

ECS1.1 - TD N° 5 : Calcul matriciel et systèmes linéaires

Exercice 1 Calculer les produits de matrices suivants :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix}$

Exercice 2 (Polynôme annulateur et inversibilité) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 - A - 2I_2 = 0_2$, puis en déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 3 (Calcul de puissances par conjecture) Déterminer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (Calcul de puissances par récurrence) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$. En déduire l'expression de A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 (Calcul de puissances avec un polynôme annulateur)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une relation entre A^3 , A^2 et A .
2. Méthode 1 : Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n A + b_n A^2$. En déduire l'expression de A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Méthode 2 : Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 2X^2 + X$. En déduire l'expression de A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 (Calcul de puissances avec la formule du binôme matricielle)

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$. Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = 0$, puis calculer B^n pour tout $n \geq 3$.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 Déterminer le rang puis résoudre les systèmes linéaires d'inconnues réelles suivants :

- 1) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y - z - t = 3 \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$

Exercice 8 Inverser les matrices suivantes :

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2. \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad 3. \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 Soit $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A, notée $\text{Tr}(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux : $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

1. Montrer que : $\forall (A, B, \lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K}$, $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$ et $\text{Tr}(\lambda.A) = \lambda \times \text{Tr}(A)$.
2. Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
En déduire que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in \text{Gl}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(PAP^{-1}) = \text{Tr}(A)$.
3. Peut-on trouver deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB - BA = I_n$?

Exercice 10

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors : A et M commutent si et seulement si M est diagonale.
2. Montrer que les seules matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres sont les matrices scalaires, c'est-à-dire les matrices de la forme λI_n , avec $\lambda \in \mathbb{K}$.