ECS1.1 - TD N ° 11 : Introduction aux espaces vectoriels

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, justifier si la partie considérée est un sous-espace vectoriel.

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 = 0\}$
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 0\}$
3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x - y = 0\}$
4. $D = \{(a+b, a-b, a);\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$
5. $E = \{(1+x, x);\ x \in \mathbb{R}\}$
6. $F = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Exercice 2 On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions numériques. Déterminer si les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

1. $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} /\ f \text{ continue } \}$
2. $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} /\ f \text{ paire } \}$
3. $C = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} /\ f \text{ impaire } \}$
4. $D = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} /\ f \text{ s'annule } \}$

Exercice 3 On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Les parties suivantes sont-elles de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. $A = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} /\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée } \}$
2. $B = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} /\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monotone } \}$
3. $C = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} /\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergente } \}$
4. $D = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} /\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ arithmétique } \}$
5. $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} /\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + \dfrac{1}{n+1} u_n\right\}$

Exercice 4 On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Les parties suivantes sont-elles de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$?

1. $A = \{P \in \mathbb{K}[X] /\ 0 \text{ est racine de } P\}$
2. $B = \{P \in \mathbb{K}[X] /\ 0 \text{ est racine double de } P\}$
3. $C = \{P \in \mathbb{K}[X] /\ 0 \text{ est racine au moins d'ordre 2 de } P\}$
4. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé : $D = \{P \in \mathbb{K}[X] /\ \deg(P) = n\}$

Exercice 5 1. Montrer que la partie $A = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & -a-b \end{pmatrix} /\ (a,b) \in \mathbb{K}^2 \right\}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La partie $B_p = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) /\ A^p = 0_n\}$ est-elle un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

On pourra considérer $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$ $\mathbb{K}$-ev. Montrer que $\mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ si et seulement si $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ ou $\mathbb{G} \subset \mathbb{F}$.

Familles libres, génératrices

Exercice 7 Les familles suivantes sont-elles libres (si non, on donnera une combinaison linéaire nulle, dont les coefficients sont non tous nuls) ? génératrices de $\mathbb{R}^3$ (si non, on donnera un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne s'exprime pas en fonctions des vecteurs de la famille) ? Sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \big((2,4,3),(1,5,7)\big) \\ \mathcal{F}_2 &= \big((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)\big) \\ \mathcal{F}_3 &= \big((9,-3,7),(1,8,8),(5,-5,1)\big) \end{aligned}$$

Exercice 8 Les sev de $\mathbb{K}^n$ peuvent être définie de 3 façons différentes :
• Par des équations cartésiennes : $A = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\big\}$.
• Par un paramétrage : $B = \big\{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a);\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\big\}$.
• Par la donnée d'une base (ou d'une famille génératrice) : $C = Vect\Big((1, 2, -1, 0), (0, 1, 3, -1)\Big)$.
Ecrire chacun de ces ensembles sous les trois formes possibles.

Exercice 9 Les famille suivantes sont-elles des familles libres de l'espace vectoriel indiqué ?

1. $\big((X-1)^2, (X-2)^2, (X-3)^2\big)$ dans $\mathbb{R}[X]$
2. $\Big(X^2+1, 2X, 2X^2+X\Big)$ dans $\mathbb{R}[X]$
3. $\Big(x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos(3x), x \mapsto \cos^3 x\Big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
4. $\Big((1)_{n\in\mathbb{N}}, (\cos^2 n)_{n\in\mathbb{N}}, (\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
5. $\Big((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
6. $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 10 Donner une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

1. $\mathbb{E} = \big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \big/ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n\big\}$
2. $\mathbb{F} = \big\{P \in \mathbb{K}[X] /\ 0 \text{ est racine de } P\big\}$
3. $\mathbb{G} = \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$

Exercice 11 On dit qu'une famille de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ (où $n \in \mathbb{N}$) est <u>échelonnée</u> lorsque, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $\deg(P_k) = k$.
Montrer que toute famille échelonnée de polynômes $(P_0, \ldots, P_n)$ forme une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 12 Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $\big(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n\big)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{E}$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\overrightarrow{\varepsilon}_k = \overrightarrow{e}_k + \overrightarrow{e}_{k+1}$.
Montrer que la famille $\big(\overrightarrow{\varepsilon}_1, \ldots, \overrightarrow{\varepsilon}_{n-1}\big)$ est libre.