ECS1.1 - TD N $^\circ$ 10 : Espaces probabilisés

Exercice 1 (Lois usuelles) Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs.
   $X =$ nombre d'objets dans le premier tiroir.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos.
   $X =$ nombre de bosses.
3. Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement et avec remise 10 boules de l'urne.
   $X =$ nombre de boules vertes tirées.
4. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques.
   $X =$ nombre de garçons d'une famille de 3 enfants.
5. On suppose que 1% des trèfles possédent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles.
   $X =$ nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Exercice 2 (Jeux d'argent) Un jeu est dit *équitable* losque l'espérance du gain relatif du joueur est nulle. Pour chacun des jeux suivants, déterminer si le jeu est équitable.

1. Le joueur lance 2 dès. S'il sort 7, il gagne 5 euros, sinon il perd 1 euro.
2. Le joueur mise sur rouge ou noir à la roulette au casino (composée de 18 rouges, 18 noirs et du zéro qui est vert). Pour une mise donnée, la casino paye deux fois la mise en cas de sortie de la bonne couleur (la mise est perdue dans tous les cas).
3. Toujours à la roulette, il joue un numéro plein : s'il gagne, la casino lui paye 36 fois sa mise en cas de sortie du numéro choisi.
4. Le joueur remplit une grille de loto qui coûte ϵ euros : il choisit 6 numéros entre 1 et 49. Si ses numéros sortent, il gagne un million d'euros.

Exercice 3 Une urne contient deux boules marquées 1, deux marquées 2 et une marquée 3. On prélève simultanément deux boules au hasard et on appelle X la somme des numéros marqués sur les deux boules. Déterminer la loi de X son espérance et son écart-type.

Exercice 4 On lance 4 dès équilibrés, on note $X =$"le nombre de numéros différents sortis". Déterminer la loi de X puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 5 (Plus grand numéro obtenu lors d'un tirage simultané)

1. Soit $N \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$.
2. On effectue un tirage simultané de n boules dans une urne composée de N boules numérotées de 1 à N. On note X le plus grand des numéros obtenus.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer l'espérance de X.

Exercice 6 (Loi hypergéométrique)

1. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue n tirages successifs d'une boule sans remise.
   On note $X =$ Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.
2. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue un tirage simultané de n boules.
   On note $X =$ Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.
3. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.
   On note $X =$ Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.

Exercice 7 (Urne vidée de ses boules blanches) On considère une urne de taille $N > 1$, contenant r boules blanches et $N - r$ boules noires ($0 < r < N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise, jusqu'à l'obtention de toutes les boules blanches, et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela.

1. Dans le cas $r = 1$, reconnaître la loi de X. Donner son espérance. Même question dans le cas $r = N$.
2. Le cas général : $1 < r < N$.
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Soit k l'une de ces valeurs. Vérifier que :
   $$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$
3. Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}$.

Exercice 8 (n-ième succès lors de tirages sans remise) Une urne contient $N \geq 1$ boules dont $r \geq 1$ sont rouges et les autres sont blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules. Soit $n \in [\![1, r]\!]$. On appelle X_n le rang d'apparition de la $n^{\text{ème}}$ boule rouge. Trouver la loi de X_n.
Faire le lien avec l'exercice précédent.

Exercice 9 (Une formule de calcul de l'espérance d'une VARD)

1. Soient $N \in \mathbb{N}$ et X une vard vérifiant : $X(\Omega) \subset [\![0, N]\!]$.
   Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X > k)$.
2. On considère une urne de N boules numérotées. On effectue un tirage simultané de n boules, et on note X le plus grand numéro obtenu. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 10 (Exemple de couple discret) On choisit au hasard un nombre X entre 1 et n. On choisit alors au hasard avec équiprobabilité un entier Y entre 1 et X.

1. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.
2. Donner la loi de Y.

Exercice 11 (Minimum et maximum lors de tirages simultanés) On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N. On tire simultanément n jetons de l'urne ($n < N$) et on note X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Pour $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.

Exercice 12 (Expérience en deux étapes) On dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ urnes numérotées de 1 à n : $U_1, U_2, \ldots, U_n$. L'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une urne, on note X le numéro de l'urne choisie, puis on tire une boule au hasard dans l'urne choisie, on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$, en déduire la loi de Y.
2. Déterminer l'espérance de Y.
3. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsque $n \to +\infty$.