

sur un intervalle $I =]\alpha,\beta[$.
On suppose que la fonction a s'annule une seule fois en un point $t_0 \in I$.

1. On résout (E) sur l'intervalle $I_1 =]\alpha, t_0[$. Les solutions de (E) sur I_1 sont les solutions de l'équation normalisée
$$(E_1): \quad y' + \frac{b(t)}{a(t)}y = \frac{c(t)}{a(t)}$$
et sont de la forme :
$$y_1(t) = \lambda y_0^1(t) + \widetilde{y}_1(t)$$
2. On résout de la même façon l'équation différentielle sur l'intervalle $I_2 =]t_0,\beta[$ et on trouve sur I_2 des solutions de la forme
$$y_2(t) = \mu y_0^2(t) + \widetilde{y_2}(t)$$
3. Une solution générale de l'équation non normalisée (E) est de la forme :
$$y: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \lambda y_0^1(t) + \widetilde{y}_2(t) & \text{si } t \in]\alpha, t_0[\\ \theta & \text{si } t = t_0 \\ \mu y_0^2 + \widetilde{y}_2(t) & \text{si } t \in]t_0,\beta[\end{cases} \end{array}$$
4. On doit vérifier que y est dérivable en t_0 (la continuité impose la valeur de θ) ;
5. On doit vérifier que $b(t_0)y(t_0) = c(t_0)$.

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $x(x^2+1)y' + y + x = 0$.

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $xy' - 2y = 1$ puis le problème de Cauchy $\begin{cases} xy' - 2y &= 1 \\ y(-1) &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$

2 Systèmes différentiels

2.1 Généralités

On considère un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Une fonction *vectorielle* $X : I \mapsto \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ se note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, où $x_1, \dots, x_n$ sont des fonctions *numériques* définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dira qu'elle est *dérivable* sur I lorsque les fonctions numériques $x_1, \dots, x_n$ le sont. Dans ce cas, on notera :

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

Définition 5 – Système différentiel d'ordre 1

Soient

$$A : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & A(t) \end{array} \qquad B : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & B(t) \end{array}$$

deux fonctions continues sur I.
Une fonction $X : I \mapsto \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est *solution du système différentiel*

$$\boxed{(E) \ : X' = A(t)X + B(t)}$$

si :

1. X est une fonction dérivable à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
2. $\forall t \in I, X'(t) = A(t) \times X(t) + B(t)$

Si on note $A(t) = ((a_{i,j}(t)))_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$, alors le système différentiel s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}(t) \times x_1(t) + & \dots & +a_{1,j}(t) \times x_j(t) + & \dots & +a_{1,n}(t) \times x_n(t) + b_1(t) & = & x_1'(t) \\ \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}(t) \times x_1(t) + & \dots & +a_{i,j}(t) \times x_j(t) + & \dots & +a_{i,n}(t) \times x_n(t) + b_i(t) & = & x_i'(t) \\ \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) \times x_1(t) + & \dots & +a_{n,j}(t) \times x_j(t) + & \dots & +a_{n,n}(t) \times x_n(t) + b_n(t) & = & x_n'(t) \end{array} \right.$$

et les inconnues sont les fonctions numériques $x_1, \dots, x_n$.

De même que pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, on définit la notion de problème de Cauchy.

Définition 6 – Problème de Cauchy

Soit $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On dit que $X : I \mapsto \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une *solution du problème de Cauchy* lorsque X est une solution de l'équation différentielle (E) et vérifie la condition initiale $X(t_0) = X_0$. On écrit :

$$(C) : \begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de solutions est donnée par le théorème suivant.

Théorème 7 – Cauchy-Lipschitz linéaire

Pour toute condition initiale $(t_0, X_0) \in I \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le problème de Cauchy (C) possède une unique solution.

On en déduit une description de l'espace des solutions.

Corollaire 8 – Structure des solutions de l'équation homogène

On considère l'équation homogène associée à (E) (sans second membre) :

$$(H) : X' = A(t)X$$

et on note $\mathscr{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H).
Alors $\mathscr{S}_H$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, isomorphe à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition 9 – Système fondamental de solutions

On appelle *système fondamental de solutions* de $X' = A(t)X$ tout famille $(C_1, \dots, C_n)$ de solutions qui est une base de $\mathscr{S}_H$.

✎ ***Exemple.*** Résoudre le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} x' &= ty \\ y' &= -tx \end{cases}$$

en posant $z = x + iy$.

Proposition 10 – Solution générale du système différentiel

Supposons que $\widetilde{X}$ soit une solution particulière du système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$.
Alors toute solution s'écrit $\widetilde{X} + X_H$ où X_H est solution du système différentiel homogène associé, ie qu'une solution générale du système différentiel est égale à la somme d'une

solution particulière et d'une solution générale d'une équation homogène.

✎ ***Exemple.*** Résoudre le système différentiel suivant sur $I =]0, +\infty[$:

$$(S) \quad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{t}x - y + t \\ y' = x + \dfrac{1}{t}y + t \end{cases}$$

On posera $u(t) = \dfrac{x(t)}{t}$ et $v(t) = \dfrac{y(t)}{t}$.

2.2 Systèmes linéaires homogènes à coefficients constants

On considère ici l'équation $X' = AX$ qui s'écrit composantes par composantes :

$$(E) \begin{cases} x_1'(t) & = a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots & \vdots \\ x_n'(t) & = a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

c'est-à-dire que $t \longmapsto A(t)$ est constante, et que $t \longmapsto B(t)$ est la fonction nulle.

Proposition 11 – Changement de base

Si A est semblable à une matrice D :

$$A = PDP^{-1} \qquad \text{avec} \quad P \in Gl_n(\mathbb{K})$$

En posant $Y = P^{-1}X$,

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \iff \begin{cases} Y' = DY \\ Y(t_0) = P^{-1}X_0 \end{cases}$$

Théorème 12 – Cas où A est diagonalisable

On suppose la matrice A diagonalisable dans $\mathbb{K}$,

$$A = PDP^{-1} \quad \text{où } D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Alors si X est solution de $X' = AX$, la fonction $Y = P^{-1}X$ est solution de $Y' = DY$ et est donc donnée par :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \qquad \text{où } y_i(t) = \alpha_i e^{\lambda_i t}$$

où α_i constante quelconque dans $\mathbb{K}$.
On obtient ensuite X par la formule $X = PY$.

Donc si $(V_1, \dots, V_n)$ est une base de vecteurs propres de A (les colonnes de la matrice P), l'ensemble des solutions de l'équation homogène $X' = AX$ s'écrivent :

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t} V_n$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

✎ ***Exemple.*** Résoudre le système

$$\begin{cases} x' &= 2x + y \\ y' &= x + 2y \end{cases}$$

Cas où A est trigonalisable. Lorsque le polynôme caractéristique de A est scindé, la matrice A est trigonalisable : il existe $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = PTP^{-1}$.
En posant $Y = P^{-1}X$, on se ramène à résoudre un système

$$Y' = TY$$

On commence par résoudre la dernière ligne qui est une équation différentielle scalaire homogène.
En reportant dans les lignes supérieures, on résout de proche en proche toutes les équations différentielles.

✎ ***Exemple.*** Résoudre

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= -x + 3y \end{cases}$$

Cas où le second membre n'est pas nul. Pour résoudre $X' = AX + B(t)$, il faut trouver une solution particulière (à additionner à la solution générale de $X' = AX$). Pour cela, aucune méthode n'est au programme...

3 Équations différentielles linéaires du second ordre

3.1 Cas général

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et des fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \delta : I \mapsto \mathbb{K}$ continues ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On considère l'équation différentielle :

$$(E) \ : \alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t)$$

Définition 13 – Solution d'une équation différentielle du second ordre linéaire

Une fonction $x : I \mapsto \mathbb{K}$ est une *solution* de l'équation (E) si :

1. x est deux fois dérivable sur I ;
2. $\forall t \in I, \alpha(t)x''(t) + \beta(t)x'(t) + \gamma(t)x(t) = \delta(t)$.

Remarque. Si α ne s'annule pas sur I, les solutions de (E) sont les mêmes que celles de l'équation normalisée

$$(E_N)\ : x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$$

où $a(t) = \dfrac{\beta(t)}{\alpha(t)}$, $b(t) = \dfrac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$ et $c(t) = \dfrac{\delta(t)}{\alpha(t)}$.

Dans la suite, on ne s'intéresse qu'à une équation normalisée

$$(E)\ : x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

et l'équation homogène associée :

$$(H)\ : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

On peut se ramener à un système différentiel d'ordre 1 via la technique de « vectorielisation ».

Théorème 14 – Système différentiel d'ordre 1 associé

Soit $x : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. On pose

$$X : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors x est solution de E si et seulement si X est solution du système différentiel d'ordre 1 :

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Plus généralement, si l'on considère une équation différentielle linéaire d'ordre n

$$(E)\ : x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = c(t)$$

où $a_1, \ldots, a_n, c : I \mapsto \mathbb{K}$ sont des fonctions continues, en posant

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

la fonction $x : I \mapsto \mathbb{K}$ (n fois dérivable sur I) est une solution de (E) si et seulement si la fonction $X : I \mapsto \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est solution du système différentiel d'ordre 1 :

$$X' = A(t)X + B(t) \quad \text{où } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \ldots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Théorème 15 – Cauchy-Lipschitz linéaire

Soit $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{K}^2$. Il existe une unique solution x du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \\ x(t_0) = \alpha_0 \\ x'(t_0) = \alpha_1 \end{cases}$$

De même pour une équation linéaire d'ordre n, le problème de Cauchy admet une unique solution avec les conditions initiales $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$, ..., $x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.

On en déduit la structure de l'ensemble des solutions du système différentiel homogène.

Théorème 16 – Structure de $\mathscr{S}_H$

1. L'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de l'équation homogène est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.
2. L'application
$$\Phi_{t_0} : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_H & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ x & \longmapsto & (x(t_0), x'(t_0)) \end{array}$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

De manière générale, pour une équation différentielle linéaire d'ordre n, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n.

3.2 Résolution de l'équation avec second membre

3.2.1 Méthode générale

On s'intéresse à l'équation différentielle avec second membre :

$$(E) \ : x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

Théorème 17 – Structure de $\mathscr{S}_E$

Si l'on connaît une solution particulière $\tilde{x}$ de E, alors

$$\mathscr{S}_E = \{t \mapsto \tilde{x}(t) + Ax_1(t) + Bx_2(t);\ (A, B) \in \mathbb{K}^2\}$$

où (x_1, x_2) est une base de $\mathscr{S}_H$. Donc une solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière et d'une solution générale de l'équation homogène.

Pour simplifier la recherche de solution particulière, on utilise souvent le principe de superposition.

Théorème 18 – Superposition des solutions

On considère une équation différentielle

$$(E)\ : x'' + a(t)x' + b(t)x = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)$$

Si x_i est une solution particulière de l'équation

$$(E_i)\ : x'' + a(t)x' + b(t)x = c_i(t)$$

alors la fonction $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ est une solution particulière de (E).

Plan de résolution. Pour résoudre une équation

$$(E)\ : x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

1. Résoudre d'abord l'équation homogène associée

$$(H)\ : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

   Pour cela il faut trouver deux solutions non colinéaires x_1 et x_2. On sait qu'elles forment une base de S_H.
2. Chercher une solution particulière de l'équation avec second membre
   — Y a-t-il une solution évidente ?
   — Peut-on appliquer le principe de superposition des solutions ?

On est donc souvent amené à chercher une solution particulière de (E) ou de (E_H) : pour cela on peut chercher une solution polynomiale ou développable en série entière.

3.2.2 Recherche de solutions polynomiales

Supposons que a, b et c sont des fonctions polynomiales. On souhaite déterminer une solution particulière polynomiale de (E) (ou de (E_H)).

On procède par analyse-synthèse :
— *Analyse.* On suppose que x est solution polynomiale non nulle de (E) (ou de (E_H)). On la calcule.
— *Synthèse.* On vérifie qu'on a bien obtenue une solution.

Détaillons les calculs de la partie « analyse ». On se donne une fonction polynomiale x, ce qui se note :

$$\forall t \in I, \quad x(t) = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k$$

où $d = \deg(x)$ et $a_d \neq 0$.

⚠ Ne pas oublier cette condition sur a_d qui est fondamental dans les calculs à venir.

On suppose ensuite que x est solution sur I de (E). En injectant l'expression de x dans l'équation différentielle, on arrive à l'égalité de deux fonctions polynomiales. On comparant les degrés on peut obtenir une valeur pour d (le degré de x), ce qui évite de lourds calculs. Ensuite

l'égalité de leur coefficients donne des relations sur les coefficients a_0, a_1, ..., a_d et on peut alors les calculer.

✎ ***Exemple.*** Déterminer une solution polynomiale de l'équation $(1+t^2)^2x'' - 2t(1+t^2)x' + 2(t^2-1)x = 0$.

3.2.3 Recherche de solutions développables en série entière

Supposons que a, b et c sont développables en série entière sur un intervalle de la forme $]-r,r[$ (ce qui est le cas si elles sont polynomiales). On souhaite déterminer une solution particulière de (E) (ou de (E_H)) développable en série entière sur $]-r,r[$.

On procède par analyse-synthèse :
- *Analyse.* On suppose que x est solution de (E) (ou de (E_H)). On la calcule.
- *Synthèse.* On vérifie qu'on a bien obtenue une solution.

Détaillons les calculs de la partie « analyse ». On se donne une fonction x développable en série entière, ce qui se note :

$$\forall t \in]-R,R[, \quad x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$$

où R est supposé strictement positif.

On suppose ensuite que x est solution sur I de (E). En injectant l'expression de x dans l'équation différentielle, on arrive à l'égalité de deux séries entières. L'égalité de leur coefficients donne des relations sur les coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on peut alors les calculer.

Pour la partie synthèse il faut vérifier que la série entière obtenue a un *rayon de convergence non nul*, et qu'elle est bien solution de (E) sur $]-r,r[$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer une solution sur $]0,1[$ et développable en série entière de l'équation $t(1-t)x'' + (1-3t)x' - x = 0$.

3.3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

On sait résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 2 homogènes à coefficients constants.

Équations différentielles linéaires homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et l'équation différentielle homogène :

$$(H) \ : x'' + ax' + bx = 0$$

Sous forme vectoriellisée $X' = AX$, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$ et $\chi_A(X) = X^2 + aX + b$. Résoudre l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ revient donc à déterminer les racines de χ_A, et donc le spectre de A.

- Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2 alors A est diagonalisable et,
$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t};\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$$
Si a et b sont réels, les deux complexes r_1 et r_2 sont réels et alors les solutions réelles sont :
$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t};\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$
ou conjugués : $r_1 = a + ib$, $r_2 = a - ib$ et les solutions réelles sont :
$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto Ae^{at}\cos(bt) + Be^{at}\sin(bt);\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$
- Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors A est trigonalisable,
$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto \alpha e^{rt} + \beta t e^{rt};\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$$
Si a et b sont réels, alors $r \in \mathbb{R}$ et les solutions réelles sont
$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto Ae^{rt} + Bte^{rt};\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

En particulier si $\omega > 0$, on sait écrire sans calculs les solutions des deux équations différentielles :
$$(H)\ : x'' + \omega^2 x = 0$$
$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\ ; (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$(H)\ : x'' - \omega^2 x = 0$$
$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t};\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\} = \{t \mapsto A'\operatorname{sh}(\omega t) + B'\operatorname{ch}(\omega t);\ (A', B') \in \mathbb{R}^2\}$$
Pour trouver une solution particulière on dispose du théorème suivant.

Théorème 19 – Recherche de solution particulière

On considère l'équation $(E)\ :\ x'' + ax' + bx = c(t)$.

1. Si c est une fonction constante, alors on cherche une solution constante.
2. Si c est polynomiale, alors on cherche une solution polynomiale.
3. Si $c(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}P(t)$, alors on cherche x sous la forme $x(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}t^k Q(t)$ où Q est un polynôme de même degré que P et :
   - $k = 0$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique,
   - $k = 1$ si α est racine simple de l'équation caractéristique,
   - $k = 2$ si α est racine double de l'équation caractéristique.

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :
- $x'' + x' + x = \cos(2t)$.
- $x'' - 3x' + 2x = t\operatorname{ch}(t)$.
- $x'' + x = t\sin(t)$

4 Exercices

Équations du premier ordre

Exercice 1 – Une équation intégrale

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2 – Étude qualitative

Soit $k > 0$ et $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Montrer que toute solution de l'équation différentielle

$$(E)\ : y' + ky = f(t)$$

vérifie $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 3 – Étude qualitative

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation différentielle

$$y' - y + f = 0$$

possède une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 – Raccord de solutions

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : 2t(1+t)y' + (1+t)y = 1$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Exercice 5 – Résolution avec raccord

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E) : x^3 y' - y = 1$$

Structure de l'ensemble des solutions ?

Systèmes différentiels du premier ordre

Exercice 6 – Cas où A diagonalisable

On considère le système autonome :

$$\begin{cases} x' &= 2x - y - z \\ y' &= -x + 2y - z \\ z' &= -x - y + 2z \end{cases}$$

1. Montrer que les courbes solutions sont toutes planes.
2. Résoudre le système.

Exercice 7 – Géométrie des courbes solutions

On considère le système $X' = AX$.

1. Si $\det(A) = 0$, montrer que les courbes solutions sont planes.
2. Que peut-on dire des solutions de $X' = AX$ lorsque A est une matrice nilpotente ?
3. Résoudre le système
$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x \end{cases}$$
et montrer que les courbes solutions sont sur des cercles centrés à l'origine.
4. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique réelle, montrer que les courbes solutions sont sur des sphères centrées à l'origine.

Exercice 8 – Cas où A diagonalisable

Résoudre

$$(S) : \begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x + z \\ z' &= x + y - e^{-t} \end{cases}$$

Équations différentielles du second ordre

Exercice 9 – Recherche d'une solution polynomiale

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(H)\ : (t^2+1)x'' - 2x = 0$$

On pourra chercher une solutions particulière sous forme polynômiale et vérifier que $t \longmapsto t + (t^2+1)\arctan t$ est aussi solution.

Exercice 10 – Recherche d'une solution polynomiale

Résoudre sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ l'équation différentielle

$$(H)\ : (2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$$

On pourra chercher une solutions particulière sous forme polynômiale et une de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$.

Exercice 11 – Recherche d'une solution développable en série entière

Déterminer une solution développable en série entière de l'équation différentielle

$$(E)\ : x^2y'' + 6xy' + (6-x^2)y = 1$$

Exercice 12 – Recherche d'une solution développable en série entière

Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle

$$(E)\ : (x^2+1)y'' + 4xy' + 2y = 1$$

On pourra chercher des solutions particulière sous forme de séries entières.

Exercice 13 – Changement de variable

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E)\ : y'' + (4e^t - 1)y' + 4e^{2t}y = 0$$

via le changement de variables $s = \mathrm{e}^t$.

Exercice 14 – Changement de variable

Résoudre sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$, l'équation différentielle

$$(E)\ : x'' + \tan(t)x' - \cos^2(t)x = \sin(t) - \sin^3(t)$$

avec le changement de variables $s = \sin(t)$.

Exercice 15 – Changement de fonction inconnue

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E)\ : t^2 y'' + 4ty' - (t^2 - 2)y = 0$$

avec le changement de fonctions $z(t) = t^2 y(t)$.

Intégrales à paramètre

Exercice 16 – Exemple d'intégrale à paramètre

On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par φ et en déduire l'expression de $\varphi(x)$.

Exercice 17 – Système différentiel d'intégrales à paramètre

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver un système différentiel vérifié par (u, v).
3. Le résoudre et déterminer u et v (poser $z = u + iv$).

Chapitre 19

Calcul différentiel

Sommaire

1 Fonctions de classe C^1 448

1.1 Rappels 448

1.2 Fonctions de classe C^1 449

1.3 Règle de la chaîne et applications 451

2 Applications géométriques 453

2.1 Courbes dans le plan 453

2.2 Surfaces dans l'espace 457

3 Extremums 460

3.1 Définitions 460

3.2 Points critiques 461

3.3 Recherche d'extremums sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ 462

4 Dérivées partielles d'ordre deux 463

4.1 Généralités 463

4.2 Exemples d'équations aux dérivées partielles 464

4.3 Dérivées successives d'intégrales à paramètres 465

5 Exercices 467

Dans tout le chapitre on considère des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 Fonctions de classe C^1

1.1 Rappels

On rappelle la définition d'une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1 – Continuité en un point, continuité sur un ouvert

- On dit que la fonction f est continue au point $\overrightarrow{a} \in U$ si et seulement si $\lim\limits_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{a})$;
- On dit que la fonction f est continue sur l'ouvert U si et seulement si elle est continue en tout point de U.

✎ ***Exemple.*** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

✎ ***Exemple.*** On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ mais discontinue en $(0,0)$.

⚠ La continuité en un point implique la continuité des applications partielles.
La réciproque est fausse.

On rappelle la définition des dérivées partielles en un point $\overrightarrow{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ d'un ouvert U.

Définition 2 – Dérivées partielles en $\overrightarrow{a}$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Si f est définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{a} \in U$ alors on dit que f *admet une dérivée partielle en $\overrightarrow{a}$ par rapport à x_k* lorsque l'application partielle $t \longmapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n)$ est dérivable en $\overrightarrow{a}$.
On pose alors :

$$\partial_k f(\overrightarrow{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overrightarrow{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)}{t}$$

Si f admet une dérivée partielle par rapport à x_k en tout point de l'ouvert U, on dit que $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ *existe sur* U.

Cas des fonctions de deux variables :

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$
$$\partial_2 f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

✎ ***Exemple.*** On considère la fonction $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = \ln(1 + x^2 y^2)$.
Alors h admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.

✎ ***Exemple.*** La fonction g définie précédemment admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.

⚠ L'existence des dérivées partielles n'assure donc pas la continuité !

1.2 Fonctions de classe C^1

Définition 3 – Fonctions de classe C^1

On dit que f est de classe C^1 sur U si et seulement si

- pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\partial_k f(\vec{x})$ existe en tout point $\vec{x} \in U$;
- pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction $\partial_k f$ est continue sur U.

✎ ***Exemple.*** Les fonctions polynômes à n variables (donc en particulier les projections) sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

De même que pour les fonctions numériques d'une seule variable, le caractère C^1 est préservée par opérations algébriques.

Théorème 4 – Théorèmes généraux

Soient $f, g : U \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur U. Alors

- pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe C^1 sur U ;
- la fonction $f \times g$ est de classe C^1 sur U ;
- si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^1 sur un intervalle contenant $f(U)$ alors $\varphi \circ f$ est C^1 sur U.

✎ ***Exemple.*** La fonction $r : \vec{x} \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Donner ses dérivées partielles.

✎ ***Exemple.*** Soit la fonction de deux variables définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Une fonction de classe C^1 admet un développement limité à l'ordre 1.

Théorème 5 – Développement limité à l'ordre 1

Soit une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Alors Il existe une fonction $\varepsilon : V_0 \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un voisinage de $(0,\dots,0)$ telle que :

1. $\forall \overrightarrow{a} \in U, \forall \overrightarrow{h} = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n$, tel que $\overrightarrow{a+h} \in U$,
$$f(\overrightarrow{a+h}) = f(\overrightarrow{a}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overrightarrow{a}).h_k + \left\|\overrightarrow{h}\right\|.\varepsilon(\overrightarrow{h})$$
2. $\varepsilon(\overrightarrow{h}) \underset{\overrightarrow{h}\to 0}{\longrightarrow} 0$.

On dit que la fonction f admet un *développement limité à l'ordre* 1 au point $\overrightarrow{a}$.

Pour une fonction de deux variables de classe C^1 sur U :
$$f(\overrightarrow{a+h}) = f(\overrightarrow{a}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{a}).h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{a}).h_2\right) + \left\|\overrightarrow{h}\right\|.\varepsilon(\overrightarrow{h})$$

Le terme $\left\|\overrightarrow{h}\right\|.\varepsilon(\overrightarrow{h})$ se note $\underset{\overrightarrow{h}\to\overrightarrow{0}}{=} o\left(\left\|\overrightarrow{h}\right\|\right)$ (notation de Landau).

On retrouve le théorème suivant, classique pour les fonction d'une seule variable.

Théorème 6 – Classe C^1 implique continuité

Si la fonction f est de classe C^1 sur l'ouvert U, alors elle est continue sur U.

On définit aussi la notion de différentielle d'une fonction de classe C^1.

Définition 7 – Différentielle

Si une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur l'ouvert U, pour un point $\overrightarrow{a} \in U$, on note
$$\begin{array}{rcl} df(\overrightarrow{a}) : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{h} = (h_1,\dots,h_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \partial_k f(\overrightarrow{a}).h_k \end{array}$$

$df(\overrightarrow{a})$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ qui s'appelle la *différentielle* de f au point $\overrightarrow{a} \in U$. On note :
$$df(\overrightarrow{a}).\overrightarrow{h} = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(\overrightarrow{a}).h_k$$

⚠ df est donc une application de U vers $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
$df(\vec{a})$ n'est pas un nombre mais une forme linéaire.

On définit aussi le gradient.

Définition 8 – Gradient

Si $f : U \mapsto \mathbb{R}$ est C^1 sur U et $\vec{a} \in U$, alors on appelle *gradient de f au point $\vec{a}$* le vecteur :

$$\nabla f(\vec{a}) = \big(\partial_1 f(\vec{a}), \dots, \partial_n f(\vec{a})\big)$$

Gradient et différentielle sont reliés par le théorème suivant.

Théorème 9 – Lien entre gradient et différentielle

Pour tout $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$df(\vec{a}).\vec{h} = \left\langle \nabla f(\vec{a}), \vec{h} \right\rangle$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

On remarque qu'on aurait pu définir le gradient via le théorème de Riesz de représentation des formes linéaires d'un espace euclidien.

✎ ***Exemple.*** Soit $f(x, y) = x^2 e^y + \sin(xy)$ et $\vec{a} = (0, 1)$. Calculer $df(\vec{a})$ et $\nabla f(\vec{a})$.

Pour une fonction de classe C^1 sur un ouvert U, le développement limité en $a \in U$ à l'ordre 1 s'écrit donc :

$$f(\overrightarrow{a+h}) = f(\vec{a}) + df(\vec{a}).\vec{h} + \left\|\vec{h}\right\|.\varepsilon(\vec{h}) \underset{h\to 0}{=} f(\vec{a}) + \left\langle \nabla f(\vec{a}), \vec{h} \right\rangle + o\left(\left\|\vec{h}\right\|\right)$$

✎ ***Exemple.*** Écrire ce DL pour la fonction f de l'exemple précédent.

1.3 Règle de la chaîne et applications

On définit la notion de dérivée pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 10 – Dérivée d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

On note $\vec{\phi} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction définie par $\vec{\phi}(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$ où $x_1, \dots, x_n$ sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction $\vec{\phi}$ est *dérivable* sur I lorsque les fonctions $x_1, \dots, x_n$ le sont. Dans ce cas on pose :

$$\forall t \in I, \quad \vec{\phi}'(t) = \big(x_1'(t), \dots, x_n'(t)\big)$$

Le résultat principal du paragraphe est le suivant.

Théorème 11 – Règle de la chaîne

Soient une fonction de n variables $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et n fonctions d'une seule variable $x_1, \dots, x_n : I \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un intervalle I.
On note $\overrightarrow{\phi} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction définie par $\overrightarrow{\phi}(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$ et on suppose que $\forall t \in I,\ \overrightarrow{\phi}(t) \in U$.
On peut alors définir la fonction d'une seule variable :

$$\begin{array}{rcl} g : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) = f\big(\phi(t)\big) \end{array}$$

Cette fonction g est de classe C^1 sur l'intervalle I et

$$\forall t \in I, \quad \boxed{g'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big).x_k'(t) = \left\langle \nabla f\big(\overrightarrow{\phi}(t)\big), \overrightarrow{\phi}'(t) \right\rangle = df_{\phi(t)}\big(\overrightarrow{\phi}'(t)\big)}$$

Pour une fonction de deux variables, la dérivée de $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ est :

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big).x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big).y'(t)$$

✎ ***Exemple.*** Soit $f(x, y) = x^2 + xy + e^{x-y}$ et $g(t) = f(e^t, t^2)$. Calculer $g'(0)$.

✎ ***Exemple.*** Appliquer la formule précédente pour dériver $g(t) = f(\overrightarrow{a} + t.\overrightarrow{h})$, où $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n$.

On en déduit le corollaire suivant de dérivation d'une composée de deux variables.

Corollaire 12 – Dérivée d'une composée de deux variables

Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On se donne trois fonctions de deux variables $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $x : V \longrightarrow \mathbb{R}$ et $y : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\forall (u, v) \in V,\ \big(x(u, v), y(u, v)\big) \in U$.
On peut alors définir la fonction de deux variables :

$$\begin{array}{rcl} g : V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & g(u, v) = f\big(x(u, v), y(u, v)\big) \end{array}$$

Alors g est de classe C^1 sur V et pour tout $(u, v) \in V$:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0).\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)\big) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0).\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)\big)$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0).\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)\big) + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0).\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)\big)$$

✎ ***Exemple.*** **Coordonnées polaire**. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On pose $g(r, \theta) = f\big(r.\cos(\theta), r.\sin(\theta)\big)$ pour $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$. Alors g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$

et :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta).\frac{\partial f}{\partial x}\big(r.\cos(\theta), r.\sin(\theta)\big) + \sin(\theta).\frac{\partial f}{\partial y}\big(r.\cos(\theta), r.\sin(\theta)\big)$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r.\sin(\theta).\frac{\partial f}{\partial x}\big(r.\cos(\theta), r.\sin(\theta)\big) + r.\cos(\theta).\frac{\partial f}{\partial y}\big(r.\cos(\theta), r.\sin(\theta)\big)$$

On en déduit aussi une caractérisation des fonctions constantes.

Définition 13 – Partie convexe

On dit que U est une *partie convexe* de $\mathbb{R}^n$ lorsque, pour tout $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \in U^2$:

$$\forall t \in [0,1], \quad \overrightarrow{a} + t.(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \in U$$

Corollaire 14 – Caractérisation des fonctions constantes

Si U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^1(U,\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \overrightarrow{x} \in U, \quad \nabla f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$$

alors f est constante sur U.

Ce résultat généralise le résultat bien connu pour les fonctions d'une seule variable.

2 Applications géométriques

2.1 Courbes dans le plan

Dans cette section on munit le plan d'un repère orthonormé $\big(0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\big)$.

Définition 15 – Équation cartésienne d'une courbe plane

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
L'ensemble $\mathscr{C}$ des points du plan $M(x,y)$ tels que $f(x,y) = 0$ est appelé *courbe plane d'équation cartésienne* $f(x,y) = 0$.

⚠ Sans hypothèse supplémentaire, $\mathscr{C}$ n'est pas une courbe au sens « usuel ». Par exemple si f est la fonction nulle, $\mathscr{C}$ n'est pas une courbe mais le plan tout entier.

✎ ***Exemple.*** Soit $(a,b) \neq (0,0)$. $ax + by + c = 0$ est l'équation d'une droite dirigée par le vecteur $\overrightarrow{d}(-b,a)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a,b)$.

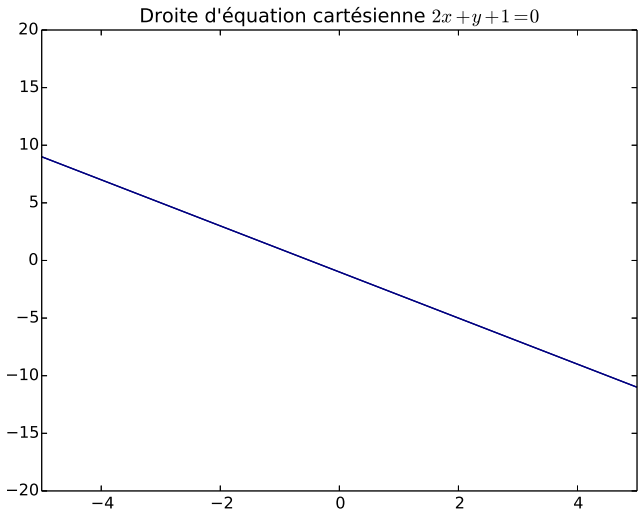
Le script Python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x,y):
    return 2*x+y

x=np.linspace(-5,5,50)
y=np.linspace(-20,20,50)
X,Y=np.meshgrid(x,y)
plt.contour(X,Y,f(X,Y),levels=[-1])
plt.title(unicode("Droite d'équation cartésienne $2x+y+1=0$",'utf-8'))
plt.show()
```

donne la figure :



✎ ***Exemple.*** Soit $r > 0$. $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$ est l'équation du cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon r.

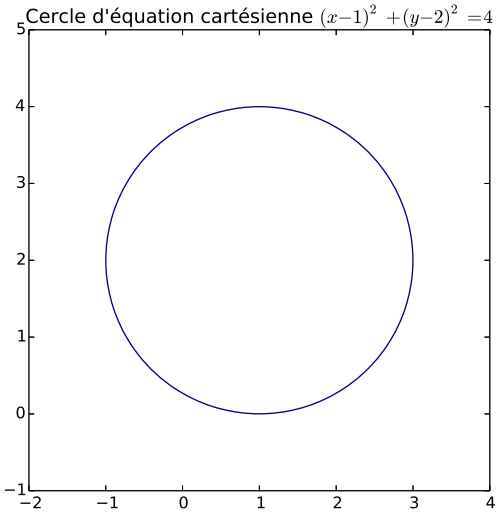
Le script Python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x,y):
    return (x-1)**2+(y-2)**2

x=np.linspace(-2,4,50)
y=np.linspace(-1,5,50)
X,Y=np.meshgrid(x,y)
plt.contour(X,Y,f(X,Y),levels=[4])
plt.title(unicode("Cercle d'équation cartésienne $(x-1)^2+(y-2)^2=4$",'utf-8'))
plt.axis('scaled') #repère orthonormé
plt.show()
```

donne la figure :



✎ ***Exemple.*** Soient $a \neq 0$ et $b \neq 0$. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ est l'équation de l'ellipse centré en $O(0,0)$ d'axes parallèles à (Ox) et $(0y)$ et de longueurs égales à $2a$ et $2b$.

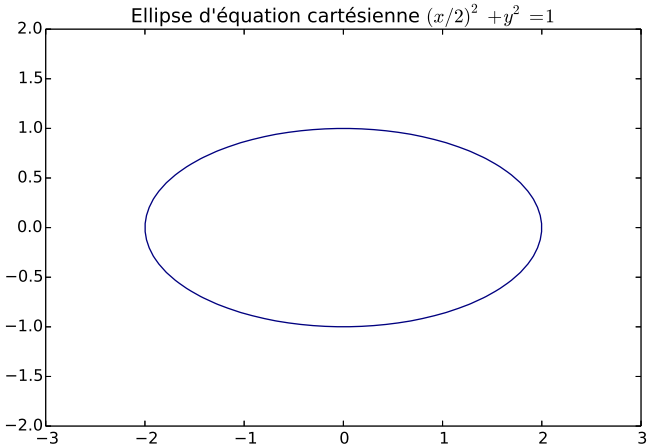
Le script Python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x,y):
    return (x/2.)**2+y**2

x=np.linspace(-3,3,50)
y=np.linspace(-2,2,50)
X,Y=np.meshgrid(x,y)
plt.contour(X,Y,f(X,Y),levels=[1])
plt.title(unicode("Ellipse d'équation cartésienne $(x/2)^2+y^2=1$",'utf-8'))
plt.axis('scaled')
plt.show()
```

donne la figure :



Définition 16 – Ligne de niveau

Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, alors la courbe plane d'équation cartésienne $f(x,y) = \lambda$ (ou encore $g(x,y) = 0$ avec $g(x,y) = f(x,y) - \lambda$) est une courbe plane, appelée *ligne de niveau de* f.

Le théorème suivant (admis) garantit que sous certaines hypothèses sur f, la courbe $\mathscr{C}$ est bien une courbe au sens « usuel ».

Théorème 17 – Théorème des fonctions implicites

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan tel que :

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \in U \\ f(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$$

Alors il existe un intervalle I centré en x_0, un intervalle J centré en y_0 et une fonction $\varphi : I \longrightarrow J$ de classe C^1 tels que $I \times J \subseteq U$ et :

$$\forall (x,y) \in I \times J, \quad f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x)$$

Donc si le gradient n'est pas parallèle à l'axe des abscisses, alors *localement* la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe d'une fonction φ.
⚠ La fonction φ dépend du point M_0 choisi au départ.

Remarque. Si dans les hypothèses $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ est remplacé par $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, alors dans la conclusion $y = \varphi(x)$ est remplacé par $x = \varphi(y)$.

La fonction φ est appelé *paramétrage local.*

Définition 18 – Point régulier

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de la courbe $\mathscr{C}$, ie tel que $(x_0, y_0) \in U$ et $f(x_0, y_0) = 0$.
   On dit que M_0 est un *point régulier* lorsque $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
2. On dit que la courbe $\mathscr{C}$ est *régulière* lorsque tous ses points sont réguliers.

En un point régulier le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'un paramétrage local. On en déduit l'équation de la tangente en ce point.

Théorème 19 – Équation de la tangente en un point régulier

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point régulier de $\mathscr{C}$.
Alors l'équation de la tangent à $\mathscr{C}$ en M_0 est donnée par :

$$(x - x_0).\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0).\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

On en déduit la propriété suivante du gradient.

Corollaire 20 – Le gradient est orthogonal aux lignes de niveaux

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point régulier de la ligne de niveau $f(x, y) = \lambda$.
Alors le gradient en ce point est orthogonal à la ligne de niveau, orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.
En particulier le gradient en un point de $\mathscr{C}$ est orthogonal à la tangente à $\mathscr{C}$.

✎ ***Exemple.*** Montrer qu'une ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est régulière et donner l'équation de la tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$.

2.2 Surfaces dans l'espace

Dans cette section on munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Définition 21 – Équation cartésienne d'une surface

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$.
L'ensemble $\mathscr{S}$ des points de l'espace $M(x, y, z)$ tels que $f(x, y, z) = 0$ est appelé *surface d'équation cartésienne* $f(x, y, z) = 0$.

⚠ Sans hypothèse supplémentaire, $\mathscr{S}$ n'est pas une surface au sens « usuel ». Par exemple si f est la fonction nulle, $\mathscr{S}$ n'est pas une surface mais l'espace tout entier.

✎ ***Exemple.*** Soit $r > 0$. $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = r^2$ est l'équation de la sphère de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon $r > 0$.

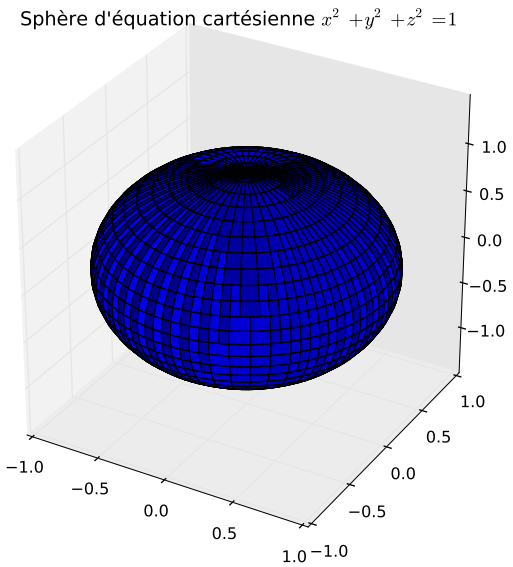
Le script Python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

ax = Axes3D(plt.figure())
theta = np.linspace(0, 2 * np.pi, 50)
```

```
phi = np.linspace(0, 2 * np.pi, 50)
X = np.outer(np.cos(phi),np.sin(theta))
Y = np.outer( np.sin(phi),np.sin(theta))
Z = np.outer(np.ones(np.size(phi)),np.cos(theta))
ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1,cstride=1)#,cmap=cm.jet)
ax.set_zlim3d(-1.45,1.45)
plt.axis('scaled')
plt.title(unicode("Sphère d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2=1$",'utf-8'))
plt.show()
```

donne la figure :



Définition 22 – Surface représentative d'une fonction de deux variables

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
La surface d'équation cartésienne $f(x,y) = z$ (ie $g(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$) est appelée *surface représentative de f*.

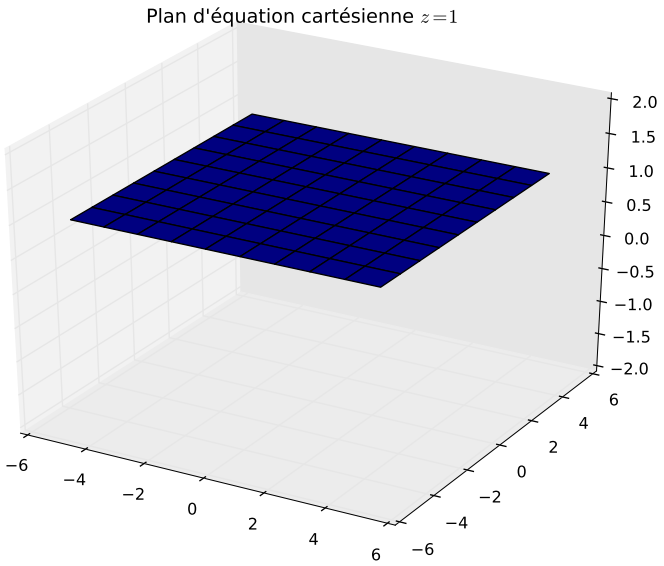
✎ ***Exemple.*** Soit $(a,b,c) \neq (0,0)$. $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a,b,c)$.

Le script Python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
def f(x,y):
    return 1
ax = Axes3D(plt.figure())
X = np.linspace(-5, 5, 10)
Y = np.linspace(-5, 5, 10)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z = f(X,Y)
ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1)
```

```
ax.set_zlim(-2,2)
plt.title(unicode("Plan d'équation cartésienne $z=1$",'utf-8'))
plt.show()
```

donne la figure :



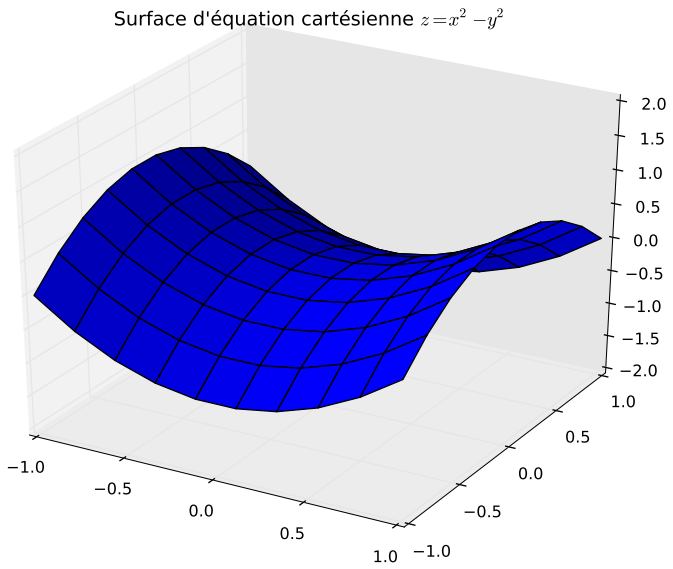
✎ ***Exemple.*** Le script Python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def f(x,y):
    return x**2-y**2

ax = Axes3D(plt.figure())
X = np.linspace(-1, 1, 10)
Y = np.linspace(-1, 1, 10)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z = f(X,Y)
ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1)
ax.set_zlim(-2,2)
plt.title(unicode("Surface d'équation cartésienne $z=x^2-y^2$",'utf-8'))
plt.show()
```

donne la figure :



Définition 23 – Point régulier

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$.

1. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de la courbe $\mathscr{S}$, ie tel que $(x_0, y_0, z_0) \in U$ et $f(x_0, y_0, z_0) = 0$.
   On dit que M_0 est un *point régulier* lorsque $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0)$.
2. On dit que la courbe $\mathscr{S}$ est *régulière* lorsque tous ses points sont réguliers.

En un point régulier on peut définir la notion de plan tangent.

Définition 24 – Plan tangent en un point régulier

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$.
Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier de $\mathscr{S}$.
Le *plan tangent* à $\mathscr{S}$ en M_0 est défini comme étant le plan passant par M_0 et de vecteur normal $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$.

Par définition, la gradient est donc orthogonal au plan tangent. De plus le plan tangent en M_0 a pour équation :

$$(x - x_0).\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0).\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0).\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

3 Extremums

3.1 Définitions

Donnons la définition des extremums globaux.

Définition 25 – Extremum global

Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^n$.

1. On dit que f a un *maximum global* (ou *absolu*) en $\overrightarrow{a} \in A$ lorsque :
$$\forall \overrightarrow{x} \in A, \quad f(\overrightarrow{x}) \leq f(\overrightarrow{a})$$
2. On dit que f a un *minimum global* (ou *absolu*) en $\overrightarrow{a} \in A$ lorsque :
$$\forall \overrightarrow{x} \in A, \quad f(\overrightarrow{x}) \geq f(\overrightarrow{a})$$
3. On dit que f a un *extremum global* (ou *absolu*) en $\overrightarrow{a} \in A$ lorsque f a un maximum ou un minimum global en $\overrightarrow{a}$.

Donnons ensuite la définition des extremums locaux.

Définition 26 – Extremum local

Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^n$.

1. On dit que f a un *maximum local* en $\overrightarrow{a} \in A$ lorsque :
$$\exists \delta > 0 / \forall \overrightarrow{x} \in A \cap B(\overrightarrow{a}, \delta), \quad f(\overrightarrow{x}) \leq f(\overrightarrow{a})$$
2. On dit que f a un *minimum local* en $\overrightarrow{a} \in A$ lorsque :
$$\exists \delta > 0 / \forall \overrightarrow{x} \in A \cap B(\overrightarrow{a}, \delta), \quad f(\overrightarrow{x}) \geq f(\overrightarrow{a})$$
3. On dit que f a un *extremum local* en $\overrightarrow{a} \in A$ lorsque f a un maximum ou un minimum local en $\overrightarrow{a}$.

On rappelle que $B(\overrightarrow{a}, \delta)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon δ :
$$B(\overrightarrow{a}, \delta) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n / \left\| \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a} \right\| < \delta\}$$
et $\|.\|$ désigne n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^n$ (elles sont toutes équivalentes).

3.2 Points critiques

Définition 27 – Point critique

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et une fonction $f \in C^1(U, \mathbb{R})$.
On dit que $\overrightarrow{a} \in U$ est un *point critique* de la fonction f lorsque $\nabla f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$.

$\overrightarrow{a}$ est un point critique si, et seulement si, toutes les dérivées partielles de f s'annulent au point $\overrightarrow{a}$.

Les points critiques sont des points « candidats » pour la recherche d'extremums locaux.

Théorème 28 – Extrémum local intérieur $\Longrightarrow$ point critique

Soit $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ une fonction numérique et $\overrightarrow{a} \in U$.
Si f présente un extrémum local au point $\overrightarrow{a}$, alors $\overrightarrow{a}$ est un point critique de f.

⚠ Faire attention que ce théorème ne s'applique que sur un *ouvert*.

Pour déterminer les extremums sur une partie ouverte, on procède donc ainsi :

- on détermine les points critiques,
- pour savoir si ce sont des extremums, on détermine pour chaque point critique $\overrightarrow{a}$ le signe (global ou au voisinage de 0) de la fonction $\delta(\overrightarrow{h}) = f(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{h}) - f(\overrightarrow{a})$:
  - ⋆ si $\delta(\overrightarrow{h}) \geq 0$ il s'agit d'un maximum,
  - ⋆ si $\delta(\overrightarrow{h}) \geq 0$ il s'agit d'un minimum,
  - ⋆ si $\delta(\overrightarrow{h})$ change de signe il ne s'agit pas d'un extremum. On dit que $\overrightarrow{a}$ est un *point col* ou *point selle*.

3.3 Recherche d'extremums sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$

On rappelle le théorème suivant.

Théorème 29 – Théorème des bornes atteintes

Si $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ est *continue* sur une partie K de $\mathbb{R}^n$ telle que K est *fermée et bornée*, alors f est bornée et ses bornes sont atteintes.
Précisons, cela signifie que :

$$\exists \overrightarrow{\alpha} \in K / \ f(\overrightarrow{\alpha}) = \min_K f \qquad \text{et} \qquad \exists \overrightarrow{\beta} \in K / \ f(\overrightarrow{\beta}) = \max_K f$$

donc :

$$\forall \overrightarrow{x} \in A, \quad f(\overrightarrow{\alpha}) \leq f(\overrightarrow{x}) \leq f(\overrightarrow{\beta})$$

Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie fermée bornée et $f : K \mapsto \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur K de classe C^1 sur l'ouvert $U = \overset{\circ}{K}$.
On sait que f possède un maximum et un minimum global. Les points $\overrightarrow{a}$ où f atteint ses bornes sont à chercher :

- parmi les points critiques *intérieurs* à K ;
- sur la frontière de K.

✎ ***Exemple.*** Déterminer les extremums globaux de f définie sur $[0,1]^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

4 Dérivées partielles d'ordre deux

4.1 Généralités

Donnons la définition d'une dérivée partielle d'ordre deux pour une fonction de classe C^1.

Définition 30 – Dérivée partielle d'ordre deux

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f$ existe, est continue sur U et est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f$ admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j}$ alors cette dérivée est appelée *dérivée partielle d'ordre* 2 *de* f et est notée :

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \partial_{j,i} f$$

et si $i = j$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \partial_{i,i} f$$

Pour une fonction de deux variables, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ signifie qu'on dérive d'abord par à y et ensuite par rapport à x.

On définit ensuite la notion de fonction de plusieurs variables de classe C^2 sur un ouvert.

Définition 31 – Fonction de classe C^2 sur un ouvert

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.
On dit que f est de classe C^2 sur U lorsque les n fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i \in [\![1, n]\!]$, sont de classe C^1 sur U.

On peut reformuler cette définition.

Proposition 32 – Fonction de classe C^2 sur un ouvert

f est de classe C^2 sur U lorsque toutes ses dérivées partielles secondes existent et sont continues sur U.

✎ ***Exemple.*** Les fonctions polynômes à n variables (donc en particulier les projections) sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

Le résultat principal du paragraphe est le suivant.

Théorème 33 – Théorème de Schwarz

Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert U.
Alors en tout point $\vec{a} \in U$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{a})$$

✎ ***Exemple.*** Soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Étudier l'existence des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Dans le cas d'une fonction de deux variables de classe C^2, on définit la *matrice Hessienne au point* (a,b) :

$$H(f)(a,b) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres donnent des informations sur les extremums de f mais ce n'est pas au programme...

4.2 Exemples d'équations aux dérivées partielles

Quelques équations aux dérivées partielles fondamentales. La difficulté réside dans la géométrie du domaine U. On considère un pavé $U =]a,b[\times]c,d[$. On se limitera aux cas des fonctions de deux variables.

Théorème 34 – $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$

$$(E_1) \ : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

Une fonction $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ est solution de (E_1) si et seulement s'il existe une fonction d'une variable $k \in C^1(]c,d[,\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in U$, $f(x,y) = k(y)$.

Théorème 35 – $\dfrac{\partial f}{\partial x} = h$

Soit $h \in C^0(]a,b[,\mathbb{R})$.

$$(E_2) \ : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(x)$$

Une fonction $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ est solution de (E_2) si et seulement s'il existe une fonction d'une variable $k \in C^1(]c,d[,\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = H(x) + k(y)$ où H est une primitive de h sur $]a,b[$.

Théorème 36 – $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

$$(E_3)\ : \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Une fonction $f \in C^2(U,\mathbb{R})$ est solution de (E_3) si et seulement s'il existe deux fonctions $H \in C^2(]a,b[,\mathbb{R})$ et $K \in C^2(]c,d[,\mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y) \in U$,

$$f(x,y) = H(x) + K(y)$$

Théorème 37 – $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

$$(E_4)\ : \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Une fonction $f \in C^2(U,\mathbb{R})$ est solution de (E_4) si et seulement s'il existe une fonction $\phi \in C^2(]a,b[,\mathbb{R})$ et $\psi \in C^2(]a,b[,\mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y) \in U$,

$$f(x,y) = y\phi(x) + \psi(x)$$

En général, on utilise un changement de variables pour se ramener à une EDP plus simple.

✎ ***Exemple.*** Déterminer les fonctions C^2 sur $\mathbb{R}^2$ solutions de l'EDP :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

en utilisant le changement de variable $u = x + y$ et $v = x + \frac{1}{2}y$.

✎ ***Exemple.*** On considère l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \leq 0\}$.
Résoudre sur U l'équation aux dérivées partielles :

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

en passant en coordonnées polaires.

4.3 Dérivées successives d'intégrales à paramètres

Dans ce paragraphe, I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Par récurrence, on obtient un théorème qui permet de montrer qu'une intégrale à paramètre définie une fonction de classe C^n.

Théorème 38 – Dérivations successives sous le signe somme

On considère une fonction

$$\begin{array}{rcl} f : I \times J & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$$

et on suppose que :

- La fonction $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ existe et est continue sur I par rapport à la première variable x.
- Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, les fonctions $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ sont continues par morceaux et intégrables sur J par rapport à la seconde variable t.
- La fonction $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ est continue par morceaux par rapport à la deuxième variable t ie que, pour tout $x \in I$, $t \longmapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
- **Hypothèse de domination locale.** Pour tout segment $K = [a,b] \subseteq I$, il existe une fonction $\varphi_K : J \mapsto \mathbb{R}$, *indépendante de x* qui est *continue par morceaux* et *intégrable* sur J telle que :

$$\forall x \in [a,b], \forall t \in J, \quad \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \right| \leq \varphi_K(x)$$

Alors :

1. Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,.)$ est intégrable sur J.
2. La fonction

$$F : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

   est de classe C^n sur I.
3. $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\forall x \in I$,

$$F^{(k)}(x) = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. Si J est un segment alors les fonctions de domination peuvent être choisies constantes.

✎ ***Exemple.*** On considère la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^\pi \cos\big(x\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta$$

Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $xF''(x) + F'(x) + xF(x) = 0$.

5 Exercices

Dérivées partielles

Exercice 1 – Fonction de classe C^1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right).\ln\left(x^2 + y^2\right)$.

1. Est-il possible de prolonger f par continuité en $(0,0)$?
2. Établir que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et, sans les calculer, vérifier que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$.
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 – Inégalité des accroissements finis

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe. Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction C^1. On suppose que le gradient de f est borné sur U :

$$\exists K \geq 0 \text{ tel que } \forall x \in U, \quad \left\|\nabla f(x)\right\| \leq K$$

1. Soit $(x,y) \in U^2$. Posons $\begin{array}{rcl} \phi : [0,1] & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & (1-t)x + ty \end{array}$ et

$$\begin{array}{rcl} \psi = f \circ \phi : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f((1-t)x + ty) \end{array}$$

   À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$|\psi'(t)| \leq K \left\|y - x\right\|$$

2. En déduire que f est K-lipschitzienne sur U.

Exercice 3 – Laplacien en polaires

Soit f une fonction numérique de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et telle que $\Delta f = 0$.
Pour $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ on pose : $g(r,\theta) = f\left(r.\cos(\theta), r.\sin(\theta)\right)$.
Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de g.

Exercice 4 – Fonctions homogènes

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et *homogène de degré* $n \in \mathbb{N}$ ie telle

que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(tx,ty) = t^n.f(x,y)$$

1. Montrer que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = n.f$.
2. On suppose $n \geq 1$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont elles aussi homogènes.

Exercice 5 – Fonctions harmoniques

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, et $g :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(r,t) = f(r.\cos t, r.\sin t)$.

1. Vérifier que $r.\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r.\dfrac{\partial g}{\partial r}\right) = -\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}$.
2. Montrer que $\varphi : r \longmapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r.\cos t, r.\sin t)\mathrm{d}t$ est C^2 sur $\mathbb{R}$ et que $\left(r.\varphi'(r)\right)' = 0$.
3. Conclure que φ est constante.

Recherche d'extremums

Exercice 6 – Recherche d'extremums

Trouver les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x,y) \longmapsto x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$.

Exercice 7 – Recherche d'extremums

Trouver les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x,y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Exercice 8 – Recherche d'extremums

Soit $f : (x,y) \longmapsto xy(1-x-y)$ définie sur $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle/ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 1\right\}$.

1. Justifier que f possède un maximum à l'intérieur de T.
2. Déterminer sa valeur.

Exercice 9 – Recherche d'extremums

Déterminer $\displaystyle\sup_{[0,\frac{\pi}{2}]^2} \sin(x).\sin(y).\sin(x+y)$.

Exercice 10 – Recherche d'extremums

On considère une boîte sans couvercle de forme parallépipédique de volume 1. Trouver les dimensions de la boîte pour que la somme des aires des 5 faces soit minimale.

Équations aux dérivées partielles

Exercice 11 – Changements de variables affines

1. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'EDP :
$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
en utilisant le changement de variables $u = 2x + y$, $v = 3x + y$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'EDP :
$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
par le changement de variables $u = x + y$, $v = 2x + 3y$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'EDP :
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$
par le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$.

Exercice 12 – Changements de variables affines

1. Résoudre sur $U = \mathbb{R}^2$ l'équation des ondes :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
en utilisant le changement de variables $x = u + v$, $y = u - v$.
2. Résoudre sur $U =]0, +\infty[^2$ l'équation
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
par le changement de variables $x = e^u$, $y = e^v$.

Exercice 13 – Changements de variables affines

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'EDP :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

en utilisant le changement de variables $u = x$, $v = x + y$.

Exercice 14 – Utilisation des coordonnées polaires

1. En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions de l'EDP :
$$x.\frac{\partial f}{\partial x} + y.\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
2. En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions de l'EDP :
$$x.\frac{\partial f}{\partial x} + y.\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$$
3. En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions de l'EDP : $y.\dfrac{\partial f}{\partial x} - x.\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$.

Exercice 15 – Utilisation des coordonnées polaires

1. Résoudre sur $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^-$: $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.
On pourra utiliser les coordonnées polaires.
2. Résoudre sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^-$: $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y) - (x^2 + y^2)$.
On pourra utiliser les coordonnées polaires en posant $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, puis poser $h(r, \theta) = \dfrac{1}{r}g(r, \theta)$.

Surfaces

Exercice 16 – Étude d'une surface

Montrer que la surface d'équation $xy + xz + yz + 2x + 2y - z = 0$ est régulière en $(0, 0, 0)$ et donner l'équation du plan tangent en ce point.

Exercice 17 – Étude d'une surface

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$.
Déterminer les plans tangents à la surface $\mathscr{S}$ parallèles au plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Intégrales à paramètre

Exercice 18 – [

Un calcul de transformée de Fourier (SI)]
On considère la fonction définie pour $x > 0$ par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et vérifier que $F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 19 – O

n pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,+\infty[$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Chapitre 20

Fonctions vectorielles et arcs paramétrées

Sommaire

1 Dérivabilité des fonctions vectorielles 474

1.1 Généralités 474

1.2 Opérations sur les fonctions dérivables 475

1.3 Fonctions de classe C^k 477

2 Arcs paramétrés 478

2.1 Généralités 478

2.2 Tracé d'un arc paramétré plan 479

2.3 Longueur d'un arc paramétré de classe C^1 486

2.4 Courbes tracées sur une surface 486

3 Exercices 488

1 Dérivabilité des fonctions vectorielles

Dans tout le chapitre on considère des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. De telles fonctions seront appelées « fonctions vectorielles ».

1.1 Généralités

On commence par la dérivabilité en un point.

Définition 1 – Dérivabilité en un point

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $a \in I$.
On dit que f est *dérivable* en a si il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \ell$$

Dans ce cas ℓ est appelé *dérivée* de f en a, notée $f'(a)$.

À toutes fins utiles, rappelons que $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} = \ell$ signifie que

$$\lim_{t \to a} \left\| \frac{f(t) - f(a)}{t - a} - \ell \right\| = 0$$

où $\|.\|$ désigne n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^n$ (puisqu'elles sont toutes équivalentes !). Rappelons aussi que la limite ℓ est unique.

Pour $n = 1$ on retrouve la notion de dérivabilité pour une fonction numérique, étudiée en MPSI/PCSI. On utilise souvent cette définition pour des fonctions définies par morceaux.

✎ ***Exemple.*** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La dérivabilité peut être caractérisée par un développement limité d'ordre 1.

Si $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie $\lim\limits_{t \to a} \varepsilon(t) = 0_{\mathbb{R}^n}$ alors on le note $\varepsilon(t) \underset{t \to a}{=} o(1)$. La fonction $(t - a).\varepsilon(t)$ est notée $o(t - a)$ ou encore $(t - a).o(1)$.

Théorème 2 – Caractérisation de la dérivabilité par un développement limité d'ordre 1

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $a \in I$.
Alors f est dérivable en a si, et seulement si, il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(t) \underset{t \to a}{=} f(a) + (t - a).\ell + o(t - a)$$

Dans ce cas : $f'(a) = \ell$.

On en déduit le lien entre dérivabilité et continuité.

Corollaire 3 – Lien entre dérivabilité et continuité

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $a \in I$.
Si f est dérivable au point a, alors f est continue au point a.

⚠Il existe des fonction continue en a mais non dérivable en a.
Considérer par exemple la fonction valeur absolue en 0.

On définit ensuite la dérivabilité sur un intervalle.

Définition 4 – Dérivabilité sur un intervalle

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
On dit que f est *dérivable* sur I lorsque f est dérivable en tout point de I.

Un fonction dérivable sur I est en particulier continue sur I.

Si on se donne une base de $\mathbb{R}^n$, on peut se ramener à la dérivabilité de n fonctions numériques.

Théorème 5 – Dérivabilité des fonctions coordonnées

Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est un base de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ alors on note $f_1, \dots, f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées associées :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)_{\mathscr{B}}$$

Alors f est dérivable sur I si, et seulement si, $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables sur I.
Dans ce cas :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = \big(f_1'(t), \dots, f_n'(t)\big)_{\mathscr{B}}$$

Interprétation géométrique et cinématique. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ alors il existe deux fonctions $x, y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Une telle fonction f permet de modéliser le déplacement d'un point dans le plan au cours du temps.
La dérivée $f'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)$ représente le vecteur vitesse au temps t.

1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

La plupart des « théorèmes généraux » sur les fonction numériques dérivables se généralisent au cas des fonctions à valeurs vectorielles.

Théorème 6 – Combinaison linéaire d'applications dérivables

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Si f et g sont dérivables sur I alors $\lambda.f+\mu.g$ l'est aussi et :

$$\forall t\in I,\quad (\lambda.f+\mu.g)'(t)=\lambda.f'(t)+\mu.g'(t)$$

Si on note $D(I,\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions vectorielles définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors le théorème précédent montre que $D(I,\mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et que l'application $f\longmapsto f'$ est linéaire.

Il existe plusieurs façons de composer des fonctions vectorielles. Elles sont détaillées dans les théorèmes suivants.

Théorème 7 – Dérivation et applications linéaires

Soient $f:I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle dérivable sur I, et $L:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^p$ une application linéaire.
Alors, la fonction $L\circ f:I\longrightarrow\mathbb{R}^p$ définie par $(L\circ f)(t)=L\big(f(t)\big)$, est dérivable sur I et :

$$\forall t\in I,\quad (L\circ f)'(t)=L\big(f'(t)\big)=\big(L\circ(f')\big)(t)$$

$L\circ f$ est aussi notée $L(f)$. La formule précédente devient : $\big(L(f)\big)'(t)=L\big(f'(t)\big)$.

Théorème 8 – Dérivation et applications bilinéaires

Soient $f:I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ et $g:I\longrightarrow\mathbb{R}^p$ deux fonctions vectorielles dérivables sur I, et $B:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}^q$ une application bilinéaire.
Alors, la fonction $B(f,g):I\longrightarrow\mathbb{R}^q$ définie par $B(f,g)(t)=B\big(f(t),g(t)\big)$, est dérivable sur I et :

$$\forall t\in I,\quad B(f,g)'(t)=B\big(f'(t),g(t)\big)+B\big(f(t),g'(t)\big)$$

✎ ***Exemple.*** Si $\lambda:I\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction numérique dérivable et $\overrightarrow{f}:I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle dérivable alors la fonction $\lambda.\overrightarrow{f}:I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ est aussi dérivable sur I et :

$$\forall t\in I,\quad (\lambda.\overrightarrow{f})'(t)=\lambda'(t).\overrightarrow{f}(t)+\lambda(t).\overrightarrow{f}'(t)$$

✎ ***Exemple.*** Si $f,g;I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ sont deux fonctions dérivables sur I et si $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, alors la fonction numérique $\langle f,g\rangle:t\longmapsto\langle f(t),g(t)\rangle$ est dérivable sur I et :

$$\forall t\in I,\quad \langle f,g\rangle'(t)=\langle f'(t),g(t)\rangle+\langle f(t),g'(t)\rangle$$

Application. Si $f:I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle dérivable telle que l'application $\|f\|$ est constante (non nulle), alors pour tout $t\in I$, $f(t)\perp f'(t)$.

✎ ***Exemple.*** Si $f,g;I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ sont deux fonctions dérivables sur I, alors la fonction numérique $f\wedge g:t\longmapsto f(t)\wedge g(t)$ est dérivable sur I et :

$$\forall t\in I,\quad (f\wedge g)'(t)=f'(t)\wedge g(t)+f(t)\wedge g'(t)$$

✎ ***Exemple.*** Si $f, g; I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sont deux fonctions dérivables sur I et si $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, alors la fonction numérique $\det_{\mathscr{B}}(f,g) : t \longmapsto \det_{\mathscr{B}}\big(f(t), g(t)\big)$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \quad \big(\det_{\mathscr{B}}(f,g)\big)'(t) = \det_{\mathscr{B}}\big(f'(t), g(t)\big) + \det_{\mathscr{B}}\big(f(t), g'(t)\big)$$

Autrement dit si $x_1, x_2, y_1, y_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions numériques dérivables sur I alors

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}'(t) = \begin{vmatrix} x_1'(t) & y_1(t) \\ x_2'(t) & y_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1'(t) \\ x_2(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

Théorème 9 – Composée d'applications dérivables

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $\overrightarrow{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.
Alors la fonction $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \quad \big(\overrightarrow{f} \circ \varphi\big)'(t) = \varphi'(t).\overrightarrow{f}'\big(\varphi(t)\big)$$

1.3 Fonctions de classe C^k

Dans ce paragraphe k désigne un entier naturel.

Définition 10 – Dérivée k-ième

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.
Si f est k fois dérivable sur I, on définit la dérivée k-ième par récurrence :

$$f^{(k)} = \begin{cases} f & \text{si } k = 0 \\ \big(f^{(k-1)}\big)' & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

On montre facilement que si $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ vérifie $p + q = k$, alors $f^{(k)} = \big(f^{(p)}\big)^{(q)} = \big(f^{(q)}\big)^{(p)}$.

Définition 11 – Fonctions de classe C^k ou C^∞

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

1. On dit que f est de classe C^k sur I si f est k fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est continue sur I.
2. On dit que f est de classe C^∞ sur I lorsque f est de classe C^k sur I, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Il est clair que :
• si f est de classe C^k sur I, alors pour tout $p \in [\![0,k]\!]$, $f^{(p)}$ est continue sur I ;
• si f est de classe C^k sur I, alors pour tout $p \in [\![0,k]\!]$, f est de classe C^p sur I.

Dans la suite on note $C^k(I,\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Les « théorèmes généraux » sur les fonctions dérivables s'adaptent aux fonctions de classe C^k.

Théorème 12 – Combinaison linéaire de fonctions de classe C^k

Soient $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Si f et g sont de classe C^k sur I alors $\lambda.f+\mu.g$ l'est aussi et :

$$\forall t \in I, \quad (\lambda.f+\mu.g)^{(k)}(t) = \lambda.f^{(k)}(t)+\mu.g^{(k)}(t)$$

Autrement dit $C^k(I,\mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Théorème 13 – Fonction de classe C^k et applications linéaires

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle de classe C^k sur I, et $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire.
Alors, la fonction $L\circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ définie par $(L\circ f)(t) = L\big(f(t)\big)$, est de classe C^k sur I et :

$$\forall t \in I, \quad (L\circ f)^{(k)}(t) = L\big(f^{(k)}(t)\big) = \Big(L\circ\big(f^{k)}\big)\Big)(t)$$

Théorème 14 – Formule de Leibnitz

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions vectorielles de classe C^k sur I, et $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire.
Alors, la fonction $B(f,g) : I \longrightarrow \mathbb{R}^q$ définie par $B(f,g)(t) = B\big(f(t),g(t)\big)$, est de classe C^k sur I et :

$$\forall t \in I, \quad B(f,g)^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}.B\big(f^{(j)}(t),g^{(k-j)}(t)\big)$$

Théorème 15 – Composée d'applications de classe C^k

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $\overrightarrow{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^k.
Alors la fonction $f\circ\varphi$ est de classe C^k sur I.

2 Arcs paramétrés

2.1 Généralités

Définition 16 – Arc paramétré

On appelle *arc paramétré* un couple $\gamma = (I, \gamma)$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et $\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k.
Le *support* de l'arc paramétré est la courbe $\Gamma = \gamma(I) = \{(t, \gamma(t)) / t \in I\} \subseteq R^n$.

Si $n = 2$, γ est appelé *arc paramétré plan*.

Comme dans le cas des courbes et surfaces implicites, l'étude est simplifiée aux points qui sont réguliers.

Définition 17 – Point régulier, point stationnaire

Un point $M = M(t_0)$ d'un arc paramétré est dit *régulier* lorsque $\gamma'(t_0) \neq 0$.
Sinon, on dit que c'est un point *stationnaire* ou *singulier*.
L'arc paramétré est dit *régulier* si tous ses points le sont.

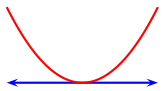
En un point régulier l'arc paramétré admet une droite tangente.

Théorème 18 – Tangente en un point régulier

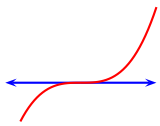
En un point régulier $M(t_0)$, la tangente est la la droite passant par $M(t_0)$ dirigée par le vecteur $\gamma'(t_0)$.
Elle a pour équation cartésienne :

$$(y - y_0).x'(t_0) = (x - x_0).y'(t_0)$$

Au voisinage d'un point régulier, un arc paramétré plan admet une des allures suivantes.



point ordinaire



point d'inflexion

2.2 Tracé d'un arc paramétré plan

Pour tout $t \in I$, on note $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$.

2.2.1 Réduction de l'intervalle d'étude

• Si les fonctions x et y sont T-périodiques, alors on peut restreindre l'étude à un intervalle de longueur T, par exemple $\left[O, \frac{T}{2}\right] \cap I$ ou $[0, T] \cap I$.

Dans la suite, on suppose que I est centré en $a \in \mathbb{R}$.

• Si on a $\begin{cases} x(2a-t) = x(t) \\ y(2a-t) = -y(t) \end{cases}$ alors on restreint l'étude à $I \cap [a, +\infty[$, puis on effectue *la symétrie orthogonale par rapport à l'axe* (Ox) pour obtenir toute la courbe.

• Si on a $\begin{cases} x(2a-t) = -x(t) \\ y(2a-t) = y(t) \end{cases}$ alors on restreint l'étude à $I \cap [a, +\infty[$, puis on effectue *la symétrie orthogonale par rapport à l'axe* (Oy) pour obtenir toute la courbe.

• Si on a $\begin{cases} x(2a-t) = -x(t) \\ y(2a-t) = -y(t) \end{cases}$ alors on restreint l'étude à $I \cap [a, +\infty[$, puis on effectue *la symétrie centrale par rapport à* O pour obtenir toute la courbe.

• Si on a $\begin{cases} x(2a-t) = x(t) \\ y(2a-t) = y(t) \end{cases}$ alors on restreint l'étude à $I \cap [a, +\infty[$, puis on effectue *la symétrie orthogonale par rapport à la droite* $y = x$ pour obtenir toute la courbe.

• Si on a $\begin{cases} x(2a-t) = x(t) + \alpha \\ y(2a-t) = y(t) + \beta \end{cases}$ alors on restreint l'étude à $I \cap [a, +\infty[$, puis on effectue *la translation de vecteur* $\alpha.\overrightarrow{i} + \beta.\overrightarrow{j}$ pour obtenir toute la courbe.

• Si on a $\begin{cases} x(2a-t) = -x(t) + \alpha \\ y(2a-t) = y(t) \end{cases}$ alors on restreint l'étude à $I \cap [a, +\infty[$, puis on effectue *la symétrie orthogonale par rapport à la droite* $x = \dfrac{\alpha}{2}$ pour obtenir toute la courbe.

• Si on a $\begin{cases} x(2a-t) = x(t) \\ y(2a-t) = -y(t) + \beta \end{cases}$ alors on restreint l'étude à $I \cap [a, +\infty[$, puis on effectue *la symétrie orthogonale par rapport à la droite* $y = \dfrac{\beta}{2}$ pour obtenir toute la courbe.

Le cas le plus fréquent est celui où $a = 0$ (et I centré en 0).

On a le même type de résultats en remplaçant $2a - t$ par $\dfrac{1}{t}$.

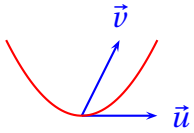
2.2.2 Étude locale au voisinage d'un point stationnaire

On suppose que la fonction $\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^2$ est de classe C^k, et qu'il existe deux entiers $1 \leq p < q \leq k$ tels que :

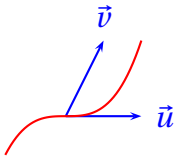
1. $\gamma^{(p)}(t_0)$ est le premier vecteur non-nul parmi $\gamma'(t_0), \ldots, \gamma^{(p)}(t_0)$.
2. q est le premier entier parmi $p+1, \ldots, q$ tel que les vecteurs $\gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(q)}(t_0)$ soient non colinéaires.

Alors le vecteur $\gamma^{(p)}(t_0)$ dirige la tangente à la courbe au point $M(t_0)$, et pour $t \neq t_0$, dans le repère $\mathscr{R} = \big(M(t_0), \gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(q)}(t_0)\big)$, si on note $\big(X(t), Y(t)\big)$ les coordonnée de $M(t)$, alors :

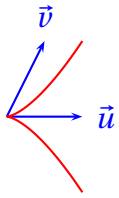
$$X(t) \underset{t \to t_0}{\sim} (t - t_0)^p, \quad Y(t) \underset{t \to t_0}{\sim} (t - t_0)^q$$



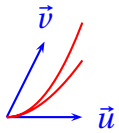
point ordinaire : p impair et q pair



point d'inflexion : p et q impairs



rebroussement de première espèce : p pair et q impair



rebroussement de seconde espèce : p et q pairs

On en déduit alors la position locale de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de t_0, en fonction de la parité des entiers p et q.

Pour déterminer p et q on utilise un développement limité en t_0 de $\gamma(t)$.

2.2.3 Branches infinies des courbes paramétrées

On peut étudier l'existence de courbes asymptotes et préciser la position locale de la courbe par rapport à ces asymptotes. Pour cela, on utilise un développement asymptotique des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ par rapport à t lorsque $t \to t_0$ avec *un terme significatif* qui tend vers 0. On essaie alors de faire une combinaison linéaire des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pour éliminer les termes tendant vers l'infini. Si on trouve une relation du type

$$y(t) = ax(t) + b + c(t - t_0)^k + o\left((t - t_0)^k\right)$$

alors on en déduit que la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe et la position locale de la courbe par rapport à son asymptote se déduit du signe de c et de la parité de k.

2.2.4 Plan d'étude

Pour tracer une courbe paramétrée plane :

1. Domaine de définition des deux fonctions x et y.
2. Symétries éventuelles ($M(-t) =?$, $M(t+T) =? \ldots$).

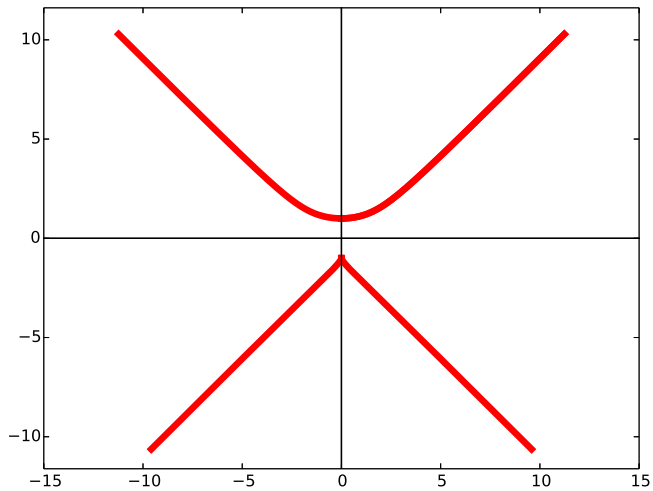
3. Étudier les points stationnaires.
4. Étudier les branches infinies.
5. Tracé sommaire.

✎ ***Exemple.*** Étudier la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \tan t + \sin t \\ y(t) = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$$

Son tracé est obtenu par le script Python :

```
from math import pi
t1=[k*pi/1000. for k in range(470)]
t2=[k*pi/1000. for k in range(530,1000)]
from numpy import *
x1=tan(t1)+sin(t1)
x2=tan(t2)+sin(t2)
y1=1/cos(t1)
y2=1/cos(t2)
import matplotlib.pyplot
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x1,y1,color='r')
plt.plot(-x1,y1,color='r')
plt.plot(x2,y2,color='r')
plt.plot(-x2,y2,color='r')
plt.axis('equal')
plt.axhline(color='k')
plt.axvline(color='k')
```

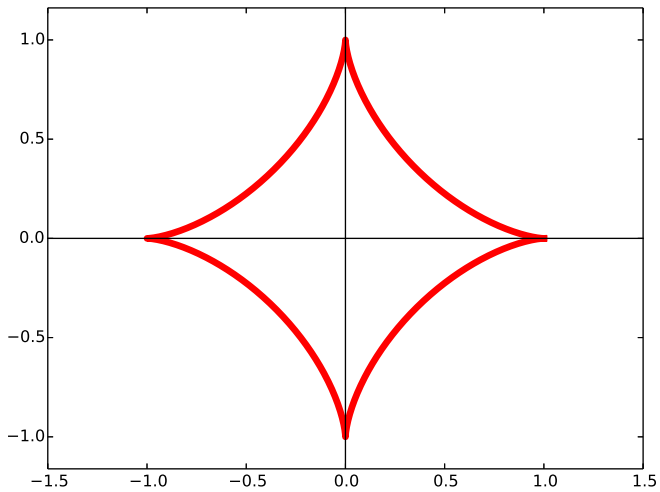


2.2.5 Courbes paramétrées classiques

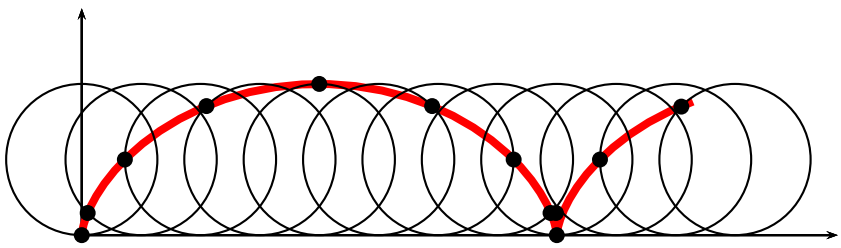
<u>Astroïde</u> : $\begin{cases} x(t) &= \cos^3 t \\ y(t) &= \sin^3 t \end{cases}$

Le tracé est obtenu avec le script Python :

```
from math import pi
t=[k*2.*pi/1000. for k in range(1000)]
from numpy import *
x=cos(t)**3
y=sin(t)**3
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x,y,color='r',linewidth=5)
plt.axis([-2,2,-2,2])
plt.axhline(color='k')
plt.axvline(color='k')
```



Cycloïde : $\begin{cases} x(t) &= R(t-\sin t) \\ y(t) &= R(1-\cos t) \end{cases}$



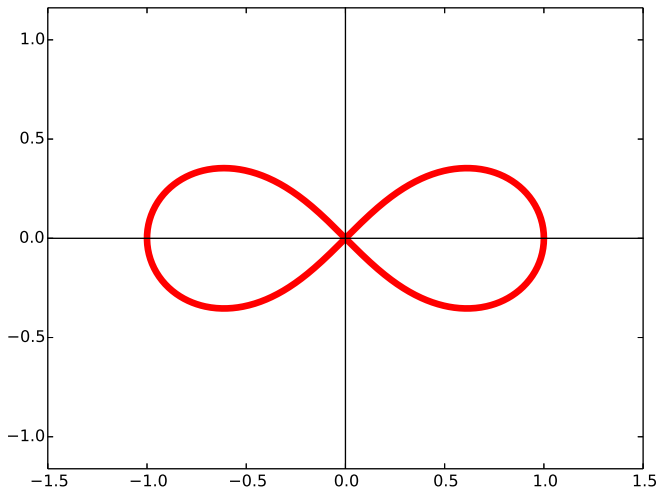
C'est la courbe dessinée par une trace de peinture sur une roue en mouvement uniforme.

Lemniscate de Bernoulli : $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)} \\ y(t) &= \dfrac{\sin(t)\cos(t)}{1+\cos^2(t)} \end{cases}$

Le tracé est obtenu avec le script Python :

```
from math import pi
t=[k*2.*pi/1000. for k in range(1000)]
from numpy import *
```

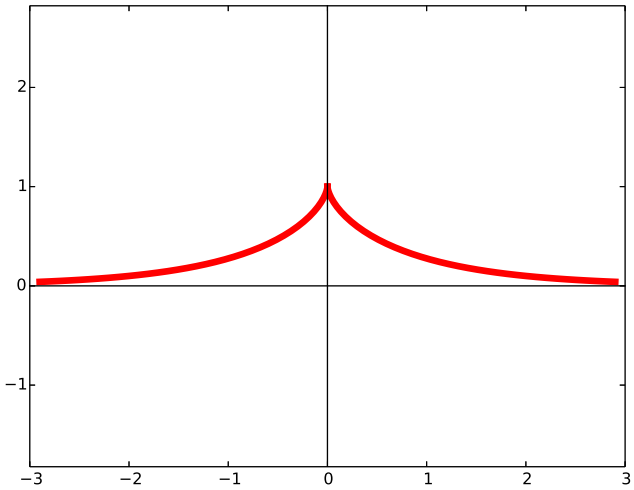
```
x=sin(t)/(1+cos(t)**2)
y=sin(t)*cos(t)/(1+cos(t)**2)
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x,y,color='r',linewidth=5)
plt.axis('equal')
plt.xlim([-1.5,1.5])
plt.axhline(color='k')
plt.axvline(color='k')
```



Tractrice : $\begin{cases} x(t) &= t - \tanh(t) \\ y(t) &= \dfrac{1}{\cosh(t)} \end{cases}$

Le tracé est obtenu avec le script Python :

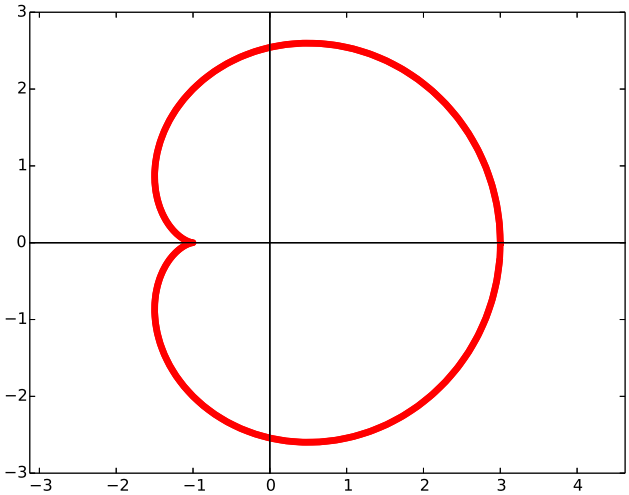
```
from math import pi
t=[k/10. for k in range(40)]
from numpy import *
x=t-tanh(t)
y=1/cosh(t)
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x,y,color='r',linewidth=5)
plt.plot(-x,y,color='r',linewidth=5)
plt.axis('equal')
plt.axhline(color='k')
plt.axvline(color='k')
```



Cardioïde : $\begin{cases} x(t) & = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) & = 2\sin(t) + \sin(2t) \end{cases}$

Le tracé est obtenu avec le script Python :

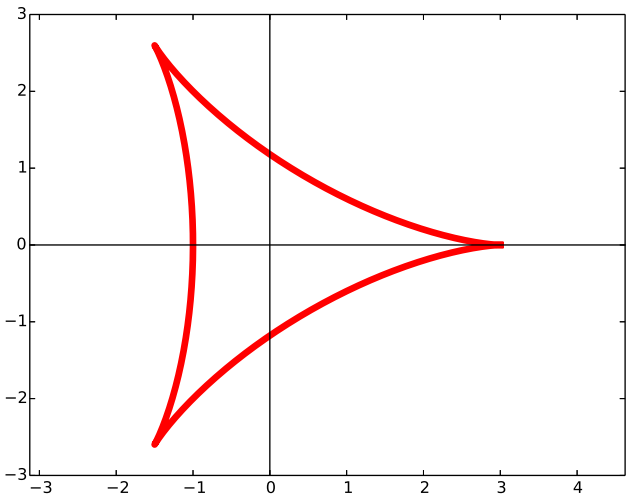
```
from math import pi
t=[k*2*pi/1000. for k in range(1000)]
from numpy import *
t=array(t)
x=2*cos(t)+cos(2.*t)
y=2*sin(t)+sin(2.*t)
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x,y,color='r',linewidth=5)
plt.axis('equal')
plt.axhline(color='k')
plt.axvline(color='k')
```



Deltoïde : $\begin{cases} x(t) &= 2\cos(t)+\cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin(t)-\sin(2t) \end{cases}$

Le tracé est obtenu avec le script Python :

```
from math import pi
t=[k*2*pi/1000. for k in range(1000)]
from numpy import *
t=array(t)
x=2*cos(t)+cos(2.*t)
y=2*sin(t)-sin(2.*t)
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x,y,color='r',linewidth=5)
plt.axis('equal')
plt.axhline(color='k')
plt.axvline(color='k')
```



2.3 Longueur d'un arc paramétré de classe C^1

Définition 19 – Longueur d'un arc paramétré

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe C^1.
La *longueur* de γ entre les paramètres a et b est le réel positif :

$$L_{a,b}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t$$

✎ ***Exemple.*** La longueur de la cardioïde est égale à 8.

2.4 Courbes tracées sur une surface

Définition 20 – Courbe tracée sur une surface

Soient V un ouvert de R^3 et $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction de classe C^1. On note S la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$.
Une *courbe tracée sur une surface* est un arc paramétré $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que ; $\forall t \in I$, $f\big(\gamma(t)\big) = 0$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. L'équation $z = \varphi(x, y)$ définit une surface S de l'espace (puisque l'application $(x, y, z) \longmapsto z - \varphi(x, y)$ est de classe C^1).
On appelle alors *courbe coordonnées* au point $\big(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)\big)$ de S, les arcs paramétrés γ_{y_0} : $x \longmapsto (x, y_0, \varphi(x, y_0)$ et $\gamma_{x_0} : y \longmapsto (x_0, y, \varphi(x_0, y)$. Ce sont des arcs paramétrés tracés sur S.
On sait que la tangente à γ_{y_0} au point x_0 est dirigée par $\left(1, 0, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$, et celle à γ_{x_0} au point y_0 est dirigée par $\left(0, 1, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.
On remarque que ces deux vecteurs sont orthogonaux à $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$.

Proposition 21 – Tangente à une courbe tracée sur une surface

Soient $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 ; on note S la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$. Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un arc paramétré tracé sur S.
Alors en tout point régulier t_0 de γ, la tangente à γ en ce point est orthogonal à $\nabla f\big(\gamma(t_0)\big)$, ie que cette tangente appartient au plan tangent à S en $\gamma(t_0)$.

3 Exercices

Fonctions vectorielles

Exercice 1 – Mouvement sur une sphère

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 telle que $t \longmapsto \|f(t)\|$ est constante.
Montrer que $\forall t \in I, \langle f(t), f''(t) \rangle \leq 0$. Interpréter géométriquement.

Exercice 2 – Calcul d'un déterminant

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & 0 \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

Montrer que D_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en déduire une expression de $D_n(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

Arcs paramétrés

Exercice 3 – Astroïde

1. Étudier et tracer l'astroïde définie par $\begin{cases} x(t) = \cos(t)^3 \\ y(t) = \sin(t)^3 \end{cases}$.
2. Pour tout point régulier M, la tangente en M coupe les axes en P et Q. Montrer que $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$ est une constante qu'on déterminera. Comment peut-on représenter très facilement une astroïde ?

Exercice 4 – Folium de Descartes

Étudier et tracer l'arc paramétré défini par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$

Exercice 5 – Étude complète d'un arc paramétré

Soit γ l'arc paramétré d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = 3 - 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

1. Soit γ_1 la partie de la courbe correspondant à $t \in [0, \pi]$. Montrer qu'on obtient toute la courbe γ à partir de γ_1.
2. (a) Exprimer $\sin(2t)$ et $\cos(2t)$ en fonction de $\sin(t)$ et $\cos(t)$.

   (b) Montrer que la courbe γ_1 présente deux points singuliers pour $t = 0$ et $t = t_0$ qu'on déterminera.

   On note I le point de paramètre t_0.
3. Donner l'allure de la courbe au voisinage de O : on précisera une équation de la tangente en ce point ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.
4. Montrer que le vecteur $(1, \sqrt{3})$ est vecteur directeur de la tangente à γ_1 en I. Écrire une équation de cette tangente.

   On admet que le point I est un point de rebroussement de seconde espèce.
5. Soit C_1 et C_2 les cercles de centre $\Omega = (3, 0)$ et de rayons respectifs $R_1 = 3$ et $R_2 = 1$.

   (a) Vérifier que la tangente en I passe par le point Ω.

   (b) Déterminer $\gamma \cap C_1$.

   (c) Soit J le point de γ de paramètre $\dfrac{\pi}{3}$. Montrer que γ est tangente à C_2 au point J.
6. Tracer le courbes γ, C_1 et C_2 ainsi que la tangente à γ en I.
7. Montrer que γ est invariante par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
8. Calculer la longueur de γ.