ECS1.1 - TD N ° 13 : Espaces probabilisés quelconques

Exercice 1 On considère une infinité d'urnes. On en choisit une au hasard de telle sorte que la probabilité de choisir l'une numéro n soit égale à $\frac{1}{2^n}$ (avec $n \geq 1$). L'urne numéro n est composée de 2^n boules dont une seule blanche. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Exercice 2 Un enfant lance un galet pour faire des ricochets sur l'eau. On suppose que la probabilité que le galet ricoche pour la $n^{\text{ème}}$ fois, sachant qu'il a ricoché les $n-1$ coups d'avant, est égale à $\frac{1}{n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité p_n que le galet coule après n ricochets ?
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

Exercice 3 Sur un réseau informatique des ordinateurs se transmettent une information de manières indépendantes. On suppose qu'à chaque transmission l'information est transmise correctement avec la même probabilité $p \in [0,1]$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n que l'information soit transmise correctement n fois consécutives.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

Exercice 4 On considère une suite lancers indépendants d'une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p et la probabilité d'obtenir "face" est $q = 1-p$ ($p \in]0,1[$). "pile" (resp. "face") sera noté en abrégé P (resp. F).

1. Soit $n \geqslant 1$. On considère l'événement A_n : "La séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $(n-1)$ et n." Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité de l'événement A : "La séquence PF apparaît au moins une fois".
3. Soit B l'événement : "La séquence PP apparaît sans qu'il n'y ait eu de séquence PF auparavant". Calculer $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 5 On admettra que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ converge, et que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

On dispose d'une urne contenant initialement une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée.
On effectue des lancers successifs et indépendants de la pièce :
• si on obtient « pile » alors on tire une boule au hasard dans l'urne et on arrête les lancers ;
• si on obtient « face » alors on ajoute une boule noire dans l'urne et on continue les lancers.

1. Expliquer pourquoi cette expérience se termine presque sûrement au bout d'un nombre fini de lancers.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Exercice 6 (Lemme de Borel-Cantelli) Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. On note B l'événement $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1} \Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big)$.

On rappelle que cet événement est en fait :

$$B = \{\omega \in \Omega / \ \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}$$

1. On suppose que la série $\displaystyle\sum_k \mathbb{P}(A_k)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.
2. On suppose que les événements (A_n) sont indépendants et que la série $\displaystyle\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ est divergente.
   (a) Montrer que l'événement $\overline{B}$ est égal à $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1} \Big(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}\Big)$, où $\overline{M}$ désigne l'événement contraire de l'événement M.
   (b) Exprimer $\mathbb{P}\Big(\displaystyle\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\Big)$ en fonction des p_k.

(c) Montrer que la série $\sum_k \ln(1 - p_k)$ est divergente.

(d) En déduire que $\mathbb{P}(B) = 1$.

3. Un singe tape aléatoirement sur les touches d'une machine à écrire. Montrer qu'avec probabilité 1, il écrira une infinité de fois l'intégralité de n'importe quel livre.

4. Soit α un réel strictement positif et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout n, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n^\alpha}$.

   (a) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$.

   (b) On suppose que $0 < \alpha < 1$. Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n / X_n = 1\}$ contient une infinité d'éléments.

   (c) On suppose que $\alpha > 1$. Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n \mid X_n = 1\}$ est fini.