ECS1.1 - TD N ° 1 : Logique, ensembles, applications

Exercice 1 Écrire avec les quantificateurs et les connecteurs appropriés les propositions mathématiques suivantes :

1. Il existe un rationnel compris entre $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.
2. Il n'existe pas d'entier naturel supérieur ou égal à tous les autres.
3. Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers naturels sont nuls.

Exercice 2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 3 Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Sinon donner leur négation :

1. $\exists A \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n} \leqslant A$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists n \in \mathbb{N}^* /\ \frac{1}{n} \leqslant x$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}^* /\ \frac{1}{n} \leqslant x$

Exercice 4 Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E, on pose :

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

1. Montrer que : $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
2. Soient A, B et C trois parties de E vérifiant : $A \Delta B = A \Delta C$. Montrer que : $B = C$. Si $A \cup B = A \cup C$ peut-on dire que $B = C$?

Exercice 5

1. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ pour $E = \{a, b, c, d\}$; a, b, c, d étant distincts deux à deux.
2. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ pour un ensemble à deux éléments.

Exercice 6 Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

1. Montrer que : $\overline{A} \subset B \iff A \cup B = E$.
2. Démontrer que : $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C$.
3. Démontrer que : $\begin{cases} A \cup B = A \cap C \\ A \cap B = A \cup C \end{cases} \iff A = B = C$.

Exercice 7

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$.
2. On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$$

Exercice 8 On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) + 2x \end{array}$$

1. Est-ce que l'application f est injective ? surjective ? bijective ?
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution réelle, et que cette solution est strictement positive.

Exercice 9 On considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

1. Est-elle injective sur $\mathbb{R}$? surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$?
2. Montrer que $f_{|\mathbb{R}^+}$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer son application réciproque $f^{-1}_{|\mathbb{R}^+}$.
3. De même montrer que $f_{|\mathbb{R}^-}$ est bijective de $\mathbb{R}^-$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer son application réciproque $f^{-1}_{|\mathbb{R}^-}$.
4. f est-elle injective sur $\mathbb{N}$? bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$? de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$?

Exercice 10 Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f \equiv Id_E$, alors g est surjective et f est injective.
2. On suppose que $g \circ f \equiv Id_E$, et que l'une des deux applications f ou g est bijective. Montrer que l'autre est aussi bijective.
3. Monter que si $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bijectives, alors f et g sont bijectives.

Exercice 11 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. On considère l'application suivante :

$$h: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \times G \\ x & \longmapsto & \big(f(x), g(x)\big) \end{array}$$

1. Montrer que si f ou g est injective alors h l'est aussi. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si h est surjective, alors f et g le sont aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Dans la recherche de contre-exemples, on pourra considérer les fonctions $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2 \in \mathbb{R}^+$ *et* $g : x \in \mathbb{R} \longrightarrow (x-1)^2 \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 12 Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On considère A_1 et A_2 deux parties de E et B_1 et B_2 deux parties de F.

1. Montrer que :

$$f\left(A_1 \cup A_2\right) = f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right) \text{ et } f\left(A_1 \cap A_2\right) \subset f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right).$$

2. Montrer que :

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(B_1 \cup B_2\right) &= f^{-1}\left(B_1\right) \cup f^{-1}\left(B_2\right) \text{ et} \\ f^{-1}\left(B_1 \cap B_2\right) &= f^{-1}\left(B_1\right) \cap f^{-1}\left(B_2\right). \end{aligned}$$

Exercice 13 Soient E un ensemble non vide et $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad A \cap B = \emptyset \implies f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

Démontrer les propriétés suivantes :

1. $f(\emptyset) = 0$
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad A \subset B \implies f(A) \leqslant f(B)$