ECS1.1 - TD N$^\circ$8 : Limites et comparaison des fonctions numériques

Exercice 1

1. **Opérations sur les limites.** Déterminer les limites suivantes. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.
   (a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x+x}$
   (b) $\lim_{x\to 1^+} \ln x \ln(\ln x)$
   (c) $\lim_{x\to 0^+} (\ln(\sin x) - \ln x)$
   (d) $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}$
   (e) $\lim_{x\to 0^+} x^x$
   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(x+1)}$
   (g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$
2. **Quantité conjuguée.** Déterminer les limites suivantes :
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{x^2+4}}{x\sqrt{1+x}-x}$
3. **Limites par encadrement.** Déterminer les limites suivantes :
   (a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos e^x}{x^2+1}$
   (b) $\lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}$
   (c) $\lim_{x\to 0^+} E\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 2 **Utilisation des équivalents.** Déterminer les limites suivantes.

1. **Logarithme et exponentielle.**
   (a) $\lim_{x\to+\infty} x(\ln(1+x)-\ln x)$
   (b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{x}$
   (c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x^2}$
   (d) $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x}$
   (e) $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$
2. **Puissances réelles.**
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x}}$
   (b) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$
   (c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}$
3. **Fonctions trigonométriques.**
   (a) $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{\pi}{x}$
   (b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1-2\cos(x)}$
   (c) $\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{e^{-\frac{\pi}{2}x^2}-e^{-\frac{\pi}{2}}}$

Exercice 3 Passer au logarithme dans un équivalent (? ? ?)

1. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \overline{R}$ et à valeurs strictement positives. On suppose que $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ et que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$.
   Établir que $\ln f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \ln g(x)$.
2. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \ln\left(x^2 + 2^x\right)$.

Exercice 4 Le théorème des gendarmes permet de trouver des équivalents.
Soit f une fonction telle qu'au voisinage de $+\infty$, on ait :

$$x^2 + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x^2 + x.$$

Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 5 Calculer les développements limités suivants :

1. $DL_2(0)$ de $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
2. $DL_3(0)$ de $\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{1+x}$
3. $DL_2(2)$ de $\frac{1}{x}$
4. $DL_3(\pi/4)$ de $\frac{\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi-4x}$

Exercice 6 Utiliser des développements limités pour calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\big(2+\cos(x)\big) - 3\sin(x)}{x^5}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}\right)$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x}$

Exercice 7 Plus difficile. À l'aide de développements limités, calculer les limites suivants :

1. $\lim\limits_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}\right)$ et $\lim\limits_{t \to 0} \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}\right)$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \left(e^x - \sin(x)\right)^{\dfrac{1}{\sin^3(x)}}$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - \ln(1+x) + \ln(2)}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}x}$