ECS1.1 - TD N $^\circ$ 12 : Espaces probabilisés

__Calcul des probabilités__ **:**

Exercice 1 Soient A et B des événements aléatoires avec $\mathbb{P}(A) = 1/2$ et $\mathbb{P}(B) = 1/3$.

1. Donnez un encadrement de $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Déterminez $\mathbb{P}(A \cup B)$ lorsque A et B sont incompatibles puis lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$.

Exercice 2 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{P}(\Omega)$ la tribu de ses parties et la probabilité $\mathbb{P}$ définie (partiellement, x et y étant à déterminer) par $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{\omega_3\}) = x$ et $\mathbb{P}(\{\omega_4\}) = y$. Soit les événements $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_3\}$. Pour un événement quelconque C, on désigne son complémentaire par $\overline{C}$.

1. Combien d'événements pouvons nous considérer dans cet exemple ?
2. On donne $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{8}$. Déterminer complètement la probabilité $\mathbb{P}$.
3. Ici, les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ?
4. On rappelle que la différence symétrique $A \Delta B$ peut être définie par $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
Calculer $\mathbb{P}(A \Delta B | \overline{B})$, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle de $A \Delta B$ sachant $\overline{B}$ réalisé.

Exercice 3 On considère une classe de n élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.

1. Calculez la probabilité que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour. À partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5 ? A 0.8 ? Comment interpréter ce résultat ?
2. Calculez la probabilité qu'au moins un élève soit né le même jour que le professeur. Comparez le résultat obtenu avec le précédent.

Exercice 4 Un bibliothécaire fou permute au hasard les n livres de sa bibliothèque.

1. (a) Quelle est la probabilité que les volumes 1 et 2 de "Guerre et Paix" de Tolstoï se retrouvent côte à côte dans le bon ordre ?
   (b) Dans n'importe quel ordre ?
2. (a) Quelle est la probabilité qu'aucun livre n'ait changé de place ?
   (b) Qu'exactement un livre ait changé de place ?
   (c) Qu'exactement deux livres aient changé de place ?

__Probabilités conditionnelles__ **:**

Exercice 5 On considère trois cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard, on expose une face au hasard : elle est rouge.
Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ? (Construisez d'abord un arbre adéquat).

Exercice 6 Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
Ma voisine a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité pour que le plus âgé soit un garçon ?

Exercice 7 On cherche un parapluie qui avec la probabilité $p/7$ se trouve dans l'un quelconque des sept étages d'un immeuble ($0 \leq p \leq 1$).

1. Quelle est la probabilité que la parapluie se trouve dans l'immeuble ?
2. On a exploré en vain les six premiers étages. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au septième étage ?

Exercice 8 Considérons une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.

1. Quelle est la probabilité de la suite "blanc, blanc, rouge" si on tire 3 boules sans remise ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au total deux blanches et une rouge si on tire 3 boules sans remise ?

Exercice 9 On considère n urnes ($n \geq 1$), numérotées de 1 à n. L'urne numérotée k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Exercice 10 Sur Orion, les Rigolus et les Tristus cherchent à faire la paix. Heureusement, il y a trois fois plus de Rigolus que de Tristus. Pour la paix, les Rigolus sont à 60% favorables, 16% y sont opposés et 24% sont sans opinion. Par contre, pour la guerre, les Tristus sont à 68% favorables, 12% opposés et 20% sans opinion. Vous rencontrez par hasard un habitant d'Orion (on ne vous demande pas la probabilité de le rencontrer..) et vous lui demandez son opinion.

1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. S'il vous répond qu'il est favorable à la paix, quelle est la probabilité qu'il soit un Rigolus ?
3. Finalement, s'il vous répond qu'il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il soit un Tristus ?

Indépendance :

Exercice 11 On jette trois dés. Calculez :

1. la probabilité d'avoir exactement un 6.
2. la probabilité d'obtenir au moins un 6.
3. la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques.

Exercice 12 On jette deux dès non-pipés, un noir et un blanc. Montrez que les évènements suivants sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants :

– «le chiffre du dè noir est pair»,
– «le chiffre du dè blanc est impair»,
– «les chiffres des deux dès ont même parité».

Exercice 13

1. On dispose d'une urne contenant 3 boules blanches numérotées de 1 à 3 et deux boules noires numérotées de 4 à 5.
   (a) On tire une à une successivement trois boules de l'urne, sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, deux boules blanches, puis une noire ? Dans n'importe quel ordre ?
   (b) Mêmes question pour des tirages avec remise.
   (c) Calculer la probabilité d'obtenir, deux boules blanches et une noire lors d'un tirage simultané de trois boules.
1. Dans une urne, on place 7 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement avec remise quatre boules de l'urne. On note N l'événement "obtenir une boule noire" et B l'événement "obtenir une boule blanche".
   (a) Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne le résultat (N, N, B, B) dans cet ordre ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches exactement ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?

Exercice 14 On dispose de 2 dès A et B. Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir "pile" soit 1/3.
- Si on obtient "pile" on décide de jouer uniquement avec le dè A ;
- Si on obtient "face" on décide de jouer uniquement avec le dè B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au premier coup, puis au deux premiers coups. Ces deux évènements sont-ils indépendants ?
2. On a obtenu "rouge" aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au troisième coup.
3. On a obtenu "rouge" aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dè A.

Exercice 15 Un joueur joue à un jeu d'argent contre le casino. On suppose qu'initialement la fortune du joueur est de $a \in \mathbb{N}$ et celle du casino de $N - a$, avec $0 \leqslant a \leqslant N$ et $N \in \mathbb{N}$.
Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et $p \neq 1/2$.
A chaque répétition du jeu on suppose que le joueur gagne 1 euros avec probabilité p ou perd 1 euros avec probabilité $q = 1 - p$. Si on note x_n la fortune du joueur à l'issue du n^e jeu, alors :

$$x_0 = a \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 \text{ avec la probabilité } p \\ x_n - 1 \text{ avec la probabilité } q \end{cases}.$$

Le jeu s'arrête dès que x_n prend la valeur 0 (le joueur est ruiné) ou la valeur N (le casino est ruiné).

1. Soit u_a la probabilité que le joueur soit ruiné, étant initialement parti d'une fortune de a. On a en particulier $u_0 = 1$ et $u_N = 0$.
   (a) Montrer que pour tout entier a tel que $1 \leq a \leq N - 1$, on a :
   $$u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}.$$

(b) Vérifier que :

$$u_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

Déterminer la limite de u_a lorsque $N \to +\infty$ et interpréter le résultat.

2. De même, calculer la probabilité v_a que le casino soit ruiné, le joueur étant initialement parti d'une fortune de a.
3. Calculer la somme $u_a + v_a$. En déduire la probabilité que le joueur et le casino s'affrontent indéfiniment.