Combinatoire et dénombrement

Exercice 1
On considère un polygone convexe à n sommets.

1. Combien de diagonales ce polygone admet-t-il ?
2. En combien de points intérieurs au polygone ces diagonales se coupent-elles ?
3. Combien de polygones (convexes ou non, croisés ou non) admettant les mêmes n sommets que le polygone donné peut-on construire ?

Exercice 2
Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Déterminer le nombre de paires (A, B) de parties de E telles que $A \subset B$.
2. Combien de telles paires satisfont-elles en plus à la condition $A \neq B$?

Exercice 3
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(A), \qquad \sum_{A,B \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(A \cap B), \qquad \sum_{A,B \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(A \cup B)$$

Exercice 4
Dérangements
On note D_n l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ n'ayant pas de point fixe et on pose $d_n = \operatorname{Card}(D_n)$.
On se propose de démontrer par deux méthodes que :

$$d_n = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) \qquad (\star).$$

1. *Méthode 1*
   En considérant, pour $k \in [\![1, n]\!]$, l'ensemble F_k des permutations de $\mathfrak{S}_n$ fixant l'entier k et en appliquant la formule du crible de Poincaré, montrer la formule $(\star)$.
2. *Méthode 2*
   a) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$ pour $p \in [\![0, n]\!]$.
   b) Montrer que $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$.
   c) En déduire la formule $(\star)$.

Espaces probabilisés

Exercice 5
On lance au hasard r boules numérotées de 1 à r dans n boîtes numérotées de 1 à n ($r, n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que tous les jets sont équiprobables.

1. Déterminer la probabilité pour que les boîtes numéros un et deux reçoivent des boules et qu'elles soient les deux seules boîtes à en recevoir.
2. Déterminer la probabilité pour que chaque boîte reçoive exactement deux boules ; discuter suivant les valeurs de r et n.

Exercice 6
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une boule rouge, une boule blanche et une boule noire. On tire successivement n boules de l'urne avec remise dans l'urne de la boule tirée après chaque tirage.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces n tiages ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule de chaque couleur au cours de ces n tirages ?
3. Quelle est la probabilité pour que la première et la dernière boule tirées soient de la même couleur ?

Exercice 7
On considère deux urnes U_1 et U_2. On suppose que U_1 (respectivement U_2) contient n_1 boules noires et b_1 boules blanches (resp. n_2 boules noires et b_2 boules blanches).
On choisit de façon équiprobable une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise.
Soit N_1 (resp. N_2) l'événement « tirer une boule noire au premier (resp. au second) tirage ».

1. Quelle est la probabilité de N_1 ? Quelle est la probabilité de N_2 ?
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire au second tirage sachant que l'on a tiré une boule noire au premier tirage ?
3. Les événements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 8
Une urne U_1 contient 2 boules rouges, 3 boules bleues et 5 boules vertes ; une urne U_2 contient 4 boules rouges et 5 boules bleues ; une urne U_3 contient 3 boules bleues et 6 boules vertes.
On procède à l'expérience suivante : on tire au hasard une boule de U_1 que l'on place dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 que l'on place dans U_3 et enfin on tire au hasard une boule de U_3 que l'on place dans U_1.
Quelle est la probabilité que la composition de l'urne U_1 n'ait pas changé à l'issue de ces trois tirages ?

Exercice 9
Trois joueurs A, B et C jouent de la façon suivante : A et B jouent la première partie ; le perdant est remplacé par C pour la 2$^{\text{e}}$ partie ; le perdant de cette 2$^{\text{e}}$ partie est remplacé par le perdant de la 1$^{\text{re}}$ partie ; le jeu se poursuit ainsi jusqu'à ce qu'un joueur gagne deux fois de suite ; celui-ci est alors déclaré vainqueur.
On suppose qu'à chaque partie, la probabilité de gagner de chacun des joueurs est égale à $\frac{1}{2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité pour que A soit déclaré vainqueur à l'issue :
   a) de la $3n$-ième partie ?
   b) de la $(3n+1)$-ième partie ?
   c) de la $(3n+2)$-ième partie ?
2. Quelle est la probabilité pour que A soit déclaré vainqueur ?
3. Quelle est la probabilité pour que C soit déclaré vainqueur ?

Exercice 10
On considère deux pièces truquées A et B ; A donne pile avec la probabilité a $(0 < a < 1)$ et B donne pile avec la probabilité b $(0 < b < 1)$.
On choisit une pièce au hasard et on la lance ; si l'on obtient pile, on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On poursuit ce processus k fois $(k \geqslant 2)$.

1. Déterminer la probabilité de lancer la pièce A au k-ième lancer.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir pile au k-ième lancer.
3. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque k tend vers l'infini.
   Interpréter le résultat obtenu si l'on suppose maintenant $a = 1$ et $0 < b < 1$.

Variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 11
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

1. On tire k boules de cette urne $(k \in [\![1; n]\!])$. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros.
   Déterminer la loi de X si chaque tirage s'effectue
   a) sans remise
   b) avec remise
2. On tire simultanément k boules de cette urne $(k \in [\![1; n]\!])$. Soit Y la variable aléatoire égale au plus petit des numéros.
   Déterminer la loi de Y et calculer son espérance $\mathrm{E}(Y)$.

Exercice 12
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire plusieurs fois au hasard et avec remise une boule de l'urne. On arrête les tirages dès que le dernier numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro obtenu lors du précédent tirage.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. a) Déterminer la probabilité des événements $(X \geqslant 2)$, $(X \geqslant 3)$ et $(X = 2)$.
   b) Pour tout $k \in X(\Omega)$, déterminer la probabilité de l'événement $(X \geqslant k)$.
   c) En déduire la loi et l'espérance de X, puis la limite de cette dernière lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 13

Une urne contient b boules blanches, n boules noires, r boules rouges ; b et n sont des entiers naturels non nuls, r est un entier naturel.
Un joueur tire une boule. Si elle est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage (avant le second tirage, l'urne contient donc $r-1$ boules rouges).
Dans ce cas, si la boule est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage, etc.
La partie s'achève lorsque le joueur a gagné ou perdu.

1. On note B_i (resp N_i, R_i) l'événement : « le joueur tire une boule blanche (resp une boule noire, une boule rouge) au i-ème coup ».
   On note G_r l'événement : « le joueur gagne en commençant ses tirages dans une urne contenant r boules rouges ».
   a) Calculer les probabilités $\mathrm{P}(G_0)$ et $\mathrm{P}(G_1)$.
   b) Trouver une relation entre $\mathrm{P}(G_r)$ et $\mathrm{P}(G_{r-1})$.
   c) Calculer $\mathrm{P}(G_r)$.
2. Soit X_r la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie s'achève, l'urne contenant au départ r boules rouges.
   a) Calculer les espérances $\mathrm{E}(X_0), \mathrm{E}(X_1), \mathrm{E}(X_2)$.
   b) Trouver une relation entre $\mathrm{P}(X_r = k)$ et $\mathrm{P}(X_{r-1} = k-1)$ (pour $r \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$), puis entre $\mathrm{E}(X_r)$ et $\mathrm{E}(X_{r-1})$.
   c) En déduire $\mathrm{E}(X_r)$.

Exercice 14

Un rat de laboratoire est soumis à l'expérience suivante : il est enfermé dans une cage comportant quatre portes derrière chacune desquelles se trouve un beau morceau de gruyère. Trois des quatre portes sont munies d'un dispositif envoyant à l'animal une décharge électrique s'il essaie de les franchir. La quatrième laisse le passage libre.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.
Déterminer la loi de X et son espérance dans chacun des cas suivants :

1. Le rat n'a aucune mémoire : il recommence ses tentatives sans tenir compte des échecs passés.
2. Le rat a une mémoire immédiate : il ne tient compte que de l'échec qui précède immédiatement sa nouvelle tentative.
3. Le rat a une bonne mémoire : il élimine les portes où il a échoué.

Exercice 15

Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On effectue des tirages successifs selon le protocole suivant :
• si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne avec une boule noire ;
• si la boule tirée est noire, on s'arrête.
Soit X la variable aléatoire égale au numéro du tirage amenant la première boule noire.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 16

On joue à pile ou face avec une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est égale à p, celle d'obtenir face étant $q = 1-p$.
On note P_k (resp. F_k) l'événement « obtenir pile (resp. face) au k-ième lancer ».
On lance indéfiniment la pièce. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, pile puis face, dans cet ordre, aux lancers $k-1$ et k, X prenant la valeur 0 si on n'obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $\mathrm{P}(X=2), \mathrm{P}(X=3)$ et $\mathrm{P}(X=4)$ en fonction de p et q.
2. a) Pour tout $k \geqslant 2$, écrire l'événement $(X = k)$ comme réunion d'événements incompatibles.
   En déduire que
   $$\mathrm{P}(X=k) = \begin{cases} pq\dfrac{p^{k-1}-q^{k-1}}{p-q} & \text{si } p \neq q \\ \dfrac{k-1}{2^k} & \text{si } p = q = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$
   b)) Calculer $\mathrm{P}(X=0)$.
3. Calculer l'espérance de X.

Lois usuelles discrètes

Exercice 17
Une urne de Polya
Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne et, à chaque tirage, on replace dans l'urne la boule obtenue en ajoutant une boule de la même couleur.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.
Déterminer la loi de X_n.
(On commencera par examiner les cas $n = 1, n = 2, \ldots$).

Exercice 18
Pour p entier naturel non nul, on considère $p+1$ urnes notées $U_0, U_1, \ldots, U_p$. Dans chaque urne il y a p boules indiscernables au toucher ; pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'urne numéro i contient i boules blanches, les autres boules étant noires.
On choisit une urne au hasard et, dans l'urne choisie, on effectue n tirages avec remise d'une boule ($n \in \mathbb{N}^*$).
On note N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches ainsi obtenues.

1. Exprimer la loi de N_p.
2. Déterminer l'espérance $\mathrm{E}(N_p)$ de N_p.
3. L'entier n étant fixé, montrer que, pour tout entier k de $[\![0, n]\!]$:

$$\lim_{p \to +\infty} \mathrm{P}(N_p = k) = \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \mathrm{d}x,$$

   en déduire la valeur de cette limite.

Exercice 19
Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N, avec $N \geqslant 3$.
On effectue une succession de tirages, en choisissant à chaque fois au hasard une boule, que l'on replace dans l'urne avant le tirage suivant.
Pour $n \geqslant 2$ et $n \leqslant N$, on note X_n le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires pour obtenir n numéros distincts.

1. Quelle est la loi de $X_2 - 1$? Déterminer espérance et variance de X_2.

Pour $n \geqslant 3$, on pose $Y_n = X_n - X_{n-1}$.

2. Donner une interprétation de Y_n, déterminer sa loi, son espérance et sa variance.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X_n.
4. On suppose N pair et on pose $N = 2m$. Étudier la convergence des suites $\left(\dfrac{\mathrm{E}(X_m)}{m}\right)_{m \geqslant 2}$ et $\left(\dfrac{\mathrm{V}(X_m)}{m}\right)_{m \geqslant 2}$.

Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 20
n personnes se répartissent au hasard dans 3 hôtels H_1, H_2 et H_3 de la ville ($n \in \mathbb{N}^*$). On note X_i la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant choisi l'hôtel H_i.

1. Déterminer les lois des 3 variables aléatoires H_i.
2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$ et la variance de $X_1 + X_2$.
3. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ et le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X_1, X_2)$.

Exercice 21
On considère une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0; 1[$.
L_1 est la variable aléatoire égale à la longueur de la première série débutant à la première épreuve, une série étant une succession soit de succès soit d'échecs interrompue par l'événement contraire.
L_2 est la variable aléatoire égale à la longueur de la deuxième série débutant après la fin de la première série.
L_3 est la variable aléatoire égale à la longueur de la troisième série débutant après la fin de la deuxième série.
Ainsi, pour une succession d'épreuves débutant par $SSSEESE\ldots$, on a $L_1 = 3, L_2 = 2$ et $L_3 = 1$.

1. Déterminer la loi de L_1 et calculer son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de L_2 et calculer son espérance et sa variance.
3. Déterminer la loi conjointe du couple (L_1, L_2).
   Retrouver la loi de L_2.

4. Les variables aléatoires L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ? (on discutera selon les valeurs de p).
5. Calculer la covariance de L_1 et L_2.
6. Déterminer la loi de $L_1 + L_2$. On distinguera les cas $p = \dfrac{1}{2}$ et $p \neq \dfrac{1}{2}$.
7. Déterminer la loi de L_3.

Exercice 22
Une marche aléatoire
Un individu se trouve initialement à l'origine d'un repère orthonormé du plan. Il tient à la main une urne contenant 4 boules portant les lettres N, S, E et O.
Il tire une boule au hasard et avance d'une unité dans la direction indiquée par la boule. Il remet ensuite la boule dans l'urne.
Il poursuit ensuite les tirages et les déplacements selon le même protocole. Il effectue ainsi une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$.
On note M_n sa position après n déplacement, en convenant que $M_0 = 0$. On note X_n et Y_n les variables aléatoires égales respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée de M_n.

1. Calculer $\mathrm{E}(X_{n+1}^2)$ en fonction de $\mathrm{E}(X_n^2)$.
   En déduire l'espérance de D_n où D_n est la variable aléatoire égale à la distance de M_n à l'origine.
2. Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la probabilité p_n que l'individu se trouve à l'origine après n déplacements.

Exercice 23

1. Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant « pile » avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois « pile ». Soit X le nombre aléatoire de « faces » obtenus au cours de cette expérience.
   a) Déterminer la loi de X. Vérifier que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = n) = 1$.
   b) Montrer que X admet une espérance et calculer sa valeur.
2. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on tire ensuite une boule de cette urne.
   On note alors Y le numéro obtenu.
   a) Déterminer la loi de Y.
   b) Montrer que Y admet une espérance et calculer sa valeur.
3. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 24
On dispose d'une pièce de monnaie donnant « pile » avec la probabilité p et « face » avec la probabilité $q = 1-p$ (avec $p \in]0, 1[$).
On lance cette pièce, les lancers étant indépendants les uns des autres, et on note N le nombre aléatoire de lancers nécessaires à la première apparition de « pile » (on pose $N = -1$ si « pile » n'apparaît jamais).
Quand « pile » apparaît au bout de n lancers, on effectue une série de n lancers avec cette même pièce et on note X le nombre de « pile » obtenus au cours de cette série.

1. Quelle est la loi de N ?
2. Déterminer la loi du couple (N, X).
3. Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$ et $\mathrm{P}(X = 1)$.
4. Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $\mathrm{P}(X = k)$ sous forme d'une série.
5. Calculer la somme de cette série.
   On rappelle que si $|x| < 1$ *alors* $\sum\limits_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$
6. Calculer l'espérance et la variance de X.

Variables aléatoires réelles à densité

Exercice 25
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(2)} \times \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\end{cases}$$

1. a) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X.
   b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   c) Déterminer l'existence et la valeur éventuelle de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
2. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$ et $N = \left[\dfrac{1}{X}\right]$ (N est la partie entière de $\dfrac{1}{X}$).
   a) Déterminer la loi de Y.
   b) Déterminer la loi de N.
   c) Y et N ont-elles une espérance ?
3. On pose $Z = Y - N$.
   Déterminer la loi de Z.
   La variable aléatoire Z a-t-elle une espérance ?

Exercice 26
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

   Montrer que f est une densité de probabilité.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes et possédant comme densité la fonction f.

2. Montrer que la variable aléatoire X_1 définie par :

$$X_1 = \begin{cases} \ln|X| & \text{si } X \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de X_1.
3. Prouver que la variable aléatoire $Z = \ln|XY|$ admet comme densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4x\mathrm{e}^x}{\pi^2(\mathrm{e}^{2x}-1)} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \dfrac{2}{\pi^2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4. Montrer que $T = |XY|$ est une variable à densité et donner une densité de T.
5. En déduire la convergence et la valeur des intégrales :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

Lois usuelles à densité

Exercice 27
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
   Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant f pour densité.
2. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$$

Étudier les variations de φ. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et déterminer sa bijection réciproque.

3. On définit une variable aléatoire Y par :

$$Y = \varphi(X) = \frac{\mathrm{e}^X - 1}{\mathrm{e}^X + 1}$$

Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y.

Exercice 28

On considère une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$, et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Y_k = \max(X_1, \ldots, X_k)$, $k \geqslant 1$.
2. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z_k = -Y_k$.
3. En déduire la probabilité de l'événement $A_n = (X_n \geqslant \max(X_1, \ldots, X_{n-1}))$ pour $n \geqslant 2$.

Exercice 29

On casse un bâton de longueur 1. Le point de rupture suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
Calculer la probabilité que le grand morceau soit au moins 3 fois plus grand que le petit morceau.

Exercice 30

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R > 0$ et le point A de coordonnées $(R, 0)$.
On choisit au hasard un point M sur le cercle $\mathcal{C}$.
On note L la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$, C la longueur AM, X et Y l'abscisse et l'ordonnée de M.

1. Déterminer la loi de L puis calculer son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de C puis calculer son espérance et sa variance.
3. Déterminer les lois de X et de Y puis leur espérance et leur variance.
4. Montrer que X et Y sont non corrélées et non indépendantes.
   Indication : on pourra considérer les événements $\left(0 \leqslant X \leqslant \dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(0 \leqslant Y \leqslant \dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exercice 31

Trois personnes, notées A, B et C entrent simultanément dans un magasin ayant deux bornes d'accueil. A et B occupent immédiatement (à l'instant 0) les deux bornes, C attend et occupe la première borne laissée libre par A ou B (on suppose que le temps de changement de personne est négligeable).
On suppose que les temps passés à une borne par A, B et C sont des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$ et notées respectivement X, Y et Z.

1. On pose $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.
   a) Déterminer les fonctions de répartition de U et V, ainsi qu'une densité de chacune d'elles.
   b) Déterminer l'espérance et la variance de U et V.
2. On note T le temps total passé par C dans le magasin.
   a) Déterminer la loi de T.
   b) Déterminer l'espérance de T.

Exercice 32

Loi de Laplace

Soient $\lambda > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda|x|}$.

1. Vérifier que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la loi de $Y = |X|$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 33

On considère deux variables aléatoires à densité X et Y, indépendantes, définies sur le même espace probabilisé ; X suit une loi exponentielle de paramètre a, Y suit une loi exponentielle de paramètre b, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs donnés.
On définit les variables aléatoires : $T = \min(X, Y)$, $U = \max(X, Y)$, $Z = U - T$.
N.B : dans chacune des questions, on prêtera attention au cas où $a = b$.

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire D définie par $D = X - Y$.
2. Exprimer Z en fonction de X et de Y, et déterminer une densité de Z.
3. Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 34
On considère deux variables aléatoires indépendantes réelles X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$, suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1.

1. a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer une densité de la variable $W = Y - tX$.
   b) Déterminer, s'il existe, le moment d'ordre n (avec $n \geqslant 1$) de W.
2. En déduire une densité de la variable $Z = \dfrac{Y}{X}$.
3. Déterminer la loi de la variable $U = \dfrac{Y}{X+Y}$.

Exercice 35
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et telle que

$$\mathrm{P}(X \leqslant -1) = 0{,}448 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(X \leqslant 3) = 0{,}998.$$

Déterminer une valeur approchée de m et de σ à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite.

Théorèmes limites

Exercice 36
On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois de suite.
À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver une condition sur l'entier n pour que le rapport du nombres de piles obtenus sur le nombre de lancers soit strictement compris entre 0,4 et 0,6 avec une probabilité supérieure ou égale à 0,9.

Exercice 37
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0,1[$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Déterminer la loi de Y_n.
2. Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$, $i \neq j$. Discuter, suivant les valeurs de i et j, l'indépendance de Y_i et Y_j.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
   Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à p^2.

Exercice 38
Soit un réel $a > 0$. Pour tout entier $n > a$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi géométrique de paramètre $\dfrac{a}{n}$.
Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires définies par $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

Exercice 39
Une troupe de 900 soldats traverse une rivière en Amazonie. La probabilité qu'un soldat serve de repas à un crocodile est égale à $\dfrac{1}{5}$.
Calculer la probabilité que 150 soldats, au plus, périssent dans d'atroces souffrances.

Exercice 40
Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1 et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
En utilisant le théorème limite central, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$