ECS1.1 - TD N ° 2 : Dénombrements, calculs de sommes

Exercice 1 Combien de numéros de téléphone peut-on attribuer en France, sachant que :
• L'indicatif de région est 01, 02, 03, 04 ou 05.
• Les deux chiffres suivant doivent être distincts.
• De nouveaux numéros "internet" sont disponibles, commençant tous par 08.

Exercice 2 Un étudiant en ECS veut colorier ses notes de cours en attribuant la même couleur pour chaque matière : histoire, géographie, culture générale, mathématiques, informatique, LV1 et LV2. Il dispose de 10 couleurs différentes.

1. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
2. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte que chaque matière ait une couleur différente des autres ?
3. On choisit autant de couleurs différentes qu'il y a de matières. Combien y a t-il de coloriages possibles en utilisant seulement ces couleurs ? De sorte que chaque matière ait une couleur différente des autres ?
4. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte qu'au moins deux matières aient la même couleur ?
5. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte qu'exactement deux matières aient la même couleur ?

Exercice 3 Dans une urne, on place n boules blanches et une noire. On tire simultanément k boules.

1. Combien y-a-t-il de tirages sans boule noire.
2. Combien y-a-t-il de tirages avec au moins une boule noire ?
3. Combien y-a-t-il de tirages possibles en tout ? Quelle propriété du cours venez-vous de démontrer ?

Exercice 4 On dispose d'une urne avec 8 boules blanches, 7 boules noires et 5 boules vertes.

1. Quel est le nombre de tirages simultanés de 5 boules donnant 2 blanches, 1 noire et 2 vertes ?
2. Quel nombre de tirages successifs et sans remise de 5 boules donnant 2 blanches, 1 noire et 2 vertes ? 2 blanches, 1 noire et 2 vertes *dans cet ordre* ?
3. Mêmes questions avec des tirages successifs et avec remise de 5 boules dans l'urne.

Exercice 5 Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de parties de E formées de k éléments ?
2. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ?
3. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E ?
4. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E, tel que le premier élément est le plus petit et le dernier élément est le plus grand ?
5. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ordonnés dans l'ordre strictement croissant ?

Exercice 6

1. Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot ECS ? du mot FINANCE ? du mot ANAGRAMME ?
2. Combien y a-t-il de mots composés de 5 lettres ? de 5 lettres distinctes ? de 5 lettres distinctes dans l'ordre alphabétique ? de 5 lettres et de sorte qu'il soit un palindrome ?

Exercice 7 Soit $(n, p) \in \mathbb{N}$. On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments.

1. Calculer S_1^4, S_4^1 et S_4^4.
2. Plus généralement calculer S_1^p, S_n^1 et S_n^n.

Exercice 8 Dans une classe il y a autant de filles que de garçons. Tous les éléves étudient au moins une langue. Parmi eux : 10 étudient l'espagnol, 15 étudient l'allemand, 20 étudient l'anglais, 7 étudient l'espagnol et l'allemand, 8 étudient l'allemand et l'anglais, 9 étudient l'anglais et l'espagnol. Quel est l'effectif de la classe ?

Exercice 9 Un joueur de poker reçoit une "main" de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (sans joker). Donner le nombre total de mains différentes que le joueur peut obtenir. Quel est le nombre de mains contenant :

1. une seule paire ?	2. deux paires ?	3. un brelan ?
4. un carré ?	5. un full ?	6. une couleur ?
7. une paire de roi ?	8. au moins un coeur ?	

Exercice 10 Calculer les sommes suivantes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (éventuellement non nul) :

$$\sum_{k=1}^{n} 1, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} j\right), \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j), \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1, \quad \prod_{k=1}^{n} k, \quad \prod_{k=0}^{n}(2k+1), \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}.$$

Exercice 11 Calculer les sommes et produits suivant, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (éventuellement non nul) :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right), \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 12 Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$. Calculer la somme :

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}$$

Exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

$$1. \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i} \qquad 2. \quad \sum_{1 \leq j < i \leq n} ij$$

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les sommes

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \quad S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}, \quad T_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$$

1. Calculer A_n et B_n en fonction de n.
2. En déduire S_n et T_n en fonction de n.
3. Déterminer $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$.

Exercice 15 Soit $(n, p) \in \mathbb{N}$. On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments.

1. On pose $E = [\![1, p]\!]$ et $F = [\![1, n]\!]$. On note $S(E, F)$ l'ensemble des surjections de E dans F. Donner une relation simple entre $S(E, F)$ et les ensembles
   $A_k = \{f : E \longrightarrow F \ / \ k$ n'a pas d'antécédent par $f\}$, où $k \in F$.
2. On se donne I une partie de $F = [\![1, n]\!]$ composée de k éléments : $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $0 \leq k \leq n$. Établir que le nombre d'applications pour lesquelles les éléments de I n'ont pas d'antécédents est égale à $(n-k)^p$.
3. En déduire, en utilisant la formule du crible de Poincaré que :

$$n^p - S_n^p = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)^p$$

4. Conclure alors que

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

Exercice 16

1. On considère deux suites de nombres réels $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k$.

   Montrer la relation réciproque suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k$$

2. On appelle dérangement de n éléments une permutation où les n éléments changent de place, et on note $d(n)$ le nombre de dérangements de n éléments.

   Vérifier que : $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d(n-k)$. En déduire la valeur de d_n en fonction de n.