Combinatoire et dénombrement

Exercice 1
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Indication : calculer $u_{n+1} - u_n$ où $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\binom{n}{k}$.

Exercice 2
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des $(n+1)$-listes formées uniquement de 0 et de 1 et qui contiennent au moins $p+1$ chiffres 1.
En considérant d'une part, pour $p \leqslant k \leqslant n$, l'ensemble E_k des listes de $\mathcal{E}$ ayant exactement $k+1$ chiffres 1 et d'autre part l'ensemble F_k des listes de $\mathcal{E}$ dans lesquelles le $(p+1)$-ième chiffre 1 apparaît en $(k+1)$-ième position, montrer que :

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}2^{n-k}$$

Exercice 3
Suites croissantes
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant p$. Déterminer le cardinal des ensembles suivants :

1. $\mathcal{E}_1 = \{(x_1, \ldots, x_p) \in [\![1,n]\!]^p ; 1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_p \leqslant n\}$
2. $\mathcal{E}_2 = \{(x_1, \ldots, x_p) \in [\![1,n]\!]^p ; 1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_p \leqslant n\}$

Exercice 4
Dérangements
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note D_n l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ n'ayant pas de point fixe et on pose $d_n = \mathrm{Card}(D_n)$. On se propose de démontrer par deux méthodes que :

$$d_n = n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right) \qquad (\star).$$

1. Méthode 1
   En considérant, pour $k \in [\![1,n]\!]$, l'ensemble F_k des permutations de $\mathfrak{S}_n$ fixant l'entier k et en appliquant la formule du crible de Poincaré, montrer la formule $(\star)$.
2. Méthode 2
   a) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ pour $p \in [\![0,n]\!]$.
   b) Montrer que $n! = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k}$.
   c) En déduire la formule $(\star)$.

Espaces probabilisés

Exercice 5
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 3$ et $p \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue p tirages successifs avec remise d'une boule dans cette urne.
Pour $k \in [\![1,p]\!]$, on note x_k le numéro de la k-ième boule tirée.
Déterminer la probabilité pour que :

1. $x_1 < x_p$.
2. la somme des numéros tirés soit égale à $p+2$.
3. deux numéros exactement soient apparus.

Exercice 6
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une boule rouge, une boule blanche et une boule noire. On tire successivement n boules de l'urne avec remise dans l'urne de la boule tirée après chaque tirage.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces n tirages ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule de chaque couleur au cours de ces n tirages ?
3. Quelle est la probabilité pour que la première et la dernière boule tirées soient de la même couleur ?

Exercice 7
Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue n tirages successifs avec remise de la boule tirée. On considère les événements A_n « on obtient, au cours des n tirages, des boules des deux couleurs » et B_n « on obtient, au cours des n tirages, au plus une boule blanche ».
Étudier l'indépendance de A_n et B_n.

Exercice 8
Considérons un pays où il fait beau en moyenne 7 jours sur 10. Dans ce pays, deux stations de radio diffusent chaque matin un belletin météorologique dans la journée. Une longue expérience a montré que la station R avait raison, en moyenne 95 fois sur 100, tandis que la station E n'avait raison, en moyenne, que 90 fois sur 100.
Un certain matin, on doit sortir. La station R annonce qu'il pleuvra et la station E qu'il fera beau.
Doit-on prendre notre parapluie ?
(On fera les hypothèses d'indépendances qui s'imposent et on admettra que chaque station à la même fiabilité dans ses prévisions optimistes et dans ses prévisions pessimistes)

Exercice 9
Un signal binaire (de valeur 1 ou -1) doit transiter par n relais. Au passage de chaque relais, le signal a une probabilité p $(0 < p < 1)$ d'être inversé. On suppose que les relais sont indépendants. On note p_n la probabilité pour que le signal transmis soit identique au signal initial.
Montrer que :

$$p_n = p + (1 - 2p)p_{n-1}$$

En déduire une expression générale de p_n et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10
Ruine des joueurs
Deux joueurs A et B participent à un jeu se déroulant en plusieurs parties indépendantes et identiques.
Avant le début du jeu, A et B disposent d'une mise initiale égale à a et b euros respectivement.
On suppose que la probabilité pour que A (resp. B) gagne une partie est égale à $p \in]0,1[$ (resp. $q = 1 - p$). Si A (resp. B) perd une partie, il donne un euro à B (resp. A).
Le jeu s'achève lorsqu'un joueur est ruiné.
On note $A_{a,b}$ (resp. $B_{a,b}$) l'événement « le jeu s'achève par la ruine du joueur A (resp. B), A et B disposant d'une mise initiale égale à a et b respectivement ».

1. Montrer que :

$$\mathrm{P}(A_{a,b}) = p\mathrm{P}(A_{a+1,b-1}) + q\mathrm{P}(A_{a-1,b+1})$$

2. En posant $u_n = \mathrm{P}(A_{n,a+b-n})$, montrer que :

$$\mathrm{P}(A_{a,b}) = \begin{cases} \dfrac{b}{a+b} & \text{si } p = q = \dfrac{1}{2} \\ \left(\dfrac{q}{p}\right)^a \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^b}{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}} & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

3. Déterminer $\lim\limits_{b \to +\infty} \mathrm{P}(A_{a,b})$. Interpréter ce résultat.
4. Déterminer $\mathrm{P}(B_{a,b})$ puis la probabilité que le jeu s'achève.

Variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 11
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire plusieurs fois au hasard et avec remise une boule de l'urne. On arrête les tirages dès que le dernier numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro obtenu lors du précédent tirage.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. a) Déterminer la probabilité des événements $(X \geqslant 2)$, $(X \geqslant 3)$ et $(X = 2)$.

b) Pour tout $k \in X(\Omega)$, déterminer la probabilité de l'événement $(X \geqslant k)$.

c) En déduire la loi et l'espérance de X, puis la limite de cette dernière lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 12
On joue à pile ou face avec une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est égale à p, celle d'obtenir face étant $q = 1 - p$.
On note P_k (resp. F_k) l'événement « obtenir pile (resp. face) au k-ième lancer ».
On lance indéfiniment la pièce. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux résultats consécutifs identiques.

1. Calculer $\mathrm{P}(X = 2)$ et $\mathrm{P}(X = 3)$ en fonction de p et q.
2. En discutant selon la parité de k, déterminer l'expression de $\mathrm{P}(X = k)$ en fonction de k pour tout $k \geqslant 2$.
3. Calculer $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)$. Que peut-on en conclure ?
4. Calculer l'espérance de X.

Exercice 13
Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche.

1. On effectue des tirages successifs selon le protocole suivant :
   • si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne avec une boule noire ;
   • si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne.
   Soit X la variable aléatoire égale au numéro du tirage amenant la première boule noire.
   a) Déterminer la loi de X et vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1$.
   b) Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
2. On effectue des tirages successifs selon le protocole suivant :
   • si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne avec une boule blanche ;
   • si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne.
   Soit Y la variable aléatoire égale au numéro du tirage amenant la boule blanche.
   a) Déterminer la loi de Y et vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(Y = k) = 1$.
   b) Y admet-elle une espérance ?
3. On propose à un joueur le jeu suivant :
   — si Y prend une valeur paire, alors le joueur gagne Y euros ;
   — si Y prend une valeur impaire, alors le joueur perd Y euros.
   On note G le gain algébrique du joueur.
   Exprimer G en fonction de Y. La variable aléatoire G admet-elle une espérance ?

Exercice 14
Deux urnes U_1 et U_2 contiennent initialement un jeton numéroté 0 et un jeton numéroté 1.
On choisit au hasard et simultanément un jeton de U_1 et un jeton de U_2. On place alors dans U_1 le jeton provenant de U_2 et dans U_2 le jeton provenant de U_1.
On note X_n la variable aléatoire égale à la somme des points des jetons contenus dans l'urne U_1 après n échanges.
On convient de poser $X_0 = 1$.

1. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation entre la loi de X_{n+1} et celle de X_n.
2. Déterminer la loi de X_n.

Lois usuelles discrètes

Exercice 15
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![1, n]\!]$. Une armoire contient n paires de chaussures. on décide d'y prélever au hasard et simultanément $2r$ chaussures.
On s'attend à avoir un certain nombre de chaussures dépareillées. Par conséquent, on considère la variable aléatoire X égale au nombre de paires intactes présentes dans l'échantillon prélevé.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 16
Les boîtes d'allumettes de Banach
Un fumeur a dans chacune de ses poches gauche et droite une boîte d'alumettes contenant initialement N allumettes chacune. Chaque fois qu'il désire fumer, il choisit une boîte au hasard de façon équiprobable et y prend une allumette.
Soit X_N la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restant dans l'autre boîte quand il s'aperçoit que l'une des boîtes est vide.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_N.
2. En convenant que $\mathrm{P}(X_N = N+1) = 0$, montrer que :
$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad 2(N-k)\mathrm{P}(X_N = k) = (2N+1)\mathrm{P}(X_N = k+1) - (k+1)\mathrm{P}(X_N = k+1)$$
En déduire l'espérence $\mathrm{E}(X_N)$ de X_N puis en donner un équivalent.

Exercice 17
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : deux boules portent le numéro 1, deux boules portent le numéro 2,..., deux boules portent le numéro n.
On effectue une succession de tirages de deux boules de cette urne selon le protocole suivant : si les deux boules obtenues portent des numéros différents, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant ; si les deux boules portent le même numéro, elles sont définitivement éliminées.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider complètement l'urne.
On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première paire de boules portant le même numéro et pour $i \in [\![2, n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une i-ème paire de boules portant le même numéro, à partir du retrait d'une $(i-1)$-ième paire de boules.

1. a) Quelle relation lie X_n à $Y_1, \dots, Y_n$?
   b) Déterminer la loi de Y_1. Plus généralement, déterminer pour $i \in [\![1, n]\!]$, la loi de Y_i. Quelle est son espérance ?
   c) En déduire que $\mathrm{E}(X_n) = n^2$.
2. a) Dans les cas $n = 1$, puis $n = 2$, déterminer la loi de X_n.
   b) On suppose $n = 3$. Montrer que :
$$\forall k \geqslant 3, \quad \mathrm{P}(X_3 = k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$$

Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 18
Montrer, à l'aide de fonctions génératrices, qu'il est impossible de biaiser deux dés de façon à ce que la somme des points obtenus suive une loi uniforme.

Exercice 19
On considère une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0; 1[$.
L_1 est la variable aléatoire égale à la longueur de la première série débutant à la première épreuve, une série étant une succession soit de succès soit d'échecs interrompue par l'événement contraire.
L_2 est la variable aléatoire égale à la longueur de la deuxième série débutant après la fin de la première série.
L_3 est la variable aléatoire égale à la longueur de la troisième série débutant après la fin de la deuxième série.
Ainsi, pour une succession d'épreuves débutant par $SSSEESE\ldots$, on a $L_1 = 3, L_2 = 2$ et $L_3 = 1$.

1. Déterminer la loi de L_1 et calculer son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de L_2 et calculer son espérance et sa variance.
3. Déterminer la loi conjointe du couple (L_1, L_2).
   Retrouver la loi de L_2.
4. Les variables aléatoires L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ? (on discutera selon les valeurs de p).
5. Calculer la covariance de L_1 et L_2.
6. Déterminer la loi de $L_1 + L_2$. On distinguera les cas $p = \dfrac{1}{2}$ et $p \neq \dfrac{1}{2}$.
7. Déterminer la loi de L_3.

Exercice 20
Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient initialement n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On effectue une succession de tirages d'une boule de cette urne selon le protocole suivant :

> tant que l'urne n'est pas vide, si à un rang quelconque on obtient la boule portant le numéro k, alors on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k avant de procéder au tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages juste nécessaires pour vider l'urne de toutes ses boules et on note u_n l'espérance de X_n.

1. a) Déterminer les lois de X_1, X_2 et X_3.
   b) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, on a $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1} u_i + 1$.
3. En déduire que $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 21
Marche aléatoire dans $\mathbb{R}^2$
Une puce se trouve initialement à l'origine d'un repère orthonormé du plan.
Elle se déplace par sauts de longueur unité. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le k-ième saut s'effectue dans une direction aléatoire repérée par son angle θ_k par rapport à l'axe (Ox), les variables étant mutuellement indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 2\pi[$.
On note M_n sa position après n déplacement, en convenant que $M_0 = 0$. On note X_n et Y_n les variables aléatoires égales respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée de M_n.

1. Exprimer X_n et Y_n en fonction de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$.
2. Montrer que les variables aléatoires X_n et Y_n sont centrées et calculer leur variance.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n)$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X_n^2, Y_n^2)$.
   Que peut-on en déduire ?
5. Calculer l'espérance de D_n^2 où D_n est la variable aléatoire égale à la distance de M_n à l'origine.
6. a) Montrer que :
$$\mathrm{P}(D_n \leqslant \sqrt{n}) = \mathrm{P}\left(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \cos(\theta_i - \theta_j) \leqslant 0\right)$$
   b) En déduire $\mathrm{P}(D_n \leqslant \sqrt{n})$ et interpréter ce résultat.

Exercice 22
Loi Zeta
On considère la fonction ζ de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par :
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$
Soit $s > 1$. Une variable aléatoire X suit une loi Zeta de paramètre s si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi Zeta de paramètre s.
   On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et, pour tout $p \in \mathcal{P}$, A_p l'événement « p divise X ».
   a) Calculer $\mathrm{P}(A_p)$.
   b) Montrer que les événements $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont mutuellement indépendants.
   c) En considérant $\bigcap\limits_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$, montrer l'identité d'Euler :
$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

2. Soient X une variable aléatoire suivant une loi Zeta de paramètre s et Y une variable aléatoire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
   En considérant la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$, montrer que
   $$\zeta(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{s+1}} = \zeta(s)$$
   où φ est la fonction indicatrice d'Euler égale au nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n.
3. Soient X et X' deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois Zeta de paramètres $s > 1$ et $s' > 1$ respectivement.
   Montrer que la variable aléatoire $X \wedge X'$ égale au PGCD de X et X' suit la loi Zeta de paramètre $s + s'$.

Variables aléatoires réelles à densité

Exercice 23

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(2)} \times \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\end{cases}$$

1. a) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X.
   b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   c) Déterminer l'existence et la valeur éventuelle de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
2. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$ et $N = \left[\dfrac{1}{X}\right]$ (N est la partie entière de $\dfrac{1}{X}$).
   a) Déterminer la loi de Y.
   b) Déterminer la loi de N.
   c) Y et N ont-elles une espérance ?
3. On pose $Z = Y - N$.
   Déterminer la loi de Z.
   La variable aléatoire Z a-t-elle une espérance ?

Exercice 24

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$
   Montrer que f est une densité de probabilité.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes et possédant comme densité la fonction f.

2. Montrer que la variable aléatoire X_1 définie par :
   $$X_1 = \begin{cases} \ln|X| & \text{si } X \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de X_1.
3. Prouver que la variable aléatoire $Z = \ln|XY|$ admet comme densité la fonction g définie par :
   $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4x\mathrm{e}^x}{\pi^2(\mathrm{e}^{2x} - 1)} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \dfrac{2}{\pi^2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
4. Montrer que $T = |XY|$ est une variable à densité et donner une densité de T.
5. En déduire la convergence et la valeur des intégrales :
   $$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

Lois usuelles à densité

Exercice 25
On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$, et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Y_k = \max(X_1, \dots, X_k)$, $k \geqslant 1$.
2. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z_k = -Y_k$.
3. En déduire la probabilité de l'événement $A_n = (X_n \geqslant \max(X_1, \dots, X_{n-1}))$ pour $n \geqslant 2$.

Exercice 26
Un appareil électrique fonctionne avec 3 piles P_k, $k \in \{1,2,3\}$. La durée de vie de la pile P_i est une variable aléatoire notée X_k. Les 3 variables X_k sont indépendantes et suivent toutes la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
L'appareil s'arrête de fonctionner dès que 2 piles sont usées.
Soit T la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement de l'appareil électrique.
Déterminer la loi de T et calculer son espérance $\mathrm{E}(T)$ si elle existe.

Exercice 27
Soient X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et ε une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{-1;1\}$ avec $\mathrm{P}(\varepsilon = 1) = p$, $p \in]0;1[$.
On suppose que X et ε sont indépendantes et on considère la variable aléatoire $Y = \varepsilon X$.

1. Montrer que X et Y ont même loi.
2. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$ et on pose $S = X + Y$.
   a) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
   b) Calculer $\mathrm{P}(S = 0)$.
   Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
   c) Déterminer la loi de S.

Théorèmes limites

Exercice 28
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires qui convergent en probabilité vers X et Y respectivement.
Montrer que $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_nY_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $X+Y$ et XY respectivement.

Exercice 29
Théorème de Césaro et convergence en probabilité
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathrm{P}_{X_n} = \dfrac{1}{n}\delta_n + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\delta_0$. Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ mais que $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ ne converge pas vers 0 en probabilité.

Exercice 30
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ qui suit la loi de Poisson de paramètre réel inconnu $\lambda > 0$.
Pour n entier $\geqslant 1$, soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-échantillon i.i.d. de la loi de X. On pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
s désigne un entier naturel.

1. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $(S_n = s)$.
2. Soit T_n la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ par $T_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{S_n}$.
   Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\exp(-\lambda)$.

Exercice 31
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, $p \in]0,1[$, $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes, suivant la même loi uniforme à densité sur $[0,n]$, et N_n une variable aléatoire indépendante des X_i suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
On pose : $U_n = \max(X_0, \dots, X_n)$, $V_n = \min(X_0, \dots, X_n)$, $W_n = \min(X_0, \dots, X_{N_n})$

1. Déterminer la loi de U_n, son espérance et sa variance.
2. Montrer que la loi de V_n est celle de $n - U_n$. En déduire $\mathrm{E}(V_n)$ et $\mathrm{V}(V_n)$.

3. Étudier la convergence en loi de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Étudier la convergence en loi de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 32
En considérant la somme de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ et en appliquant le théorème limite central, montrer que :

$$\int_0^n x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \sim \frac{(n-1)!}{2}$$

En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_n^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.