Durée du devoir : 1 heure

EXERCICE 1 : échange de deux valeurs

Ecrire une fonction Scilab d'en-tête `function[]=echange(a,b)` qui a en entrée deux variables a et b, qui **échange leur valeur lorsque** $a > b$, et qui affiche en sortie les nouvelles valeurs des variables a et b.

EXERCICE 2 : suites récurrentes

1. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0,01$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-2u_n}$.
   Ecrire une fonction Scilab d'en-tête `function[u]=suite1(n)` qui prend en entrée la valeur de l'entier n et qui donne en sortie une variable u dont la valeur est celle de u_n.
2. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 3\right)$.
   L'étude mathématique montre que $\alpha \in [-2,-1]$ et que $\forall n \in$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Ecrire une fonction Scilab d'en-tête `function[u]=alpha()` qui donne en sortie une variable u dont la valeur est une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - u_n$.
   Ecrire une fonction Scilab d'en-tête `function[]=suite3(n)` qui prend en entrée la valeur de l'entier n et qui affiche en sortie la valeur de u_n si $n \geq 1$, et un message d'erreur si $n = 0$.

EXERCICE 3 : calculs de sommes

Ecrire une fonction Scilab d'en-tête `function[s]=somme2(n,p)` qui prend en entrée la valeur des entiers naturels n et p, et qui donne en sortie une variable s dont la valeur est $\sum_{k=0}^{n} k^p$.

EXERCICE 4 : calculs de sommes et suites récurrentes

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 0$, $u_2 = -9$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.
Pour tout $n \geq 1$, on note S_n la somme des n premiers termes de cette suite.
Ecrire une fonction Scilab d'en-tête `function[s]=exo3(n)` qui prend en entrée la valeur de l'entier n et qui donne en sortie une variable s dont la valeur est celle de S_n.

EXERCICE 5 : problème des anniversaires

1. Dans une classe de $n \leq 365$ élèves, la probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour est égale à :
$$1 - \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right)$$
Ecrire une fonction Scilab d'en-tête `function[]=anniv()` qui affiche la phrase « la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité est supérieure ou égale à 1/2 est : » et qui affiche la valeur de n correspondante.
2. Dans cette même classe, la probabilité qu'au moins un élève soit né le même jour que notre président est égale à !
$$1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$$
Ecrire une fonction Scilab d'en-tête `function[]=anniv2()` qui affiche la phrase « la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité est supérieure ou égale à 1/2 est : » et qui affiche la valeur de n correspondante.
(*Attention de ne pas saturer la mémoire l'ordinateur...*)

EXERCICE 6 : valeur approchée de la limite d'une suite récurrente

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et la relation :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = u_k(1 + u_k - u_{k-1})$$
On peut montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0,1]$ et que $\forall k \geq 2$, $0 \leq u_k - \ell \leq 2(u_k - u_{k-1})$.
Ecrire une fonction d'en-tête `function[l]=suite(eps)` qui prend un entrée un réel `eps` strictement positif et qui donne en sortie une variable `l` qui sera une valeur approchée de ℓ à `eps` près.