ECS1.1 - TD N ° 7 : Fonctions usuelles

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = x$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

Exercice 2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. Si f et g sont croissantes sur I alors $f + g$ est croissante sur I.
2. Si f est croissante sur I et g croissante sur J, tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ croissante sur I.
3. Si f et g sont croissantes positives sur I alors $f \times g$ est croissante sur I.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T > 0$. On suppose que f est monotone, montrer que f est constante.

Exercice 4 Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction croissante. Montrer que f a au moins un point fixe. Est-ce vrai si f est décroissante ?
Indications : on pourra poser $\alpha = \sup\left\{x \in [0, 1]/\ f(x) > x\right\}$.

Exercice 5

1. Montrer que : $\forall x > -1, \quad \ln(1 + x) \leq x$.
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 6 Soit $0 < a \leq b$. On pose $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \longmapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$. Etudier la monotonie de f et en déduire que

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

Exercice 7 Pour $x > 0$ simplifier $\left(\exp\left(x^2\right)\right)^{\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}{x}}$.

Exercice 8 Parmi les relations suivantes lesquelles sont exactes :
1) $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ 2) $a^b a^c = a^{bc}$ 3) $a^{2b} = \left(a^b\right)^2$
4) $(ab)^c = a^{\frac{c}{2}} b^{\frac{c}{2}}$ 5) $\left(a^b\right)^c = a^{\left(b^c\right)}$ 6) $\left(a^b\right)^c = (a^c)^b$?

Exercice 9 Résoudre les équations suivantes :
1) $e^x + e^{1-x} = e + 1$ 2) $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$ 3) $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.

Exercice 10 Résoudre les systèmes suivants :
a) $\left\{\begin{array}{l} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{array}\right.$ *b)* $\left\{\begin{array}{l} e^x e^{2y} = 1 \\ 2xy = 1 \end{array}\right.$

Exercice 11 On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{array}{cl} (i) & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y) \\ (ii) & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \end{array}$$

1. Soit f une fonction solution qui n'est pas la fonction nulle.
   (a) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
   (b) Déterminer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$, puis pour $x \in \mathbb{Q}$.
   (c) Montrer que $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq 0$. En déduire que f est croissante.
   (d) En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
2. Conclure.