Combinatoire et dénombrement

Exercice 1

1. On considère dans le plan n points alignés $A_1, \dots, A_n$.
   En combien de points les cercles de diamètre $[A_i A_j]$, $i \neq j$, se coupent-ils ?
2. On considère dans le plan n droites distinctes non parallèles deux à deux et non concourantes trois à trois.
   Déterminer le nombre de régions délimitées par ces n droites.
3. On dispose de n boules que l'on place dans p tiroirs numérotés de 1 à p, chaque tiroir pouvant contenir plusieurs boules.
   Déterminer le nombre de répartitions possibles si les boules sont
   a) discernables ;
   b) indiscernables.

Exercice 2
Soient $n, p \in \mathbb{N}$, $n \leqslant p$. Montrer, à l'aide d'un raisonnement combinatoire, les égalités :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{p-k}{n-k} = 2^n \binom{p}{n} \qquad \sum_{k=n}^{p} \binom{p}{k}\binom{k}{n} = 2^{p-n}\binom{p}{n}$$

Exercice 3
Soit E un ensemble de cardinal n. Déterminer le cardinal des ensembles suivants :

$\mathcal{E}_1 = \big\{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 ; \mathrm{Card}(A \cap B) = p\big\}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

$\mathcal{E}_2 = \big\{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 ; A \cup B = E\big\}$

Exercice 4
Partie I - Formule d'inversion de Pascal
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$$

Partie II - Nombre de surjections
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, E et F deux ensembles de cardinaux respectifs m et n. On note $S_{m,n}$ le nombre de surjections de E sur F.

1. Déterminer $S_{m,n}$ si

   a) $n > m$ b) $m = n$ c) $n = 1$ d) $n = 2$ e) $m = n+1$

2. a) En considérant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'ensemble des applications de E dans F dont l'image est de cardinal k, montrer que :

   $$n^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{m,k}$$

   (Par convention, on pose, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $S_{m,0} = 0$.)

   b) En déduire que :

   $$S_{m,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m$$

Espaces probabilisés

Exercice 5
Le joueur A possède deux dés cubiques équilibrés numérotés de 1 à 6 et le joueur B un dé dodécaédrique équilibré numéroté de 1 à 12. Le joueur qui fait le plus grand score a gagné ; il y a match nul en cas d'égalité.
Déterminer la probabilité que A gagne et la probabilité d'avoir un match nul.

Exercice 6
On dispose de 6 cartons portant le numéro 1 et 3 cartons portant le numéro 2.
3 cartons ont été placés de façon à former une matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

On place les 6 autres cartons afin de compléter la matrice.
Déterminer la probabilité que A soit inversible.

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$. Les n personnes d'une assemblée élisent leur président. Chacune des personnes vote pour l'un des trois candidats a, b et c. Un candidat est élu s'il obtient au moins $n-2$ voix.
Déterminer la probabilité pour qu'aucun des trois candidats ne soit élu.

Exercice 8
Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue n tirages successifs avec remise de la boule tirée. On considère les événements A_n « on obtient, au cours des n tirages, des boules des deux couleurs » et B_n « on obtient, au cours des n tirages, au plus une boule blanche ».
Étudier l'indépendance de A_n et B_n.

Exercice 9
On considère 3 dés équilibrés et un dé truqué pour lequel la probabilité d'obtenir 6 est égale à $\dfrac{1}{2}$.

1. On choisit un dé et on le lance. On obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?
2. On relance le dé et on obtient de nouveau 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?

Exercice 10
Trois joueurs A, B et C jouent de la façon suivante : A et B jouent la première partie ; le perdant est remplacé par C pour la 2$^{\text{e}}$ partie ; le perdant de cette 2$^{\text{e}}$ partie est remplacé par le perdant de la 1$^{\text{re}}$ partie ; le jeu se poursuit ainsi jusqu'à ce qu'un joueur gagne deux fois de suite ; celui-ci est alors déclaré vainqueur.
On suppose qu'à chaque partie, la probabilité de gagner de chacun des joueurs est égale à $\dfrac{1}{2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité pour que A soit déclaré vainqueur à l'issue :
   a) de la $3n$-ième partie ?
   b) de la $(3n+1)$-ième partie ?
   c) de la $(3n+2)$-ième partie ?
2. Quelle est la probabilité pour que A soit déclaré vainqueur ?
3. Quelle est la probabilité pour que C soit déclaré vainqueur ?

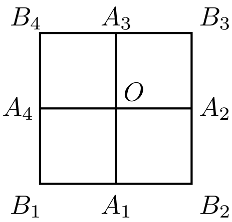
Exercice 11
On lance en une seule fois n pièces de monnaie, la probabilité que la k-ième pièce amène pile valant $\dfrac{1}{2k+1}$.
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair de piles ?

Variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 12
Soit E un ensemble de n personnes ($n \geqslant 2$). Chacune d'elles envoie une lettre (et une seule) à l'une quelconque des $n-1$ autres personnes.
Soit A une personne de E. On note X le nombre de lettres reçues par A.
Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer l'espérance de X.

Exercice 13
Soit n un entier naturel de $\mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées depuis 1 jusqu'à n. On effectue trois tirages au hasard d'une boule de cette urne, en replaçant à chaque fois la boule obtenue avant le tirage suivant.
On désigne par M la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus et par m la variable aléatoire égale au plus petit des numéros obtenus, et enfin, par Z la variable aléatoire égale à $M-m$.
Déterminer la loi de probabilité de Z puis son espérance $\mathrm{E}(Z)$.

Exercice 14
Soient 9 points $0, A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4$ disposés dans le plan comme indiqué sur la figure ci-dessous :



Un mobile se déplace sur ces points par étapes successives.
Le mobile se trouve initialement en O et, à chaque étape, il se déplace d'un point à un point voisin en suivant obligatoirement les lignes droites du schéma. Les déplacements possibles, à chaque étape, sont supposés équiprobables.

1. Déterminer la probabilité pour que le mobile soit en O à l'issue de la n-ième étape.
2. Soit X la variable aléatoire égale au rang de l'étape à l'issue de laquelle le mobile revient pour la première fois au point O.
   Déterminer la loi de X et calculer $\mathrm{E}(X)$.

Exercice 15
On joue à pile ou face avec une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est égale à $\dfrac{2}{3}$.
On note P_k (resp. F_k) l'événement « obtenir pile (resp. face) au k-ième lancer ».
On lance indéfiniment la pièce. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs, X prenant la valeur 0 si on n'obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $\mathrm{P}(X = 2), \mathrm{P}(X = 3)$ et $\mathrm{P}(X = 4)$.
2. En considérant le résultat du premier lancer et en appliquant la formule des probabilités totales, montrer que
$$\forall k \geqslant 3, \quad \mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{3}\mathrm{P}(X = k-1) + \frac{2}{9}\mathrm{P}(X = k-2).$$
3. En déduire la loi de probabilité de X.
4. Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 16
Deux urnes U_1 et U_2 contiennent initialement un jeton numéroté 0 et un jeton numéroté 1.
On choisit au hasard et simultanément un jeton de U_1 et un jeton de U_2. On place alors dans U_1 le jeton provenant de U_2 et dans U_2 le jeton provenant de U_1.
On note X_n la variable aléatoire égale à la somme des points des jetons contenus dans l'urne U_1 après n échanges.
On convient de poser $X_0 = 1$.

1. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation entre la loi de X_{n+1} et celle de X_n.
2. Déterminer la loi de X_n.

Lois usuelles discrètes

Exercice 17
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires.
On tire ces $2n$ boules une à une et sans remise.
On dit qu'il y a un changement si, à un tirage, on obtient une boule de couleur différente de la boule précédemment tirée.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de changements.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 3 changements ?
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leqslant 2n$, on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si le k-ième tirage donne un changement, et à 0 sinon.
   Déterminer les lois des variables X_k.
3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 18
Un individu gravit un escalier. À chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce non équilibrée donnant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < \frac{1}{2}$) et progresse d'une marche s'il obtient « pile » et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient « face ».

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et X'_n le nombre de fois ou l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.
   a) Déterminer une relation simple liant X_n et X'_n. En déduire la loi de X_n.
   b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas justes nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche et $\mathrm{E}(Y_n)$ l'espérance de Y_n.
   a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ?
   b) Déterminer la loi de Y_1, puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.
   c) Montrer que pour tout entier naturel k, et tout entier $n \geqslant 3$, on a :
   $$\mathrm{P}(Y_n = k) = p\mathrm{P}(Y_{n-1} = k-1) + (1-p)\mathrm{P}(Y_{n-2} = k-1)$$
   d) Montrer que, pour $n \geqslant 3$, $\mathrm{E}(Y_n) = p\mathrm{E}(Y_{n-1}) + (1-p)\mathrm{E}(Y_{n-2}) + 1$.
   e) Déterminer alors la valeur de $\mathrm{E}(Y_n)$.

Exercice 19
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne, sans remise, jusqu'à ce que les boules numérotées $1, 2$ et 3 soient sorties.

1. Quelle est la probabilité que les boules numérotées $1, 2$ et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?
2. Quelle est la probabilité que les boules numérotées $1, 2$ et 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou non) ?
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   Déterminer la loi de X et calculer son espérance $\mathrm{E}(X)$.

Exercice 20
Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans le noir, avec n clefs dont une seule est la bonne.
On note X le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

1. On suppose que le gardien essaie les clefs une à une sans utiliser deux fois la même.
   Donner la loi de probabilité de X.
2. Lorsque le gardien est ivre, il mélange toutes les clefs à chaque tentative.
   Donner la loi de probabilité de X.
3. Le gardien est ivre un jour sur trois.
   Sachant qu'un jour n tentatives ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le gardien ait été ivre ce jour là ?
   Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$.

Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 21
Montrer, à l'aide de fonctions génératrices, qu'il est impossible de biaiser deux dés de façon à ce que la somme des points obtenus suive une loi uniforme.

Exercice 22
On considère une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0;1[$.
L_1 est la variable aléatoire égale à la longueur de la première série débutant à la première épreuve, une série étant une succession soit de succès soit d'échecs interrompue par l'événement contraire.
L_2 est la variable aléatoire égale à la longueur de la deuxième série débutant après la fin de la première série.
L_3 est la variable aléatoire égale à la longueur de la troisième série débutant après la fin de la deuxième série.
Ainsi, pour une succession d'épreuves débutant par $SSSEESE\ldots$, on a $L_1 = 3, L_2 = 2$ et $L_3 = 1$.

1. Déterminer la loi de L_1 et calculer son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de L_2 et calculer son espérance et sa variance.
3. Déterminer la loi conjointe du couple (L_1, L_2).
   Retrouver la loi de L_2.
4. Les variables aléatoires L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ? (on discutera selon les valeurs de p).

5. Calculer la covariance de L_1 et L_2.
6. Déterminer la loi de $L_1 + L_2$. On distinguera les cas $p = \dfrac{1}{2}$ et $p \neq \dfrac{1}{2}$.
7. Déterminer la loi de L_3.

Exercice 23
Une puce se trouve initialement à l'origine d'un axe orienté.
Chaque seconde, elle décide soit d'effectuer un saut de longueur 1 dans le sens positif avec la probabilité p, soit d'effectuer un saut de longueur 1 dans le sens négatif avec la probabilité q, soit de se reposer avec la probabilité r, avec $p + q + r = 1$.
Les décisions prises sont supposées indépendantes les unes des autres.
On note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce au bout de n secondes.

1. Donner la loi de X_n.
2. Calculer l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 24
Soient $k, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geqslant 2$. Un candidat répond à n questions. Pour chaque question, k réponses sont proposées dont une seule est correcte.
Le candidat répond au hasard à toutes les questions.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses obtenues.
   Déterminer la loi de X.
2. Lorsque le candidat a donné une mauvaise réponse, il peut répondre de nouveau à la question en choisissant une des autres réponses proposées.
   On note Y la variables aléatoire égale au nombre de bonnes réponses lors de cette série de rattrapage.
   Déterminer la loi de Y.
3. Soit $Z = X + Y$ la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses obtenues.
   Déterminer la loi de Z.

Variables aléatoires réelles à densité

Exercice 25
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(2)} \times \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\end{cases}$$

1. a) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X.
   b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   c) Déterminer l'existence et la valeur éventuelle de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
2. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$ et $N = \left[\dfrac{1}{X}\right]$ (N est la partie entière de $\dfrac{1}{X}$).
   a) Déterminer la loi de Y.
   b) Déterminer la loi de N.
   c) Y et N ont-elles une espérance ?
3. On pose $Z = Y - N$.
   Déterminer la loi de Z.
   La variable aléatoire Z a-t-elle une espérance ?

Exercice 26

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

   Montrer que f est une densité de probabilité.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes et possédant comme densité la fonction f.

2. Montrer que la variable aléatoire X_1 définie par :

$$X_1 = \begin{cases} \ln|X| & \text{si } X \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de X_1.

3. Prouver que la variable aléatoire $Z = \ln|XY|$ admet comme densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4x\mathrm{e}^x}{\pi^2(\mathrm{e}^{2x}-1)} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \dfrac{2}{\pi^2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4. Montrer que $T = |XY|$ est une variable à densité et donner une densité de T.

5. En déduire la convergence et la valeur des intégrales :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

Lois usuelles à densité

Exercice 27

Dans un salon de coiffure, travaillent cinq coiffeurs. Une coupe dure 20 minutes.
Un client entre et constate que tous les coiffeurs sont occupés et que trois personnes attendent.
Déterminer la loi du temps d'attente de ce client puis calculer son espérance.
(On admettra que les coupes sont indépendantes les unes des autre et qu'elles ont débuté depuis un temps uniformément réparti entre 0 et 20 minutes).

Exercice 28

1. Pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on note $J(a,b)$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t$.
   On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi $\beta(a,b)$ si X admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{J(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   On considère une variable X suivant la loi $\beta(p,q)$, où p et q sont deux entiers naturels non nuls.
   a) Calculer $J(p,q)$.
   b) Calculer l'espérance $\mathrm{E}(X)$ et la variance $\mathrm{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

2. Pour n de $\mathbb{N}^*$, on considère n variables $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.
   Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $Y_k(\omega)$ le k-ième des nombres $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$, quand ceux-ci sont rangés dans l'ordre croissant.
   On a donc par exemple :

$$Y_1(\omega) = \min(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \text{ et } Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

   On admet que, pour tout entier k de $[\![1,n]\!]$, Y_k est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables $X_1, \ldots, X_n$.
   On note, pour $k \in [\![1,n]\!]$, F_k la fonction de répartition de Y_k.
   a) Donner les expressions de F_1 et de F_n.
   b) Déterminer, pour $k \in [\![1,n]\!]$, la fonction de répartition de Y_k.
   c) Déterminer une densité de Y_k ; reconnaître la loi de Y_k et donner son espérance.
   (on remarquera que $j\dbinom{n}{j} = n\dbinom{n-1}{j-1}$ et que $(n-j)\dbinom{n}{j} = n\dbinom{n-1}{j}$).

Exercice 29
Loi de Rayleigh
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. a) Vérifier que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
   b) Déterminer la fonction de répartition F de X.
2. Déterminer la loi de $Y = X^2$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. Déterminer la loi de $Z = \exp\left(-\dfrac{X^2}{2}\right)$.

Exercice 30
Loi de Laplace
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $D = X - Y$.
   La loi suivie par D est la loi de Laplace de paramètre λ.
2. Déterminer la loi de $|D|$.
3. Calculer l'espérance et la variance de D.

Exercice 31
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les variables aléatoires Y_n et Z_n définies par :

$$Y_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \quad \text{et} \quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}.$$

1. Montrer par récurrence que Y_n et Z_n ont même loi.
2. En déduire $\mathrm{E}(Y_n)$ et $\mathrm{V}(Y_n)$.

Exercice 32
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
1. a) Déterminer la loi de X^2.
   b) En déduire la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et préciser la loi de X^2.
2. Déterminer la loi de $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Théorèmes limites

Exercice 33
Un joueur joue à pile ou face, l'enjeu à chaque partie étant de 1 euro.
Combien de parties doit-il décider de jouer pour avoir 95% de chances de ne pas perdre plus de 20 euros ?

Exercice 34
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0,1[$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.
1. Déterminer la loi de Y_n.
2. Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$, $i \neq j$. Discuter, suivant les valeurs de i et j, l'indépendance de Y_i et Y_j.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
   Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à p^2.

Exercice 35
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale négative de paramètre (r,p) si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-p_n) = \lambda$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale négative de paramètre (n, p_n).
Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 36
Soient $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée et $x \in \mathbb{R}_+^*$.
En considérant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ où $(X_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de Poisson $\mathcal{P}(x)$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x)$$