ECS1.1 - TD N ° 3 : Nombres complexes

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations trigonométriques suivantes :
$2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$; $\sin x \leq -\frac{1}{2}$; $\cos(2x)\geq 0$; $\tan x \leq 1$; $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > -1$;
$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$; $\sin^2 x + 3\cos x - 1 < 0$; $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$;
$\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 2 Soit $\theta \in [0, 2\pi]$.

1. Déterminer module et argument de $1+e^{i\theta}$, $1-e^{i\theta}$ et $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$.
2. Faire de même avec : $(1+i)^3$.
3. Donner la forme algébrique de $\frac{1-4i}{1+5i}$.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$, $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$, $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre dans $]0, \pi[$ l'équation : $\cos(n\theta) = 0$.
2. Donner le nombre exact de solutions.

Exercice 5 Linéariser les expressions :
$\cos^6 x$; $\cos^2 x \sin^4 x$; $\sin^5 x$; $\cos^3(2x)\sin^3 x$; $\cos(2x)\cos^3 x$.

Exercice 6 Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$ pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 7 Calculer la somme pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sin(kb+a),$$

où a et b sont deux réels donnés.

Exercice 8

1. Calculer $\cos(5\alpha)$ et $\sin(5\alpha)$ en fonction respectivement de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.
2. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{10}$.

Exercice 9 Résoudre les équations suivantes : $z^4 - i = 0$ et $z^3 = -(2+i)^3$.

Exercice 10

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ xy & = & 2 \end{array}\right.$.
2. On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $u = \omega+\omega^2+\omega^4$ et $v = \omega^3+\omega^5+\omega^6$.
   Calculer $u+v$, uv et en déduire la valeur de u et v.

Exercice 11 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Calculer : $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.

Exercice 12 Il s'agit de montrer que, pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\forall (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \quad \left(\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff \text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \right)$$

1. Montrer que :

$$\text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \implies \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

2. Pour $n \geqslant 2$, quel théorème du cours permet d'affirmer que :

$$\forall (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

3. Vérifier que, pour z_1 et z_2 non nuls :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_1| \implies z_1 \text{ et } z_2 \text{ ont le même argument}$$

4. En déduire par récurrence que, pour $n \geqslant 2$:

$$\forall (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \quad \left(\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \implies \text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \right)$$