ECS1.1 - TD N ° 12 : Séries numériques

Exercice 1 Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$	2. $u_n = \frac{n^2-5}{n(2n+1)}$	3. $u_n = \frac{n-2}{2^n-1}$	4. $u_n = \frac{\sqrt[n]{2}-1}{2n+3}$
5. $u_n = n\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$	6. $u_n = \frac{n}{n+1}$	7. $u_n = \frac{\cos(n!)}{n^3+\cos(n!)}$	8. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Exercice 2 Étudier la nature de la série de terme général u_n en fonction des paramètres indiqués :

1. $u_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
2. $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}$
3. $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2), \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 3

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = S_n - \ln(n)$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \dfrac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.
   (a) Montrer que $\ln\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

Exercice 4 Montrer la convergence de la série de terme général u_n puis calculer sa somme :

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$	2. $u_n = \frac{6}{5^{n+2}}$	3. $u_n = \frac{2n(n+1)}{3^n}$	4. $u_n = (-1)^n\frac{n^2+3}{5^n}$
5. $u_n = (-1)^n\frac{2^n}{(n+1)!}$	6. $u_n = \frac{n^2+n+1}{n!}$	7. $u_n = \ln\left(\frac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right)$	8. $u_n = \frac{\binom{n}{k}}{n!}$, $k \in \mathbb{N}^*$ fixé

Exercice 5 On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^n}$.

1. Montrer que cette série converge.
2. On note S la somme de la série, et S_n sa somme partielle de rang n. Vérifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |S - S_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$$
3. Écrire un programme Turbo-Pascal qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

Exercice 6

1. Étudier la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.
2. Établir la convergence de la suite $(P_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$.

Exercice 7 (Critère spécial des séries alternées) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs, convergente vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$.

1. (a) Monter que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ est convergente.
   (c) Montrer que si $\in \mathbb{N}$: $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k u_k\right| \leq u_n$

2. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$. En déduire un contre-exemple ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et les séries $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} v_n$ sont de nature différente (considérer $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ldots$).

Exercice 8 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

Exercice 9 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \sin(x) - x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis montrer que (u_n) est strictement positive et convergente vers 0^+.
2. Dans les questions suivantes, on admettra que : $\sin(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^3}{6}$.
   (a) À l'aide de l'étude la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^3$ converge.
   (b) À l'aide de l'étude la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ diverge.

Exercice 10 (Exemple de série de fonctions ex1.15 Analyse ESCP 2012) Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \ln\big(1 + \dfrac{x^2}{n(1+x^2)}\big)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ la somme partielle de rang n de la série de terme général $u_k(x)$. En considérant les sommes partielles de rangs pairs et celles de rangs impairs, montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ converge pour tout réel x.
   On notera $u(x)$ la somme de cette série.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.
   Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| \leq \ln(1 + \dfrac{1}{n+1})$.
3. Montrer que la série de terme général $(-1)^n \ln(1 + \dfrac{1}{n})$ est convergente. On notera s sa somme.
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
   On pourra considérer $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$, et utiliser le fait que :
   $$|u(x) - s| \leq |u(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - s_n| + |s_n - s|$$
5. Montrer que pour tout $n \geq 1, s_{2n} = \ln\big(\dfrac{(2n!)^2}{2^{4n}(n!)^4}(2n+1)\big)$ et en utilisant l'équivalence de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.