Combinatoire et dénombrement

Exercice 1

Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de parties de E formées de k éléments ?
2. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ?
3. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E ?
4. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E, tel que le premier élément est le plus petit et le dernier élément est le plus grand ?
5. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ordonnés dans l'ordre strictement croissant ?

Exercice 2

On dispose d'une urne avec 8 boules blanches, 7 boules noires et 5 boules vertes.

1. Quel est le nombre de tirages simultanés de 5 boules donnant 2 blanches, 1 noire et 2 vertes ?
2. Quel nombre de tirages successifs et sans remise de 5 boules donnant 2 blanches, 1 noire et 2 vertes ? 2 blanches, 1 noire et 2 vertes *dans cet ordre* ?
3. Mêmes questions avec des tirages successifs et avec remise de 5 boules dans l'urne.

Exercice 3

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}$. On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments.

1. Calculer S_1^4, S_4^1 et S_4^4.
2. Plus généralement calculer S_1^p, S_n^1 et S_n^n.

Exercice 4

Dans une classe il y a autant de filles que de garçons. Tous les éléves étudient au moins une langue. Parmi eux : 10 étudient l'espagnol, 15 étudient l'allemand, 20 étudient l'anglais, 7 étudient l'espagnol et l'allemand, 8 étudient l'allemand et l'anglais, 9 étudient l'anglais et l'espagnol. Quel est l'effectif de la classe ?

Exercice 5

Un joueur de poker reçoit une "main" de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (sans joker). Donner le nombre total de mains différentes que le joueur peut obtenir. Quel est le nombre de mains contenant :

1. une seule paire ?
2. deux paires ?
3. un brelan ?
4. un carré ?
5. un full ?
6. une couleur ?
7. une paire de roi ?
8. au moins un coeur ?

Exercice 6

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}$. On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments.

1. On pose $E = [\![1,p]\!]$ et $F = [\![1,n]\!]$. On note $S(E,F)$ l'ensemble des surjections de E dans F. Donner une relation simple entre $S(E,F)$ et les ensembles
   $A_k = \{f : E \longrightarrow F \ / \ k$ n'a pas d'antécédent par $f\}$, où $k \in F$.
2. En déduire, en utilisant la formule du crible de Poincaré que :

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

Exercice 7

1. On considère deux suites de nombres réels $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k$.

   Montrer la relation réciproque suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k$$

2. On appelle dérangement de n éléments une permutation où les n éléments changent de place, et on note $d(n)$ le nombre de dérangements de n éléments.

   Vérifier que : $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d(n-k)$. En déduire la valeur de d_n en fonction de n.

Exercice 8
Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cap B = \emptyset$? tels que $A \cup B = E$?
2. Combien y-a-t-il de triplets (A, B, C) de parties de E tels que $A \cup B \cup C = E$?

Espaces probabilisés

Exercice 9
On considère une classe de n élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.

1. Calculez la probabilité que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour. À partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5 ? A 0.8 ? Comment interpréter ce résultat ?
2. Calculez la probabilité qu'au moins un élève soit né le même jour que le professeur. Comparez le résultat obtenu avec le précédent.

Exercice 10
Un bibliothécaire fou permute au hasard les n livres de sa bibliothèque.

1. (a) Quelle est la probabilité que les volumes 1 et 2 de “Guerre et Paix” de Tolstoï se retrouvent côte à côte dans le bon ordre ?
   (b) Dans n'importe quel ordre ?
2. (a) Quelle est la probabilité qu'aucun livre n'ait changé de place ?
   (b) Qu'exactement un livre ait changé de place ?
   (c) Qu'exactement deux livres aient changé de place ?

Exercice 11
Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
Ma voisine a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité pour que le plus âgé soit un garçon ?

Exercice 12
On cherche un parapluie qui avec la probabilité $p/7$ se trouve dans l'un quelconque des sept étages d'un immeuble $(0 \leqslant p \leqslant 1)$.

1. Quelle est la probabilité que la parapluie se trouve dans l'immeuble ?
2. On a exploré en vain les six premiers étages. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au septième étage ?

Exercice 13

1. On considère n urnes ($n \geqslant 1$), numérotées de 1 à n. L'urne numérotée k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
2. On considère une infinité d'urnes. On en choisit une au hasard de telle sorte que la probabilité de choisir l'une numéro n soit égale à $\frac{1}{2^n}$ (avec $n \geq 1$). L'urne numéro n est composée de 2^n boules dont une seule blanche. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Exercice 14
On jette deux dès non-pipés, un noir et un blanc. Montrez que les évènements suivants sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants :

– «le chiffre du dè noir est pair»,
– «le chiffre du dè blanc est impair»,
– «les chiffres des deux dès ont même parité».

Exercice 15
On dispose de 2 dès A et B. Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir "pile" soit 1/3.
- Si on obtient "pile" on décide de jouer uniquement avec le dè A ;
- Si on obtient "face" on décide de jouer uniquement avec le dè B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au premier coup, puis au deux premiers coups. Ces deux évènements sont-ils indépendants ?
2. On a obtenu "rouge" aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au troisième coup.
3. On a obtenu "rouge" aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dè A.

Exercice 16
Un joueur joue à un jeu d'argent contre le casino. On suppose qu'initialement la fortune du joueur est de $a \in \mathbb{N}$ et celle du casino de $N - a$, avec $0 \leqslant a \leqslant N$ et $N \in \mathbb{N}$.
Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et $p \neq 1/2$.
A chaque répétition du jeu on suppose que le joueur gagne 1 euros avec probabilité p ou perd 1 euros avec probabilité $q = 1 - p$. Si on note x_n la fortune du joueur à l'issue du n^e jeu, alors :

$$x_0 = a \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 \text{ avec la probabilité } p \\ x_n - 1 \text{ avec la probabilité } q \end{cases}.$$

Le jeu s'arrête dès que x_n prend la valeur 0 (le joueur est ruiné) ou la valeur N (le casino est ruiné).

1. Soit u_a la probabilité que le joueur soit ruiné, étant initialement parti d'une fortune de a. On a en particulier $u_0 = 1$ et $u_N = 0$.
   (a) Montrer que pour tout entier a tel que $1 \leq a \leq N - 1$, on a :
   $$u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}.$$
   (b) Vérifier que :
   $$u_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$
   Déterminer la limite de u_a lorsque $N \to +\infty$ et interpréter le résultat.
2. De même, calculer la probabilité v_a que le casino soit ruiné, le joueur étant initialement parti d'une fortune de a.
3. Calculer la somme $u_a + v_a$. En déduire la probabilité que le joueur et le casino s'affrontent indéfiniment.
4. Reprendre les calculs dans le cas $p = q = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 17
$\varphi(n)$ désigne le nombre d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n, premiers avec n. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on choisit au hasard un élément de $[\![1; n]\!]$. Déterminer de deux manières différentes la probabilité qu'il soit premier avec n (on pourra utiliser la décomposition de n en facteurs premiers). En déduire la formule :

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

pù $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des nombres premiers qui divisent n

Exercice 18
À chaque repas, un lion mange soit un zèbre avec probabilité $\frac{1}{3}$, soit une gazelle avec probabilité $\frac{2}{3}$. On suppose que les compositions des repas du lion sont indépendantes entre elles. On note u_n la probabilité que le lion mange pour la première fois deux gazelles consécutives à son $n^{\text{ième}}$ repas ($n \geq 2$).

1. Vérifier que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}.u_{n+1} + \frac{2}{9}.u_n$$
2. En déduire la valeur de u_n en fonction de $n \geq 2$.

Exercice 19
On considère une suite lancers indépendants d'une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p et la probabilité d'obtenir "face" est $q = 1 - p$ ($p \in]0, 1[$). "pile" (resp. "face") sera noté en abrégé P (resp. F).

1. Soit $n \geqslant 1$. On considère l'événement A_n : "La séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $(n - 1)$ et n." Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité de l'événement A : "La séquence PF apparaît au moins une fois".

3. Soit B l'événement : "La séquence PP apparaît sans qu'il n'y ait eu de séquence PF auparavant". Calculer $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 20
On dispose d'une urne contenant initialement une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée.
On effectue des lancers successifs et indépendants de la pièce :
• si on obtient « pile » alors on tire une boule au hasard dans l'urne et on arrête les lancers ;
• si on obtient « face » alors on ajoute une boule noire dans l'urne et on continue les lancers.

1. Expliquer pourquoi cette expérience se termine presque sûrement au bout d'un nombre fini de lancers.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 21
On lance 4 dès équilibrés, on note $X =$"le nombre de numéros différents sortis". Déterminer la loi de X puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 22
On effectue un tirage simultané de n boules dans une urne composée de N boules numérotées de 1 à N. On note X le plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$.
3. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 23
On considère une urne de taille $N > 1$, contenant r boules blanches et $N - r$ boules noires ($0 < r \leq N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise, jusqu'à l'obtention de toutes les boules blanches, et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela.

1. Dans le cas $r = 1$, reconnaître la loi de X. Donner son espérance. Même question dans le cas $r = N$.
2. Le cas général : $1 < r < N$.
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Soit k l'une de ces valeurs. Vérifier que :
   $$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$
3. Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}$.

Exercice 24
Une urne contient $N \geq 1$ boules dont $r \geq 1$ sont rouges et les autres sont blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules. Soit $n \in [\![1, r]\!]$. On appelle X_n le rang d'apparition de la $n^{\text{ème}}$ boule rouge. Trouver la loi de X_n.
Faire le lien avec l'exercice précédent.

Exercice 25

1. Soient $N \in \mathbb{N}$ et X une vard vérifiant : $X(\Omega) \subset [\![0, N]\!]$.
   Montrer que : $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X > k)$.
2. On considère une urne de N boules numérotées. On effectue un tirage simultané de n boules, et on note X le plus grand numéro obtenu. Déterminer $\mathrm{E}(X)$.

Exercice 26
Dans le cadre des variables discrètes finies, la notion d'entropie (de Shannon) s'introduit simplement. Elle donne une mesure de la quantité minimale d'information nécessaire pour "coder" le résultat d'une variable aléatoire X. C'est une notion très utilisée en théorie de l'information.

On se donne X une variable discrète finie à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$. On appelle alors entropie de X le réel :

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k) = -\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \ln\big(\mathbb{P}(X = x)\big)$$

avec la convention $x \ln(x) = 0$ si $x = 0$.

1. (a) Montrer que si $x \geq 0$: $-x \ln(x) \leq 1 - x$.
   (b) Si $n = \text{ Card } \big(X(\Omega)\big)$, montrer que $0 \leq H(X) \leq \ln(n)$.
2. Montrer que $H(X) = 0$ si, et seulement si, X est constante.
3. On pose $n = \text{ Card } \big(X(\Omega)\big)$. Alors :

$$H(X) = \ln(n) \iff X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$$

Exercice 27
On effectue des lancers indépendants d'une pièce qui donne pile avec probabilité $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé on note X_n le temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ pile.

1. Donner $X_n(\Omega)$.
2. Pour $k \in X_n(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}(X_n = k)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X_n < +\infty)$.
4. Existence et calcul de $\mathrm{E}(X_n)$.

Exercice 28
Soit X une vard vérifiant : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$.
2. On suppose que X admet une espérance.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant n\mathbb{P}(X > n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$.
   (b) En déduire que la série de terme général $\mathbb{P}(X > n)$ converge et que sa somme vaut $\mathrm{E}(X)$.
3. Réciproquement : on suppose que $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge. Montrer qu'alors la série $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} k\mathbb{P}(X = k)$ converge et que X admet une espérance.
4. Énoncer le théorème ainsi établi.
5. On effectue des tirages d'une boule avec remise dans une urne de n boules numérotées. On arrête les tirages lorsque le numéro de la boule tirée est supérieur ou égal au numéro de la boule obtenue au précédent tirage. On note X le nombre de tirages effectués.
   (a) Déterminer $X(\Omega)$.
   (b) Calculer $\mathrm{E}(X)$.

Exercice 29
On reprend l'exemple de la ruine du joueur.
Un joueur joue à un jeu d'argent contre le casino. On suppose qu'initialement la fortune du casino de est b, avec $b \in \mathbb{N}$.
Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$.
A chaque répétition du jeu on suppose que le joueur gagne 1 euros avec probabilité p ou perd 1 euros avec probabilité $q = 1 - p$.
On note X_a la variable aléatoire égale au nombre de tours de jeu avant que le joueur ou le casino soit ruiné, lors d'une partie où le joueur commence avec une fortune initiale de a euros.
Si ceci ne se produit jamais, on pose $X_a = -1$. On rappelle qu'on a démontré que $\mathbb{P}(X_a = -1)$ (et que c'est le toujours le joueur qui est ruiné si $p \leq q$).
On admet que X_a admet une espérance qu'on note $\mathrm{E}(X_a)$. On a $\mathrm{E}(X_0) = \mathrm{E}(X_{a+b}) = 0$.

1. Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, a+b-1]\!]$, montrer que :

$$\mathbb{P}(X_k = j) = q\mathbb{P}(X_{k-1} = j-1) + p\mathbb{P}(X_{k+1} = j-1)$$

   En déduire que $\mathrm{E}(X_k) = 1 + q\mathrm{E}(X_{k-1}) + p\mathrm{E}(X_{k+1})$.

2. Pour $p = q$.
   (a) Montrer l'existence d'un réel α tel que la variable $Y_k = X_k + \alpha k^2$ ait une espérance qui vérifie :
   $$\forall k \geq 1, \quad \mathrm{E}(Y_k) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(Y_{k+1}) + \frac{1}{2}\mathrm{E}(Y_{k-1})$$
   (b) En utilisant la partie I montrer que $\mathrm{E}(X_a) = ab$. Calculer $\lim\limits_{b \to +\infty} \mathrm{E}(X_a)$. Interprétation ?
3. Pour $p \neq q$.
   (a) Montrer l'existence d'un réel β tel que la variable $Z_k = X_k + \beta k$ ait une espérance qui vérifie :
   $$\forall k \geq 1, \quad \mathrm{E}(Z_k) = p\mathrm{E}(Z_{k+1}) + q\mathrm{E}(Z_{k-1})$$
   (b) En utilisant la partie I montrer que $\mathrm{E}(X_a) = \dfrac{1}{p-q}\left(\dfrac{(a+b)(x^a - 1)}{x^{a+b} - 1} - a\right)$.
   (c) Quelle est la limite de $\mathrm{E}(X_a)$ lorsque $b \to +\infty$ dans le cas $p < q$?

Exercice 30
Soit $p \in]0, 1[$.
On considère une plante qui peut donner naissance à deux descendants avec la probabilité p, ou à aucun descendant avec la probabilité $1 - p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de descendants issus de la $n^{\text{ème}}$ génération, c'est-à-dire le nombre de descendants de notre plante à la $(n + 1)^{\text{ème}}$ génération.
On note aussi f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = px^2 + (1 - p)$.
- Montrer que f est strictement croissante sur $[0, 1]$.
- On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1 - p$ et :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$
  Montrer qu'elle est bien défnie, puis étudier sa monotonie et sa convergence.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une relation entre $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 0)$.
- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 31
On considère une urne contenant initialement une seule boule, celle-ci étant de couleur noire.
On ajoute ensuite une boule blanche, et on tire une boule. Si elle est noire on arrête, sinon on continue selon le processus suivant :
• *avant le k-ième tirage, on remet la boule blanche tirée dans l'urne, on ajoute encore k boules blanches supplémentaires, et on tire alors une nouvelle boule.*
Les tirages ne s'arrêtent que lorsqu'on a obtenu une boule noire.
On note X le nombre de tirages effectués. Montrer que $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$.

Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 32
Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli.Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Exercice 33
On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(p)$.
1. Déterminer la loi des variables aléatoires $Y = \min(X_1, X_2)$ et $Z = X_1 + X_2$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$.

Exercice 34
Un élément chimique émet des électrons pendant une période T. Le nombre d'électrons émis est une variable aléatoire Y qui suit une loi de POISSON de paramètre λ. Chaque électron a une probabilité p d'avoir un effet biologique (on dira qu'il est efficace). Soit Z la variable aléatoire égale au nombre d'électrons efficaces émis pendant une période T.
1. Déterminez la loi du couple (Y, Z).
2. Déterminez la loi de Z. Calculez son espérance.
3. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 35
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suit de VARD i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, et N une VARD de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ indépendante de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{N} X_k$. Déterminer la loi de S.
Faire le lien avec l'exercice précédent.

Exercice 36
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p donnée par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\quad \mathbb{P}(X=n)=p(1-p)^{n-1}\quad \text{où } p\in]0,1[\,.$$

On note V la variable aléatoire égale au minimum de X et de Y et W celle égale à la différence $X-Y$.

1. Déterminez la loi du couple (V,W). Déduisez-en les lois de V et W.
2. Montrez que V et W sont indépendantes.
3. Réciproquement, soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi satisfaisant à
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\quad \mathbb{P}(X=n)\neq 0\,.$$
Les variables aléatoires V et W sont définies comme précédemment.
Montrez que si V et W sont indépendantes, alors X et Y suivent une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ dont on précisera le paramètre.
Indication : calculez de deux façons différentes
$$\frac{\mathbb{P}(\{X=n+1\}\cap\{Y=n\})}{\mathbb{P}(\{X=n\}\cap\{Y=n\})}\,.$$

Exercice 37
On dispose d'une urne contenant $n\geq 2$ boules numérotées de 1 à n. Soit Y une variable uniforme à valeurs dans $Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$. Lorsque Y prend la valeur de y, on tire au hasard y boules dans l'urne. On appelle X la somme des numéros tirés. Pour $k\in[\![1,n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire définie par $X_k=k$ si la boule numéro k a été tirée et $X_k=0$ sinon.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, la loi de X_k.
3. Justifier que $X=\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, en déduire l'espérance de X.

Exercice 38
On dispose d'une arène entourée de n cages numérotées de 1 à n, ainsi que de N souris numérotées de 1 à N. On place les souris au milieu de l'arène et celles-ci se répartissent au hasard, et de manière indépendante, dans les cages.
On note alors Y le nombre de cages vides et X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la cage numéro i est vide et 0 sinon.

1. Pour $i\in[\![1,n]\!]$. Donner la loi de X_i, son espérance et sa variance.
2. Pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$, déterminer $\mathrm{E}(X_iX_j)$ et $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$.
3. Relier Y aux variables X_i, $1\leq i\leq n$. En déduire $\mathrm{E}(Y)$ puis $V(Y)$.
4. Déterminer la probabilité qu'aucune cage ne soit vide.

Exercice 39
Soit $X_0,X_1,\dots,X_N,X_{N+1}$ variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chaque une loi de Bernoulli de même paramètre $p\in]0,1[$.

1. On pose, pour tout $n\in[\![0,N]\!]$, $Y_n=\big(X_n-X_{n+1}\big)^2$. Donner la loi de Y_n.
2. Soit $Z=\sum\limits_{k=1}^{N} Y_k$. Déterminer $V(Z)$.

Exercice 40
On dispose d'une urne de N boules : N_1 blanches et N_2 noires. On en tire n simultanément, et on note $X=$ nombre de boules blanches obtenues. On sait que $X\hookrightarrow\mathcal{H}(N,n,p)$ où $p=\frac{N_1}{N}$. Pour calculer sa variance, on introduit les variables X_k, pour $k\in[\![1,N_1]\!]$, définie par :

$$X_k=\begin{cases}0 & \text{si la boule blanche numéro } k \text{ est tirée}\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$$

Alors $X = \sum_{k=1}^{N_1} X_k$ et on en déduit que $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{N-n}{N-1} np(1-p)$.

Exercice 41

On lance une infinité de fois une pièce truquée de telle sorte qu'elle donne « pile » avec probabilité $p \in]0,1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le numéro du lancer qui donne le n-ième Pile ($X_n = +\infty$ si le n-ième Pile n'est jamais observé). On note aussi $X_0 = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le temps d'attente entre le $(n-1)-$ième et le n-ième succès : $T_n = X_n - X_{n-1}$.
Les VARD $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont alors i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$ (commencer par déterminer la loi de T_n sachant $X_{n-1} = p$).

Variables aléatoires réelles à densité

Exercice 42

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$ et de $X - \lfloor X \rfloor$.

Exercice 43

Soit X une VAR à densité, de fonction de répartition F connue et supposée strictement croissante. Elle admet donc une bijection réciproque $F^{-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où $I = F(\mathbb{R}) \subseteq [0,1]$.
On se donne aussi U VAR de loi $\mathcal{U}([0,1])$.
Montrer que la VAR $F^{-1}(U)$ est à densité et déterminer sa fonction de répartition.
Application : comment simuler une loi $\mathcal{E}(\lambda)$?
Cette méthode se généralise au cas où F est seulement supposée croissante. Elle n'est plus bijective et il faut alors utiliser la notion d'inverse généralisée qui n'est pas au programme...

Exercice 44

On pose $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln t)^2\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Vérifier que f est une densité d'une variable aléatoire X.
2. Calculer $\mathrm{E}(X)$.
3. Soit $Y = \ln(X)$. Comparer $\mathrm{E}(\ln X)$ et $\ln\big(\mathrm{E}(X)\big)$.

Exercice 45

On se donne X une VAR telle que la variable $Y = \ln X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1. Exprimer la fonction de répartition F de X en fonction de μ, σ et de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite Π.
2. En déduire que X est une var à densité et donner une densité de X.
3. Montrer que X admet une espérance et calculer là.

Exercice 46

Soient $n \geq 2$ et $X_1, \ldots, X_n$ n v.a.r. indépendantes de densité $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Existence et calcul de $\mathrm{E}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_1)$.
2. Soit $Y = \min\big(X_i;\ 1 \leq i \leq n\big)$. Déterminer la loi de Y et calculer $\mathrm{E}(Y)$ si elle existe.
3. Soit $Z = \max\big(X_i;\ 1 \leq i \leq n\big)$. Déterminer la loi de Z et étudier l'existence de $\mathrm{E}(Z)$.

Exercice 47

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $U = \frac{X+Y}{2}$ et $V = \frac{X-Y}{2}$.

1. Calculer l'espérance et la variance de U et V.
2. Montrer que U est une var à densité et donner en une.
3. Même question pour V.

On rappelle que si (X,Y) admet f pour densité, alors une densité de $X+Y$ est $h : t \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, t-x)\, dx$.

Exercice 48

On pose : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Donner la fonction de répartition de X, son espérance et sa variance.
3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même densité f. Déterminer une densité de $X_1 + X_2$. (Rappel : si (X_1, X_2) a pour densité g alors $X_1 + X_2$ a pour densité $h : u \longmapsto \int_{\mathbb{R}} g(t, u-t)\, dt$.)

4. *(Bonus)* Dans cette question X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1 et on pose $Z = X - Y$.
   (a) Montrer que Z suit la loi exponentielle bilatèrale.
   (b) On pose $T = |Z|$. Montrer que t suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Exercice 49
On considère deux v.a.r. X et Y, définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, suivant toutes deux la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Soit $t > 0$. Montrer que la v.a.r. $Y - tX$ admet pour densité l'application h définie par :

$$h : x \in \mathbb{R} \longmapsto h(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x > 0 \\ \frac{e^{\frac{x}{t}}}{t+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

2. En déduire une densité de la v.a.r. $Z = \frac{Y}{X}$.
3. Déterminer la loi de la v.a.r. $U = \frac{X}{X+Y}$.

Exercice 50
Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Donner une densité de X^2.
2. Montrer que $Z = X^2 + Y^2$ suit la loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 51
Soient les points de $\mathbb{R}^2$: $A\binom{0}{1}$, $B\binom{1}{0}$ et $O\binom{0}{0}$. On note T le triangle AOB.
Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = a\mathbb{1}_T(x, y),$$

avec $a > 0$.

1. Déterminer la valeur du réel a pour laquelle f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de $X + Y$.

Théorèmes limites

Exercice 52
Un singe tape aléatoirement sur les touches d'une machine à écrire. Montrer qu'avec probabilité 1, il écrira une infinité de fois l'intégralité de n'importe quel livre.

Exercice 53
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 et telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(X_n) = a \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0$$

Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

Exercice 54
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires qui convergent en probabilité vers X et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$..
Montrer que $\big(f(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $f(X)$ respectivement.

Exercice 55
Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

1. On note F_n l'ensemble des **permutations** de $[\![1, n]\!]$. On choisit au hasard une de ces permutations, et on définit la variable aléatoire Y_n égale au nombre de points fixes de cette permutation.
   (a) Montrer que le nombre d'éléments de F_n n'admettant aucun point fixe vaut :

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

   (b) Déterminer la loi de Y_n.
   (c) Montrer que la suite $(Y_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.
2. On note E_n l'ensemble des **applications** de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. On choisit au hasard une de ces applications, et on définit la variable X_n égale au nombre de points fixes de cette application.
   (a) Déterminer la loi de X_n.
   (b) Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

Exercice 56
Dans cet exercice X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, de densité :

$$f(t)=\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}$$

ie de loi $\Gamma(1,n)=\gamma(n))$, avec $n\in\mathbb{N}^*$.
On rappelle que $\mathrm{E}(X)=n$ et $V(X)=n$.

1. Pour tout réel $\lambda>0$, on pose $\psi(\lambda)=\ln\left(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{-\lambda(X-\mathrm{E}(X))})\right)$ (transformée de Legendre de X). Calculer $\psi(\lambda)$.
2. Montrer que pour tout $\lambda>0$, on a $\psi(\lambda)\leq n\dfrac{\lambda^2}{2}$.
3. (a) Montrer que pour tout $x>0$ et tout $\lambda>0$, on a
$$\mathbb{P}(\mathrm{E}(X)-X\geq x)\leq \mathrm{e}^{-\lambda x+\psi(\lambda)}$$
   (b) En déduire que pour tout $x>0$
$$\mathbb{P}(\mathrm{E}(X)-X\geq x)\leq \mathrm{e}^{-x^2/(2n)}$$
4. Comparer l'inégalité que l'on vient d'obtenir avec celle obtenue par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff.

Exercice 57
Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

1. (a) Montrer que $\mathbb{P}(|X-\lambda|\geq\lambda)\leq\dfrac{1}{\lambda}$.
   (b) En déduire l'inégalité $\mathbb{P}(X\geq 2\lambda)\leq\dfrac{1}{\lambda}$.
2. On considère dans toute cette question une variable aléatoire discrète Z définie sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, d'espérance nulle et de variance σ^2.
   (a) Montrer que
$$\forall\, a>0,\forall\, x\geq 0,\mathbb{P}(Z\geq a)\leq\mathbb{P}[(Z+x)^2\geq(a+x)^2]$$
   (b) Montrer que $\forall\, a>0,\forall\, x\geq 0,\mathbb{P}(Z\geq a)\leq\dfrac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}$.
   (c) Montrer que $\forall\, a>0,\mathbb{P}(Z\geq a)\leq\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$.
   (d) En déduire que $\mathbb{P}(X\geq 2\lambda)\leq\dfrac{1}{\lambda+1}$.
3. On note G_X la fonction génératrice de X.
   (a) Montrer que : $\forall\, t\geq 1,\forall\, a>0,\mathbb{P}(X\geq a)\leq\dfrac{G_X(t)}{t^a}$.
   (b) En déduire que $P(X\geq 2\lambda)\leq\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda}$.

Exercice 58
Si X est une variable aléatoire réelle, on appelle transformée de Laplace de X (ou fonction génératrice des moments) la fonction $\mathcal{L}_X$ définie par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \mathcal{L}_X(t)=\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

1. (a) Montrer que $\mathcal{L}_X$ est toujours définie en 0.
   (b) Si X est positive, montrer que $\mathcal{L}_X$ est définie au moins sur $\mathbb{R}^-$.

(c) Calculer $\mathcal{L}_X$ dans les cas suivants : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. On précisera à chaque fois son ensemble de définition

2. (a) Montrer que si X est une variable aléatoire réelle et $t > 0$ tel que e^{tX} admet une espérance, alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathrm{e}^{-ta}\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$$

(b) Dans le cas où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ en déduire :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathrm{e}^{-a^2/2}$$