

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres.

1. Montrer que la famille (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est libre.
2. On note $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / AM = MA\}$. Montrer que \mathcal{C} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension $\geq n$.
3. Montrer l'existence d'une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et d'une matrice Δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale, telles que

$$A = P\Delta P^{-1}.$$

4. Soit $M \in \mathcal{C}$. Montrer que tout vecteur colonne propre de A est un vecteur colonne propre de M . En déduire que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale. En déduire que \mathcal{C} est de dimension $\leq n$.

5. Montrer que (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est une base de \mathcal{C} .

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) / M^2 = A\}$.

- a) Montrer que $\mathcal{R} \subset \text{Vect}(I, A)$.
- b) Montrer que \mathcal{R} est de cardinal 4. Déterminer les 4 matrices vérifiant $M^2 = A$.

Solution :

1. Supposons la famille (I, A, \dots, A^{n-1}) liée : il existe alors des complexes a_0, a_1, \dots, a_{n-1} non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = 0$.

Le polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ qui est de degré inférieur ou égal à $n - 1$ est annulateur de A et n'est pas le polynôme nul.

Soit (X_1, \dots, X_n) une base de vecteurs propres de A , X_k étant associé à la valeur propre λ_k .

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $A^i X_k = \lambda_k^i X_k$ et :

$$0 = P(A)X_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i X_k = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_k^i \right) X_k \text{ et comme } X_k \neq 0 : \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_k^i = 0.$$

Le polynôme P admet n racines distinctes, il est donc identiquement nul, en contradiction avec notre hypothèse.

2. On montre facilement que \mathcal{C} possède une structure de \mathbb{C} - espace vectoriel. Par la question précédente, il est au moins de dimension n , puisque A et toutes ses puissances commutent avec A .

3. La matrice A est d'ordre n et admet n valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

4. Soit M telle que $AM = MA$ et X un vecteur-colonne propre de A associé à la valeur propre λ . Alors, $AMX = MAX = M\lambda X = \lambda MX$.

Le vecteur MX appartient donc au sous-espace propre $E_\lambda(A)$ de A associé à la valeur propre λ . Or cet espace est de dimension 1. Donc, il existe un complexe μ tel que $MX = \mu X$, puisque (X) est une base de $E_\lambda(A)$.

Ainsi toute base de vecteurs propres de A est une base de vecteurs propres de M , et ces deux matrices sont diagonalisables dans la même base de vecteurs propres :

si $P^{-1}AP$ est diagonale, alors $P^{-1}MP$ l'est aussi.

Donc \mathcal{C} est inclus dans $P \text{diag}_n(\mathbb{C})P^{-1}$ et cet espace est de dimension inférieure ou égale à n .

5. Ainsi \mathcal{C} est de dimension n et la famille libre (I, A, \dots, A^{n-1}) est une base de \mathcal{C} .

6. La matrice triangulaire A admet deux valeurs propres réelles 1 et -1 : elle est diagonalisable.

a) Si $M \in \mathcal{R}$, alors $AM = M^3 = MA$ et $M \in \mathcal{C}$. Par la question précédente, M est donc de la forme $\alpha I + \beta A$.

b) Comme $A^2 = I$, on a $(\alpha I + \beta A)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)I + 2\alpha\beta A$ et cette matrice vaut A lorsque $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ et $2\alpha\beta = 1$, on a donc $\beta = \pm i\alpha$ et $2i\alpha^2 = 1$, soit $\alpha \in \left\{ \frac{1-i}{2}, \frac{i-1}{2} \right\}$ et $\beta \in \left\{ \frac{i+1}{2}, -\frac{i+1}{2} \right\}$ et les valeurs de M s'en déduisent.

Variante : Par réduction les calculs sont aussi simples :

Soit P telle que $A = P \operatorname{diag}(1, -1)P^{-1}$, on a $M = P \operatorname{diag}(\lambda, \mu)P^{-1}$. La relation $M^2 = A$ entraîne que $\lambda^2 = 1$ et $\mu^2 = -1$, soit (on est dans \mathbb{C}) $\lambda = \pm 1$ et $\mu = \pm i$.

On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les quatre solutions sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

et les matrices $M_3 = -M_1$ et $M_4 = -M_2$.

Exercice 2.2.

On considère un endomorphisme f d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie n (avec $n \geq 2$), tel que f^2 est diagonalisable.

Le but de cet exercice est de montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

1. On suppose que f est diagonalisable.
 - a) Montrer que, si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, alors $\operatorname{Ker} f^2 = \{0\}$.
 - b) On suppose maintenant que $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
 - c) Conclure.
2. On suppose que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
 - a) Établir que si μ est une valeur propre de f alors μ^2 est une valeur propre de f^2 .
 - b) Soit λ une valeur propre non nulle de f^2 , et μ_1, μ_2 ses deux racines carrées complexes.
 - i) Montrer que :

$$\operatorname{Ker}(f - \mu_1 I) \subset \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda I) \text{ et } \operatorname{Ker}(f - \mu_2 I) \subset \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda I)$$
 - ii) Montrer que : $\operatorname{Ker}(f^2 - \lambda I) = \operatorname{Ker}(f - \mu_1 I) \oplus \operatorname{Ker}(f - \mu_2 I)$
 - c) En distinguant les cas où 0 est ou n'est pas valeur propre de f , montrer que f est diagonalisable.

Solution :

1. a) Il n'est même pas nécessaire que f soit diagonalisable : si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, alors f est injectif, donc bijectif (endomorphisme d'un espace de dimension finie) et f^2 est aussi bijectif, donc injectif.

b) Dans une base \mathcal{B} adaptée, on a $M_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k})$, où les λ_i non nécessairement deux à deux distincts sont non nuls. Le nombre k est donc la dimension de $\text{Ker}(f) = E_{(0)}(f)$.

On a $M_{\mathcal{B}}(f^2) = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1^2, \dots, \lambda_{n-k}^2)$ et k est aussi la dimension de $\text{Ker}(f^2)$. Ces deux sous-espaces ont de plus la même base et ils sont donc égaux (de toutes façons on savait que $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(f^2)$)

c) On vient de montrer que si f est diagonalisable, alors dans tous les cas $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.

2. a) Si μ est une valeur propre de f , alors il existe un vecteur x de E non nul tel que $f(x) = \mu x$ et $f^2(x) = \mu f(x) = \mu^2 x$. Comme x est non nul, ceci prouve que μ^2 est une valeur propre de f^2 .

b i) Si x appartient à $\text{Ker}(f - \mu_i I)$, avec $i \in \{1, 2\}$, alors $f^2(x) = \mu_i^2 x = \lambda x$, donc $x \in \text{Ker}(f - \lambda I)$ et $\text{Ker}(f - \mu_i I) \subset \text{Ker}(f^2 - \lambda I)$.

ii) On a : $\text{Ker}(f - \mu_1 I) \cap \text{Ker}(f - \mu_2 I) = \{0\}$, car les deux valeurs μ_1, μ_2 sont distinctes. Ainsi la somme $\text{Ker}(f - \mu_1 I) + \text{Ker}(f - \mu_2 I)$ est directe. De plus le résultat i) montre que cette somme est incluse dans $\text{Ker}(f^2 - \lambda I)$.

Soit alors $x \in \text{Ker}(f^2 - \lambda I)$.

On a : $f(f(x) + \mu_i x) = f^2(x) + \mu_i f(x) = \lambda x + \mu_i f(x) = \mu_i(\mu_i x + f(x))$, donc $f(x) + \mu_i x \in E_{(\mu_i)}(f)$. *A fortiori* $x_i = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}(f(x) + \mu_i x) \in \text{Ker}(f - \mu_i I)$

Mais $x = x_1 - x_2$, donc $x \in \text{Ker}(f - \mu_1 I) + \text{Ker}(f - \mu_2 I)$.

Ainsi $\text{Ker}(f - \lambda I) \subset \text{Ker}(f - \mu_1 I) + \text{Ker}(f - \mu_2 I)$, ce qui prouve l'égalité et le résultat :

$$\text{Ker}(f - \lambda I) = \text{Ker}(f - \mu_1 I) \oplus \text{Ker}(f - \mu_2 I)$$

c) • Si 0 est valeur propre de f , alors $\text{Ker } f$ n'est pas réduit au seul vecteur nul, et c'est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0, mais c'est aussi, par hypothèse, le sous-espace propre de f^2 associé à la valeur propre 0. Comme f^2 est diagonalisable, on a :

$$E = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f^2 - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f^2 - \lambda_p I)$$

Comme $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$, on obtient :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f^2 - \lambda_p I)$$

D'après la question précédente, on peut enfin écrire, en notant $\mu_{i,1}$ et $\mu_{i,2}$ les racines carrées de λ_i :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \mu_{1,1} I) \oplus \text{Ker}(f - \mu_{1,2} I) \oplus \dots$$

$$\dots \oplus \text{Ker}(f - \mu_{p,1} I) \oplus \text{Ker}(f - \mu_{p,2} I)$$

Ceci prouve que E est somme directe de sous-espaces propres de f (et éventuellement de sous-espaces réduits à $\{0\}$ que l'on peut éliminer) donc que f est diagonalisable.

- Si $\text{Ker } f = \{0\}$, alors $\text{Ker } f^2 = \{0\}$ et la démonstration précédente s'applique.

Exercice 2.3.

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , E_1 le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions 1-périodiques, T l'application qui, à une fonction f de E fait correspondre la fonction $T(f) = F$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

- a) Justifier que T est un endomorphisme de E .
 - Justifier que, pour tout $f \in E$, la fonction $F = T(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et expliciter sa dérivée.
 - T est-il surjectif ?
 - À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur f la fonction $F = T(f)$ est-elle constante ?
 - Expliciter la fonction $T(f)$ lorsque f est définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = |\sin(\pi t)|$.

On appelle *vecteur propre* de T associé à la *valeur propre* $\lambda \in \mathbb{R}$ toute fonction $f \in E$, autre que la fonction nulle, telle que $T(f) = \lambda f$.

Un réel λ est *valeur propre* de T s'il existe un vecteur propre associé à λ .

- a) Montrer que $f \in \text{Ker}(T) \iff [f \in E_1 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt = 0]$.

L'application T est-elle injective ?

- Vérifier que, pour tout réel a , la fonction $h_a : t \mapsto e^{at}$ est vecteur propre de T et préciser la valeur propre associée.
- Justifier que l'ensemble S des valeurs propres de T contient \mathbb{R}_+ .

Solution :

1. a) La linéarité de T résulte de la linéarité de l'intégration sur tout segment. De plus si Φ désigne une primitive de la fonction continue f , on a $F(x) = \Phi(x+1) - \Phi(x)$ et F est continue sur \mathbb{R} et même de classe \mathcal{C}^1 , avec ...

b) ... $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x+1) - f(x)$.

c) Non, car on vient de voir que $\text{Im}(T) \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc la fonction « valeur absolue » qui est continue, mais pas de classe \mathcal{C}^1 , n'a pas d'antécédent.

d) F est constante si et seulement si $F' = 0$, soit si et seulement si $f \in E_1$.

e) La fonction $f : t \mapsto |\sin(\pi t)|$ appartient à E_1 , donc F est constante et :

$$F(x) = F(0) = \int_0^1 \sin(\pi t) dt = \frac{2}{\pi}.$$

2. a) D'après la question 1.d), $F = T(f) = 0$ si et seulement si F constante et $F(0) = 0$, soit si et seulement si $f \in E_1$ et $\int_0^1 f = 0$ (fonction 1-périodique de moyenne nulle). Ainsi T n'est pas injective car $\text{Ker}(T)$ contient par exemple la fonction $t \mapsto \cos(2\pi t)$.

$$\text{b) } \star a \neq 0 \implies T(h_a)(x) = \int_x^{x+1} e^{at} dt = \frac{e^a - 1}{a} e^{ax} = \frac{e^a - 1}{a} h_a(x);$$

$$\star T(h_0)(x) = \int_x^{x+1} dt = 1 = h_0(x).$$

Donc h_0 est propre pour la valeur propre 1 et pour $a \neq 0$, h_a est propre pour la valeur propre $\frac{e^a - 1}{a}$.

c) Soit $\varphi : u \mapsto \frac{e^u - 1}{u}$. On a $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = 1$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = +\infty$ et $\lim_{u \rightarrow -\infty} \varphi(u) = 0$.

La continuité de φ sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* suffit à montrer, grâce au théorème des valeurs intermédiaires) que $\varphi(\mathbb{R}^*)$ contient $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Comme on a vu que 0 est valeur propre (2. a)) et 1 aussi (2. b)), on peut affirmer que :

$$\mathbb{R}^+ \subset S.$$

Exercice 2.4.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ respectivement le produit scalaire et la norme de \mathbb{R}^3 euclidien usuel, et on appelle **isométrie** de \mathbb{R}^3 une application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

1. On définit une forme quadratique Q sur \mathbb{R}^3 en posant, pour tout vecteur

u de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base canonique \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 :

$$Q(u) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz$$

a) Déterminer une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, Q(u) = {}^t X S X$$

b) Déterminer une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que ${}^t P S P = D$.

On note $\mathcal{E} = \{u \in \mathbb{R}^3, Q(u) = 1\}$ et on dit qu'une isométrie de \mathbb{R}^3 conserve \mathcal{E} si et seulement si elle vérifie $f(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}$.

2. a) Montrer qu'un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ appartient à \mathcal{E} si et seulement si ses coordonnées $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée \mathcal{B} que l'on précisera vérifient :

$$4(x')^2 + 2(y')^2 + 2(z')^2 = 1 \quad (1)$$

b) Montrer que $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ vérifie (1) si et seulement s'il existe $\theta \in [0, \pi]$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$ tels que

$$x' = \frac{1}{2} \cos(\theta), y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) \cos(\alpha), z' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) \sin(\alpha)$$

c) Pour $u \in \mathcal{E}$, exprimer $\|u\|$ en fonction de θ défini ci-dessus et en déduire les vecteurs de \mathcal{E} de norme minimale.

On note u_1 un tel vecteur et \mathcal{P} le plan orthogonal à u_1 .

3. Soit f une isométrie de \mathbb{R}^3 .

a) Pour $u \in \mathbb{R}^3$, comparer $\|f(u)\|$ et $\|u\|$.

b) Montrer que si f conserve \mathcal{E} alors :

$$f(u_1) \in \{-u_1, u_1\} \quad \text{et} \quad f(\mathcal{P} \cap \mathcal{E}) \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{E}$$

On admet la réciproque.

Donner un exemple, autre que id ou $-id$, d'isométrie conservant \mathcal{E} .

Solution :

1. a) et b) On a : $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} S - \lambda I &= \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 + (3 - \lambda)^2 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} (\lambda - 2)(\lambda - 4) & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 3 - \lambda & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } \text{Spec}(A) = \{2, 4\} \end{aligned}$$

$E_{(2)}(A)$ est le plan d'équation $-x + z = 0$, $E_{(4)}(A)$ est la droite engendrée par la colonne ${}^t(1 \ 0 \ -1)$ (droite orthogonale au plan précédent pour le produit scalaire canonique)

En choisissant une base orthonormée du plan $E_{(2)}(A)$, on peut donc prendre :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. a) Soit \mathcal{B} la base définie par la matrice P précédente.

Un vecteur u est tel que $M_{\mathcal{C}}(u) = X$ et $M_{\mathcal{B}}(u) = X'$, où X et X' sont liées par la relation : $X = PX'$. On a alors :

$$Q(u) = {}^tX S X = {}^tX' {}^tP S P X' = {}^tX' D X'$$

Donc la base \mathcal{B} convient.

$$\text{b) (1) donne } \exists \theta \in [0, \pi], \begin{cases} 2x' = \cos \theta \\ \sqrt{2(y')^2 + 2(z')^2} = \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{puis } \exists \alpha \in [0, 2\pi[, \begin{cases} y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) \cos(\alpha) \\ z' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) \sin(\alpha) \end{cases}$$

et réciproquement en substituant dans (1).

c) En base orthonormée,

$$\|u\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \frac{1}{4} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos^2 \theta$$

minimal pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

Donc u_1 est de coordonnées $(\pm 1/2, 0, 0)$ dans \mathcal{B} .

3. a) $\|f(u)\| = \sqrt{\langle f(u), f(u) \rangle} = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \|u\|$.

b) $f(u_1) \in \mathcal{E}$ est de même norme que u_1 donc est minimale, d'où $f(u_1) = \pm u_1$.

D'autre part, f conserve l'orthogonalité et laisse $\text{Vect}(u_1)$ stable, donc laisse \mathcal{P} stable, et aussi $\mathcal{P} \cap \mathcal{E}$.

c) La symétrie (orthogonale) par rapport à \mathcal{P} laisse tous les points de \mathcal{P} invariants, donc laisse $\mathcal{P} \cap \mathcal{E}$ stable, et change u_1 en $-u_1$, donc convient. Toute symétrie (orthogonale) par rapport à une droite de \mathcal{P} laisse le cercle $\mathcal{P} \cap \mathcal{E}$ stable et laisse u_1 invariant, donc convient également.

Exercice 2.5.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n . Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^tAA$, où tA représente la transposée de la matrice A .

On suppose \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée notée $\|\cdot\|$. Selon l'usage, on confond tout vecteur de \mathbb{R}^n avec la matrice colonne canoniquement associée.

1. a) Montrer que B est une matrice symétrique réelle, qui vérifie pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXBX \geq 0$.

b) En déduire que les valeurs propres de B sont positives ou nulles.

On note $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$ ses valeurs propres avec $\lambda_1 \geq 0$.

2. On note $N(A) = \sup_{X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$. Montrer que $N(A) = \sqrt{\lambda_p}$.

3. On suppose dans cette question que A est inversible et on note :

$$C(A) = N(A)N(A^{-1})$$

a) Déterminer $N(A^{-1})$ en fonction des λ_i .

b) Exprimer $C(A)$ en fonction des (λ_i) .

c) Soit A une matrice telle que $C(A) = 1$. Montrer qu'il existe un réel $\mu > 0$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\| = \mu\|X\|$.

4. On suppose que A et B sont deux matrices réelles symétriques dont les valeurs propres sont strictement positives.

a) Montrer que pour tout X de \mathbb{R}^n non nul, ${}^tXAX > 0$ et ${}^tXBX > 0$.

b) Montrer que $C(A+B) \leq \max(C(A), C(B))$.

Solution :

1. a) La matrice B est symétrique réelle et vérifie pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle X, BX \rangle = {}^tX^t AAX = \|AX\|^2 \geq 0.$$

b) En particulier, pour X vecteur propre de B associé à la valeur propre λ , il vient : $\lambda\|X\|^2 = \langle X, X \rangle = \|AX\|^2$ et donc $\lambda \geq 0$.

2. On a $\|AX\|^2 = \langle AX, AX \rangle = {}^tX^t AAX = {}^tXBX$.

Donc pour tout $X \neq 0$: $\frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} = \frac{{}^tXBX}{{}^tXX}$

Soit P orthogonale et $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ diagonale telles que $B = PD^tP$ et notons $Y = {}^tPX$.

$$\frac{{}^tXBX}{{}^tXX} = \frac{{}^tXPD^tPX}{{}^tXP^tPX} = \frac{{}^tYDY}{{}^tYY} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2} \leq \max(\alpha_i) = \lambda_p$$

Les scalaires λ_i étant positifs, tout comme x_i^2 , il vient $\frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \leq \alpha_n$.

On obtient l'égalité pour X vecteur propre de B associé à la valeur propre $\alpha_n = \lambda_p$.

Ainsi :

$$N(A) = \sqrt{\lambda_p}$$

3. a) Si A est inversible, la matrice B l'est également, car $\text{Ker } A = \text{Ker } B$. Les valeurs propres de B^{-1} sont les inverses des valeurs propres de B associées aux mêmes vecteurs propres. Ainsi $N(A^{-1}) = \sqrt{1/\lambda_1}$.

b) D'après les questions précédentes : $C(A) = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_1}}$.

c) Écrire $C(A) = 1$ c'est écrire $\lambda_1 = \lambda_p$.

Ainsi, toutes les valeurs propres de B sont égales, et la matrice B étant diagonalisable, on peut écrire $B = Q(\lambda I)^t Q = \lambda Q^t Q = \lambda I$, avec $\lambda > 0$.

Donc : $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\|^2 = {}^t X B X = \lambda {}^t X X = \lambda \|X\|^2$ et pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\| = \sqrt{\lambda} \|X\|$

4. De manière évidente, $A + B$ est une matrice symétrique.

a) Avec $A = P D^t P$, avec P orthogonale et $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ diagonale, on a comme déjà vu : ${}^t X A X = {}^t X P D^t P X = {}^t Y D Y = \sum_i \alpha_i y_i^2$.

Le résultat s'en déduit car $X \neq 0 \implies Y = {}^t P X \neq 0$ et tous les α_i sont strictement positifs.

De plus, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, ${}^t X (A + B) X = {}^t X A X + {}^t X B X > 0$.

b) Supposons $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$ (on peut le faire quitte à réordonner les vecteurs propres définissant la matrice diagonalisante P) et notons $\beta_1 \leq \dots \leq \beta_n$ les coefficients diagonaux obtenus de même pour la matrice B .

Comme ${}^t A A = A^2$ et ${}^t B B = B^2$, il vient $N(A) = \alpha_n$ et $N(B) = \beta_n$. Donc en revenant à la définition de N , $N(A + B) \leq \alpha_n + \beta_n$. De plus $C(A) = \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$ et

$$C(B) = \frac{\beta_n}{\beta_1}.$$

De manière identique à la démonstration de la question 2, on a :

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0} \|(A + B)X\| \geq \alpha_1 + \beta_1$$

ce qui entraîne que $C(A + B) \leq \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_1 + \beta_1}$

Supposons par exemple que $\max(C(A), C(B)) = C(A) = \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$, c'est-à-dire

$\frac{\beta_n}{\beta_1} \leq \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$. Alors $\frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_1 + \beta_1} \leq \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$ car cette inégalité est équivalente à $\beta_n \alpha_1 \leq \alpha_n \beta_1$.

D'où le résultat.

Exercice 2.6.

On considère un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On rappelle que pour tout $a \in E$, l'application S_a définie sur E par :

$$S_a : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, a \rangle$$

est une forme linéaire sur E .

1. Le but de cette question est de montrer que, réciproquement, pour toute forme linéaire f définie sur E , il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $f = S_a$, et ce par deux méthodes différentes.

A cet effet, on considère l'application S définie sur E par $S(a) = S_a$.

A) Première méthode

- a) Montrer que S est une application linéaire.
- b) Montrer que S est injective.
- c) En déduire que S est un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, et conclure.

B) Seconde méthode

On considère $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E et f une forme linéaire sur E . Montrer qu'il existe une unique application S_a telle que $S_a = f$, et que a est donné par $a = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\varepsilon_i$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ on ait :

$$\int_0^1 P(t)Q(t)dt = Q(0).$$

3. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que l'équation $A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ possède une unique solution.

b) En déduire que A est inversible.

4. On suppose qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, on ait : $\int_0^1 P(t)Q(t) dt = Q(0)$.

Justifier l'existence d'un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_0^1 P(t)(1-t)^n dt \right| \leq \frac{M}{n+1}$.

En déduire que notre hypothèse est absurde. Ce résultat est-il en contradiction avec les résultats précédents ?

Solution :

1. A) a) Pour tous scalaires et tous vecteurs :

$$S_{\alpha a + \beta b}(x) = \langle \alpha a + \beta b, x \rangle = \alpha \langle a, x \rangle + \beta \langle b, x \rangle = (\alpha S_a + \beta S_b)(x).$$

Donc $S_{\alpha a + \beta b} = \alpha S_a + \beta S_b$, ce qui est la linéarité de S .

b) Si a est dans $\text{Ker } S$, alors $S_a = 0$, c'est-à-dire que $\forall x \in E, S_a(x) = 0$, soit encore $\forall x \in E, \langle a, x \rangle = 0$. Cela entraîne que a est nul. En résumé $\text{Ker } S = \{0_E\}$ et S est injective.

c) On a $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et donc le fait que S soit injective implique que celle-ci est bijective.

Ceci montre que pour tout f de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique a de E tel que $S_a = f$.

B) Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E , f une forme linéaire définie sur E . Montrons, par analyse synthèse, qu'il existe un unique vecteur a tel que $f = S_a$.

→ Supposons que a existe. On a alors : $\forall x \in E, \langle a, x \rangle = f(x)$.

En particulier, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle a, \varepsilon_k \rangle = f(\varepsilon_k)$. Comme la décomposition de a dans la base orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est $a = \sum_{k=1}^n \langle a, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k$, on en déduit que

$a = \sum_{k=1}^n f(\varepsilon_k) \varepsilon_k$, donc le vecteur a , s'il existe est défini de manière unique.

→ Soit $a = \sum_{k=1}^n f(\varepsilon_k) \varepsilon_k$. On constate que $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, S_a(\varepsilon_j) = \langle \sum_{k=1}^n f(\varepsilon_k) \varepsilon_k, \varepsilon_j \rangle$.

Comme la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est orthonormale, on obtient $S_a(\varepsilon_j) = f(\varepsilon_j)$.

Les deux applications S_a et f coïncident sur une base, elles sont donc égales, ce qu'il fallait.

2. $(P, Q) \rightarrow \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $f : Q \mapsto Q(0)$ est une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après ce qui précède, il existe un unique polynôme P tel que, pour tout Q de $\mathbb{R}_n[X]$, $\langle P, Q \rangle = f(Q)$, c'est-à-dire, tel que $\int_0^1 P(t)Q(t) dt = Q(0)$.

3. a) Si on se place dans $\mathbb{R}_2[X]$, il existe un unique polynôme $P = aX^2 + bX + c$ tel que, quel que soit le polynôme Q de degré deux, on ait $\int_0^1 P(t)Q(t)dt = Q(0)$.

En appliquant cette égalité successivement avec $Q = 1, Q = X, Q = X^2$, on

trouve qu'il existe un unique triplet (a, b, c) tel que :
$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/5 & 1/4 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) le système précédent est un système de Cramer, ce qui prouve que la matrice A est inversible.

4. P est une fonction continue donc bornée sur $[0, 1]$: il existe un réel M strictement positif, tel que $\forall t \in [0, 1], |P(t)| \leq M$. On en déduit :

$$\left| \int_0^1 P(t)(1-t)^n dt \right| \leq \int_0^1 |P(t)|(1-t)^n dt \leq M \int_0^1 (1-t)^n dt = M \frac{1}{n+1}$$

S'il existait un tel polynôme P , la relation serait en particulier vraie pour les polynômes $Q_n = (1-X)^n$.

On aurait donc $\int_0^1 P(t)Q_n(t)dt = Q_n(0)$, c'est-à-dire $\int_0^1 P(t)(1-t)^n dt = 1$.

Avec le calcul précédent, on obtiendrait donc : $1 \leq \frac{M}{n+1}$ et ce, pour tout entier naturel n , ce qui est absurde.

Ce résultat n'est pas contradictoire avec ce qui précède, puisqu'ici l'espace n'est pas de dimension finie.

Exercice 2.7.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient A et R deux matrices carrées réelles d'ordre n . On dit que R est une racine carrée de A si $R^2 = A$.

1. a) Soit θ un réel quelconque et $R(\theta)$ la matrice : $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.

Calculer le carré de cette matrice et en déduire que la matrice identité d'ordre 2 admet une infinité de racines carrées.

b) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de racine carrée.

2. a) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $t \mapsto \sqrt{1+t}$.

b) Soit N une matrice carrée d'ordre n telle que $N^4 = 0$. Déduire de la question précédente une racine carrée de la matrice $I + N$.

3. Soit f et g deux endomorphismes de \mathbb{R}^n . On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que f admet n valeurs propres réelles distinctes.

a) Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g .

b) Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g .

c) Justifier que f et g sont diagonalisables.

d) Soit A la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Combien A admet-elle de racines carrées ?

Solution :

1. a) Un calcul simple donne : $R^2(\theta) = I_2$. Ainsi, I_2 admet une infinité de racines carrées.

b) On peut se contenter d'écrire $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = 0$ et de faire les calculs : il vient $c = a = d = 0$ et $b(a + d) = 1$. L'impossibilité est claire.

2. a) On trouve : $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{16} + o(t^3)$

b) La question précédente donne : $(1+t) - \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{16}\right)^2 = o(t^3)$

et comme il s'agit de fonctions polynômes : $(1+t) - \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{16}\right)^2 = t^4 Q(t)$, avec $Q \in \mathbb{R}[t]$.

c) Si $N^4 = 0$, alors, en remplaçant formellement t par N , il vient :

$$I + N = \left(I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{6}N^2 + \frac{1}{16}N^3\right)^2 + 0.Q(N)$$

ce qui donne une racine carrée de $I + N$, à savoir : $I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{6}N^2 + \frac{1}{16}N^3$.

3. a) Soit λ scalaire et x vecteur non nul tels que $f(x) = \lambda x$. Alors :

$$f(g(x)) = g(f(x)) = \lambda g(x)$$

ce qui montre que $g(x)$ appartient au sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ .

b) Le sous-espace propre $E_{(\lambda)}(f)$ étant de dimension 1, il existe μ (éventuellement nul) tel que $g(x) = \mu x$. Ainsi, x est vecteur propre de g .

c) On sait que $E = \bigoplus_{i=1}^n E_{(\lambda)}(f)$. Soit (x_1, \dots, x_n) une base de vecteurs propres de f . Par la question précédente, c'est également une base de vecteurs propres de g ; d'où f et g sont diagonalisables et même «co»-diagonalisables.

d) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Alors $AB = B^3 = BA$. Par la question précédente, il existe une matrice P inversible et deux matrices diagonales D_1, D_2 telles que :

$$A = PD_1P^{-1}, \quad B = PD_2P^{-1}$$

$B^2 = A$ est alors équivalent à $D_1 = D_2^2$. Ainsi, les éléments diagonaux de D_2 sont les carrés de ceux de D_1 .

★ Si les valeurs propres de f sont toutes strictement positives, il y a 2^n possibilités pour D_2 , donc 2^n racines carrées pour A .

★ Si elles sont toutes positives et l'une nulle, il y a 2^{n-1} racines carrées pour A .

★ Sinon, on perd la «réalité» du problème et A n'a aucune racine carrée !

Exercice 2.8.

Dans cet exercice on confond polynôme et fonction polynôme associée.

Soit u l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe $u(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} P(t) dt$$

1. Montrer que $u(P)$ est bien défini. Calculer $u(X^k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u .

b) Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par u . Montrer que v réalise un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Quelle est la matrice A associée à v dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$?

L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

3. Déterminer A^{-1} , l'inverse de A .

4. Si P est un polynôme tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$, montrer que, pour tout x réel : $\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(x) \geq 0$.

Solution :

1. Soit P un polynôme de degré p .

L'application $t \mapsto e^{-t} P(t)$ est continue sur \mathbb{R} ; de plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot e^{-t} P(t) = 0$, ce qui entraîne la convergence de l'intégrale définissant $u(P)(x)$. La linéarité de P découle de la linéarité de l'intégration.

Il est évident que $u(1) = 1$.

Soit $n \geq 1$. Une intégration par parties (d'abord sur un segment, suivie d'un passage à la limite) donne : $u(X^n) = X^n + nu(X^{n-1})$.

Ainsi, par récurrence : $u(X^n) = X^n + nX^{n-1} + n(n-1)X^{n-2} + \dots + n!$.

Ceci montre que $u(P)$ est une fonction polynomiale, quel que soit le polynôme P .

2. a) La stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ a été démontrée dans la question précédente, puisque pour tout $n \geq 0, u(X^n) \in \mathbb{R}_n[X]$.

b) Nous venons de montrer que v est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Toujours par la question 1. la famille $(u(1), u(X), \dots, u(X^n))$ est une famille

de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$, ce qui montre que v est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

La matrice A est triangulaire supérieure de la forme $A = (a_{i,j})$, avec :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{j!}{i!} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

La diagonale de A n'est formée que de 1. La seule valeur propre de A est donc 1.

Si A était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale ne comportant que des 1 sur la diagonale *i.e.* la matrice identité ; elle serait donc égale à l'identité, ce qu'elle n'est pas.

3. Comme, pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$, $u(X^k) = X^k + ku(X^{k-1})$, on a :

$$v^{-1}(X^k) = X^k - kX^{k-1}$$

ce qui entraîne que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$v^{-1}(P) = P - P'$$

On en déduit la matrice A^{-1} , également triangulaire supérieure : les coefficients diagonaux valent 1, la diagonale étant bordée d'une sur-diagonale formée des nombres $-1, -2, \dots, -n$.

4. Posons $Q(x) = \sum_k P^{(k)}(x)$. On remarque qu'en fait cette somme est finie, ce qui montre l'existence du polynôme Q . On vérifie alors que $Q - Q' = P$, donc que $P = v^{-1}(Q)$ ou $Q = v(P) = u(P)$, ce qui donne, par la définition de u et la positivité de P , le résultat demandé.

Exercice 2.9.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit E un espace euclidien de dimension n .

On note $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E , et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

On dit qu'un endomorphisme f de E est *orthogonal* si sa matrice dans une base orthonormale est une matrice orthogonale.

1. Montrer que f est orthogonal si et seulement si :

$$\text{pour tout } (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

2. Soit f un endomorphisme de E .

a) Montrer que si f est orthogonal, alors pour tout x de E : $\|f(x)\| = \|x\|$.

b) Montrer réciproquement que, si pour tout vecteur x de E , on a $\|f(x)\| = \|x\|$, alors f est orthogonal.

3. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et on considère un endomorphisme f orthogonal dont la matrice dans la base \mathcal{B} est notée A .

On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}$.

- Exprimer $a_{i,j}$ en fonction de f et des vecteurs e_i et e_j .
- Montrer qu'il existe un vecteur u de E tel que $S = \langle u, f(u) \rangle$.
- En déduire que $|S| \leq n$.
- Montrer que $n \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

Solution :

1. Soit \mathcal{B} une base orthonormale de E . Pour tout couple (x, y) de E^2 , on note X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans la base \mathcal{B} et on a : $\langle y, f(x) \rangle = {}^tYAX$. Pour tout endomorphisme f dont la matrice dans la base \mathcal{B} est A , on a : $\langle f(y), f(x) \rangle = {}^tY{}^tAAX$.

- Si f est orthogonal, alors ${}^tAA = I$, d'où $\langle f(y), f(x) \rangle = {}^tYX = \langle y, x \rangle$.
- Réciproquement, si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\langle f(y), f(x) \rangle = \langle y, x \rangle$, alors pour tous X, Y de \mathbb{R}^n , ${}^tY({}^tAA)X = {}^tYX$.

En prenant pour X et Y les colonnes associées aux vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n , il vient, en notant $\alpha_{i,j}$ l'élément générique de tAA :

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui signifie que ${}^tAA = I$, et donc que A est une matrice orthogonale.

2. a) Si f est un endomorphisme orthogonal de E , pour tout vecteur x de E : $\langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, x \rangle$, donc $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$. Par positivité de la norme, $\|f(x)\| = \|x\|$.

b) Réciproquement, on suppose que l'endomorphisme f est tel que, pour tout vecteur x de E , on a $\|f(x)\| = \|x\|$. Or pour tous vecteurs x, y de E :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{4} (\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|f(x + y)\|^2 - \|f(x - y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \langle x, y \rangle, \text{ ce qu'il fallait.} \end{aligned}$$

3. a) La matrice A est canoniquement associée à f dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Le nombre $\langle f(e_j), e_i \rangle$ est donc la coordonnée sur e_i du vecteur $f(e_j)$. Par construction ce nombre n'est autre que $a_{i,j}$.

b) Par la question précédente :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle f(e_j), e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n f(e_j), \sum_{i=1}^n e_i \right\rangle = \left\langle f\left(\sum_{j=1}^n e_j\right), \sum_{i=1}^n e_i \right\rangle \\ &= \langle f(u), u \rangle, \text{ avec } u = \sum_{i=1}^n e_i. \end{aligned}$$

c) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que f soit un endomorphisme orthogonal :

$$|S| = |\langle f(u), u \rangle| \leq \|u\| \cdot \|f(u)\| = \|u\|^2 = n$$

d) Comme A est orthogonale, on a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$

Donc tous les coefficients $a_{i,j}$ sont compris entre -1 et 1 et :

$$\sum_{i,j} |a_{i,j}| \geq \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum_j \sum_i a_{i,j}^2 = \sum_j 1 = n$$

Enfin, par Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^{n^2} :

$$\sum_{i,j} |a_{i,j}| = \sum_{i,j} 1 \times |a_{i,j}| \leq \sqrt{\left(\sum_{i,j} 1^2\right) \left(\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2\right)} = \sqrt{n^2 \sum_j \left(\sum_i a_{i,j}^2\right)} = \sqrt{n^3}$$

Ce qui est le dernier résultat attendu.

Exercice 2.10.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et f un endomorphisme de E . On dit que f est n -cyclique ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) si et seulement si il existe des vecteurs x_0, x_1, \dots, x_{n-1} dans E tels que ces n vecteurs soient deux-à-deux distincts, engendrent E et vérifient en outre :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, f(x_i) = x_{i+1} \text{ et } f(x_{n-1}) = x_0$$

(x_0, \dots, x_{n-1}) s'appelle alors un n -cycle pour f .

1. a) Donner un exemple d'endomorphisme qui n'est n -cyclique pour aucune valeur de n .

b) Donner un exemple d'endomorphisme 2-cyclique et un exemple d'endomorphisme 3-cyclique.

A partir de maintenant on suppose que f est un endomorphisme n -cyclique.

2. Pour $j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ et $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, calculer $f^m(x_j)$. Que vaut f^n ?

3. Montrer que pour $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $f^m \neq id$.

4. Montrer que les seules valeurs propres possibles de f sont -1 et 1 . Montrer qu'aucun des vecteurs d'un n -cycle pour f n'est vecteur propre de f .

5. Montrer qu'il existe des bases \mathcal{B} de E telles que la matrice de f relativement à \mathcal{B} est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$, le réel b étant indépendant de la base choisie.

Solution :

1. a) L'identité n'est pas cyclique et plus généralement toute homothétie n'est pas cyclique ...

b) Si (e_1, e_2) est une base de E , l'endomorphisme défini par $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = e_1$ est 2-cyclique.

L'endomorphisme défini par $f(e_1) = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$ et $f(e_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2$ est 3-cyclique. (Il suffit de penser à la structure euclidienne de E pour laquelle (e_1, e_2) est une base orthonormée et de considérer alors la rotation d'angle $2\pi/3$).

2. Avec la convention $x_n = x_0, x_{n+1} = x_1, \dots$ on a : $f^m(x_j) = x_{j+m}$ et $\forall j, f^n(x_j) = x_{j+n} = x_j$, donc $f^n = Id_E$ puisque ces deux endomorphismes concident sur une famille génératrice de E .

3. Pour $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $f^m(x_0) = x_m \neq x_0$, donc $f^m \neq Id_E$.

4. $X^n - 1$ est annulateur de f et comme f est un endomorphisme réel, ses seules valeurs propres possibles sont -1 et 1 .

Si un vecteur x d'un n -cycle était propre, alors la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots)$ serait toujours de rang 1 et jamais génératrice de E .

5. Soit e_1 le premier vecteur d'un n -cycle. Comme e_1 n'est pas propre, la famille $(e_1, f(e_1))$ est une base \mathcal{B} de E et :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que deux matrices semblables ont même trace, ce qui résulte d'un calcul sans surprise.

Exercice 2.11.

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et f un endomorphisme de E .

1. a) Soit P un polynôme annulateur de f de la forme $P = (X - \lambda)Q$. Montrer que si λ n'est pas valeur propre de f , alors Q est un polynôme annulateur de f .

Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ annulateur de f tel que toute racine de Q est une valeur propre de f .

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f , montrer qu'il existe un hyperplan F de E contenant $\text{Im}(f - \lambda I)$, où I désigne l'endomorphisme identité.

c) Montrer que la restriction de f à F est un endomorphisme de F .

d) Montrer par récurrence sur n , que tout endomorphisme de E admet une base dans laquelle la matrice associée est triangulaire supérieure.

2. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, p complexes distincts. Justifier l'existence de polynômes Q_i tels que, pour $1 \leq i \leq p$:

$$Q_i(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } Q_i(0) = 0$$

3. La trace $\text{tr}(M)$ d'une matrice carrée M est par définition la somme de ses coefficients diagonaux. On admet que deux matrices semblables ont la même trace.

On suppose dans la suite que la matrice M de f dans une base \mathcal{B} de E est telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{tr}(M^k) = 0$.

a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f . Montrer qu'il existe p entiers non nuls m_i , $1 \leq i \leq p$, indépendants de P , tels que :

$$\sum_{i=1}^p m_i P(\lambda_i) = 0$$

b) En prenant pour P des polynômes introduits dans la question 2, montrer que M est nilpotente c'est-à-dire qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $M^r = 0$.

Solution :

1. a) Si λ n'est pas valeur propre de f , alors $f - \lambda Id$ est inversible et comme $0 = P(f) = (f - \lambda Id) \circ Q(f)$, on en déduit que $Q(f) = 0$.

Soit alors P un polynôme annulateur de f , que l'on écrit comme produit de facteurs du premier degré : on fait disparaître successivement les racines de P qui ne sont pas valeurs propres de f . Il reste un polynôme annulateur dont toute racine est valeur propre de f .

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Q(\lambda) = 0$, λ est une valeur propre de f donc :

$$\dim(\text{Ker}(f - \lambda Id)) \geq 1 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Im}(f - \lambda Id)) \leq n - 1.$$

On peut compléter une base de $\text{Im}(f - \lambda Id)$ en une base de E et oublier le dernier vecteur : les $n - 1$ premiers vecteurs engendrent un hyperplan F de E contenant $\text{Im}(f - \lambda Id)$.

c) La linéarité est acquise, il suffit de montrer la stabilité de F par f . Or :

$$x \in F \implies f(x) = \underbrace{(f - \lambda Id)(x)}_{\in \text{Im}(f - \lambda Id) \subset F} + \underbrace{\lambda x}_{\in F}, \quad \text{donc } f(x) \in F.$$

d) Montrons la propriété par récurrence sur $n \geq 1$:

- Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer !.

• On suppose que tout endomorphisme sur un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n - 1$ admet une base dans laquelle la matrice associée est triangulaire supérieure.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim(E) = n$ et P un polynôme annulateur de f dont toute racine est valeur propre de l'endomorphisme f .

Soit λ une valeur propre de f (il en existe au moins une), F un hyperplan de E contenant $\text{Im}(f - \lambda Id)$ et f_F l'endomorphisme de F induit par f (valide d'après c)). On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à f_F qui est donc trigonalisable supérieurement dans une base \mathcal{B} de F . On complète cette base (à la fin !) avec un vecteur quelconque non nul $e_n \in E \setminus F$; dans cette nouvelle base, la matrice associée à f est bien triangulaire supérieure.

2. On choisit :
$$Q_i(X) = X \prod_{k=1, k \neq i}^p \frac{X - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}.$$

3. a) Soit f l'endomorphisme de \mathbb{C}^n associée à M . La matrice M est trigonalisable : $M = PTP^{-1}$ pour une matrice P inversible convenable.

On sait que pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont les éléments diagonaux. En notant m_i le nombre de fois où apparaît λ_i dans la diagonale, on a donc :

$$\text{tr}(M) = \text{tr}(T) = \sum_{i=1}^p m_i \lambda_i$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la diagonale de T^k , est formée des nombres λ_i^k avec les mêmes ordres de répétition et donc : pour $k \geq 1$: $\text{tr}(M^k) = \text{tr}(T^k) = \sum_{i=1}^p m_i \lambda_i^k$

Par conséquent pour tout polynôme P sans terme constant, comme toutes les traces sont supposées nulles : $\sum_{i=1}^p m_i P(\lambda_i) = 0$.

b) En prenant $P = Q_k$ pour k décrivant $\llbracket 1, p \rrbracket$, pour la famille $(\alpha_i) = (\lambda_i)$, on obtient pour tout k :

$$\sum_{i=1}^p m_i Q_k(\lambda_i) = 0 \implies m_k \lambda_k = 0 \implies \lambda_k = 0$$

Toutes les valeurs propres de M sont nulles. M admet un polynôme annulateur dont la seule racine est 0 : il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^r = 0$ et M est nilpotente.

Exercice 2.12.

On identifie tout vecteur x de \mathbb{R}^n (avec $n \geq 2$) à la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de \mathbb{R}^n , et ${}^t x$ désigne la transposée de x . On note enfin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

1. On suppose dans cette question $n = 3$ et on pose : $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
- Montrer que ${}^t x C x > 0$ pour tout vecteur non nul x de \mathbb{R}^n .
 - Montrer que C est inversible et déterminer sa matrice inverse.
 - Montrer que ${}^t x C^{-1} x > 0$ pour tout vecteur non nul x de \mathbb{R}^n .
2. On désigne désormais par C une matrice symétrique réelle d'ordre n et par Q la fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie par $Q(x) = {}^t x C x$. On suppose que $Q(x) > 0$ pour tout vecteur non nul de \mathbb{R}^n .
- Montrer que C est inversible et que C^{-1} est symétrique.
 - Montrer que si u et v sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n , on a :

$$({}^t u C^{-1} v)^2 \leq ({}^t u C^{-1} u)({}^t v C^{-1} v)$$
3. Soit x et u deux vecteurs de \mathbb{R}^n avec $u \neq 0$.
- On suppose que $Q(x) \leq Q(x+h)$ pour tout vecteur h orthogonal à u . Montrer qu'un tel vecteur h est orthogonal à Cx et que Cx est colinéaire à u .
 - Réciproquement, montrer que si Cx est colinéaire à u et h orthogonal à u , alors $Q(x) \leq Q(x+h)$ puis que $Q(x) = a \langle u, x \rangle^2$, où a est un réel strictement positif dépendant de u et C^{-1} .

Solution :

1. a) Pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} {}^t x C x &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 > 0 \end{aligned}$$

- b) Soit x tel que $Cx = 0$; par la question précédente, on a ${}^t x C x = 0$ et $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. La matrice C est donc inversible et on trouve par toute méthode :

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) De même qu'en a), pour x non nul :

$${}^t x C^{-1} x = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - x_2x_3 = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 > 0$$

On peut aussi dire que si x est non nul, x est de la forme $x = Cy$ avec $y \neq 0$ et

$${}^t x C^{-1} x = {}^t y C C^{-1} C y = {}^t y C y > 0$$

2. a) Si $Cx = 0$, alors $Q(x) = 0$, donc $x = 0$. Ceci montre que C est inversible et on sait que l'inverse d'une matrice symétrique réelle est une matrice symétrique réelle (car $({}^tC)^{-1} = {}^t(C^{-1})$).

b) On démontre comme en 1. c) que C^{-1} est la matrice d'une forme quadratique définie positive. On sait que $(u, v) \mapsto {}^tuC^{-1}v$ est alors un produit scalaire et l'inégalité demandée n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. a) Si $Q(x) \leq Q(x+h)$ pour tout vecteur h tel que $\langle h, u \rangle = 0$, alors pour tout λ réel :

$$Q(x) \leq Q(x + \lambda h) = Q(x) + 2\lambda \langle h, Cx \rangle + \lambda^2 Q(h)$$

Donc, $2\lambda \langle h, Cx \rangle + \lambda^2 Q(h) \geq 0$, pour tout réel λ : ceci est possible si et seulement si $\langle h, Cx \rangle = 0$.

Supposons $x \neq 0$, on a obtenu : quel que soit le vecteur h appartenant à l'hyperplan orthogonal à u , h appartient à l'hyperplan orthogonal à Cx . Par égalité des dimensions de ces deux hyperplans, ils sont égaux et leurs vecteurs orthogonaux u et Cx sont liés. Si $x = 0$ le résultat est banal.

b) Sous les hypothèses de cette question, on a : $Q(x+h) = Q(x) + Q(h) \geq Q(x)$.

Comme Cx et u sont liés, il existe α réel tel que $Cx = \alpha u$, donc $x = \alpha C^{-1}u$ et $\langle u, x \rangle = \alpha \langle u, C^{-1}u \rangle$. Enfin :

$$Q(x) = \langle x, Cx \rangle = \alpha \langle x, u \rangle = \frac{1}{\langle u, C^{-1}u \rangle} \langle u, x \rangle^2$$

Exercice 2.13.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$. Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon.

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et (a_1, \dots, a_n) une famille de nombres réels distincts.

1. a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

b) Montrer que la famille $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Soit $\pi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \pi(P) = \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i$.

a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.

b) Déterminer le noyau et l'image de π .

c) On note $F = \{Q \prod_{i=1}^n (X - a_i), Q \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que $F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathbb{R}[X]$.

d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

3. Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n, P \mapsto (P(a_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

a) Montrer que ε est un isomorphisme.

b) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points (a_1, \dots, a_n) .

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soient $f \in C^n([a, b], \mathbb{R})$, a_1, a_2, \dots, a_n tels que $a \leq a_1 < \dots < a_n \leq b$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points (a_1, \dots, a_n) .

a) Soit $x \in [a, b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ et K réel. On définit la fonction φ par

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t) - P(t) - K \prod_{i=1}^n (t - a_i).$$

Montrer qu'il existe K tel que $\varphi(x) = 0$.

b) Montrer que pour cette valeur de K , il existe $\zeta \in [a, b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\zeta) = 0$.

c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\prod_{i=1}^n |x - a_i|}{n!} \sup_{[a, b]} |f^{(n)}|.$$

Solution :

1. a) \star Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Posons : $L_i(X) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{(X - a_j)}{(a_i - a_j)}$

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a bien $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ et L_i est de degré $n - 1$.

\star Soit $R_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $R_i(a_j) = \delta_{i,j}$. On a alors, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(R_i - L_i)(a_j) = 0$. Ainsi, $R_i - L_i$ est un polynôme de degré au plus $n - 1$ qui a n racines, donc $R_i = L_i$, ce qui donne l'unicité voulue.

b) Soit $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0$. Alors, en identifiant polynômes et fonctions polynomiales, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(a_j) = 0$, soit $\lambda_j = 0$.

Ainsi, la famille $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre et de cardinal n : c'est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que $(\pi \circ \pi)(P) = P$.

Comme $\pi(P) = \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\pi(P)(a_j) = P(a_j)$. De plus, $\pi(P)$ est un polynôme de degré au plus $n-1$, d'où $\pi(\pi(P)) = \pi(P)$.

b) On obtient : $\text{Ker } \pi = \left\{ \prod_{i=1}^n (X - a_i)Q / Q \in \mathbb{R}[X] \right\}$ et $\text{Im } \pi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c) On sait que pour un projecteur, image et noyau sont supplémentaires.

d) D'après la question 2. a), les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont $(P(a_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

3. a) La linéarité de ε est aisée. Montrons que ε est injective.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(a_i) = 0$. Ainsi, P est de degré au plus $n-1$ et possède n racines, soit $P = 0$.

Comme $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n = n$ et que ε est un morphisme injectif, ε est bijectif.

b) Soit f une fonction à valeurs réelles. Comme $(f(a_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{R}^n$ et que ε est surjective, d'après la question précédente, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et un seul tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(a_i) = f(a_i)$.

4. a) Comme x n'est pas l'un des a_i , on a : $K = \frac{f(x) - P(x)}{(x - a_1) \dots (x - a_n)}$

b) La fonction φ possède au moins $n+1$ zéros, donc, comme f est de classe C^n , en appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$.

c) Ainsi, $f^{(n)}(\xi) - n! \times K = 0$.

Comme $f^{(n)}$ est continue sur le segment $[a, b]$, elle admet une borne supérieure.

D'où, pour $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$:

$$|f(x) - P(x)| \leq \sup_{[a, b]} |f^{(n)}| \frac{\prod_{i=1}^n |x - a_i|}{n!}.$$

Le résultat est encore vrai si x est l'un des a_i , d'où la conclusion.

Exercice 2.14.

Soient $n \geq 2$ et $j \geq 1$ deux entiers. On considère l'application F définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $n-1$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], F(P) = Q$, où $Q(X) = P(X) + \frac{1-X}{n} P'(X)$.

1. a) Montrer que F est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $P_k(X) = X^{n-k}$ et $Q_k = F(P_k)$.

Exprimer Q_k à l'aide de P_k et P_{k+1} .

c) Déterminer la matrice M de F dans la base (P_1, P_2, \dots, P_n) .

2. a) L'endomorphisme F est-il diagonalisable ?

b) Déterminer le sous-espace propre de F associé à la valeur propre 1.

c) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

i) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \setminus \{0\}$ tel que $F(P) = \frac{n-k}{n} P$.
Prouver qu'il existe $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $R \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tels que ce polynôme P s'écrive :

$$P(X) = (X-1)^r R(X), \text{ avec } R(1) \neq 0.$$

ii) Déterminer la valeur de l'entier r et le degré du polynôme R .

iii) Déterminer les sous-espaces propres de F .

3. On considère la suite de polynômes définie par :

$$U_1(X) = X^{n-1} \text{ et } \forall j \in \mathbb{N}, U_{j+1} = F(U_j).$$

a) Montrer que $U_1(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (X-1)^k$.

b) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, donner une écriture du polynôme U_j comme combinaison linéaire des polynômes $V_k = (X-1)^k$, avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Solution :

1. a) La linéarité de F est banale.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors, P' est dans $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $(1-X)P'$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par suite, $P(X) + \frac{1-X}{n} P'(X)$ est dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi, F est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} Q_k(X) &= P_k(X) + \frac{1-X}{n} P'_k(X) = X^{n-k} + \frac{1-X}{n} X^{n-k-1} \\ &= \frac{k}{n} X^{n-k} + \frac{n-k}{n} X^{n-k-1} \end{aligned}$$

Ainsi, $Q_k(X) = \frac{k}{n} P_k(X) + \frac{n-k}{n} P_{k+1}(X)$.

c) La famille (P_1, P_2, \dots, P_n) est, réécrite dans le désordre, la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et la matrice M de F dans cette base s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{n-1}{n} & \frac{2}{n} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n-2}{n} & \frac{3}{n} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} & \frac{n}{n} \end{pmatrix}$$

2. a) Les valeurs propres de F se lisent sur la diagonale de M . Le spectre de F est donc $\{\frac{i}{n}, 1 \leq i \leq n\}$. On a ainsi trouvé n valeurs propres pour F . L'endomorphisme F est donc diagonalisable.

b) Comme F admet n valeurs propres, chaque sous-espace propre de F est de dimension 1. Par lecture de la dernière colonne de M , on remarque que $F(P_n) = P_n$, avec $P_n(X) = 1$. Ainsi, en notant E_1 le sous-espace propre associé à 1, $E_1 = \text{Vect}(P_n) = \text{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$.

c) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Soit P un vecteur propre de F associé à la valeur propre $\frac{n-k}{n}$. Alors, P est un polynôme non nul de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = \frac{n-k}{n}P$. Ainsi,

$P(X) + \frac{1-X}{n}P'(X) = \frac{n-k}{n}P(X)$. On en déduit que $\frac{k}{n}P(1) = 0$, puis que $P(1) = 0$. On note alors $r \in \mathbb{N}^*$ l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine de P . On obtient alors l'écriture demandée.

En utilisant l'expression de P trouvée précédemment, la relation $F(P) = \frac{n-k}{n}P$ se réécrit :

$$(X-1)^r R(X) + \frac{1-X}{n}(r(X-1)^{r-1}R(X) + (X-1)^r R'(X)) = \frac{n-k}{n}(X-1)^r R(X)$$

En simplifiant par $(X-1)^r$, on trouve $\frac{k-r}{n}R(X) - \frac{(X-1)}{n}R'(X) = 0$.

En évaluant en 1, on obtient $\frac{k-r}{n}R(1) = 0$, d'où $r = k$ puisque $R(1) \neq 0$. On reprend la relation trouvée précédemment en remplaçant r par k , ce qui donne $\frac{(X-1)}{n}R'(X) = 0$, i.e $R' = 0$. Le polynôme R est donc constant.

Nous venons de voir que si P est un vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{n-k}{n}$, alors $P(X) = \lambda(X-1)^k$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme chaque sous-espace propre est de dimension 1, il s'ensuit que, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, le sous-espace propre de F associé à la valeur propre $\frac{n-k}{n}$ est $\text{Vect}((X-1)^k)$, formule qui reste vraie pour $k = 0$.

3 a) En utilisant la formule du binôme, on écrit :

$$U_1(X) = X^{n-1} = (X-1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (X-1)^k.$$

b) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$U_j = F^{j-1}(U_1) = F^{j-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (X-1)^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F^{j-1}((X-1)^k).$$

Or, la question 2 a montré que $V_k(X) = (X-1)^k$ était vecteur propre de F associé à la valeur propre $\frac{n-k}{n}$. Par récurrence, pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$, $F^{j-1}((X-1)^k) = F^{j-1}(V_k) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1} V_k$. On en déduit l'égalité demandée :

$$U_j = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1} V_k$$

Exercice 2.15.

Dans cet exercice $E = \mathbb{R}_3[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et à coefficients réels.

1. Montrer que l'application $(P, Q) \rightarrow \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ définit un produit scalaire sur E qu'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormale L_0, \dots, L_3 de E et une seule telle que pour tout $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$:

$$\text{Vect}(L_0, \dots, L_i) = \text{Vect}(1, \dots, X^i) \text{ et } \langle L_i, X^i \rangle > 0.$$

Calculer L_0, L_1 et L_2 . On admet que $L_3 = \frac{5\sqrt{14}}{4}(X^3 - \frac{3}{5}X)$

Soit $\mathcal{S} = \{P \in E / \|P\| = 1\}$. Dans la suite de l'exercice P est un élément de \mathcal{S} .

3. On écrit P sous la forme $P = \sum_{i=0}^3 a_i L_i$.

a) Calculer $\sum_{i=0}^3 a_i^2$.

b) En déduire que pour tout réel x : $|P(x)| \leq \left(\sum_{i=0}^3 |L_i(x)|^2\right)^{1/2}$.

4. Montrer que $\sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)| \leq 2\sqrt{2}$.

Solution :

1. On vérifie que l'application $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ est une forme (car cette intégrale existe et est un réel) bilinéaire (par distributivité du produit sur l'addition et linéarité de l'intégration), symétrique (commutativité du produit) et définie positive (par positivité de l'intégrale et car l'intégrale sur

$[-1, 1]$ d'une fonction continue positive ne peut être nulle que si la fonction est identiquement nulle).

2. Il s'agit simplement du processus de Gram-Schmidt. Rappelons-en la $k^{\text{ème}}$ étape théorique : si (L_0, \dots, L_{k-1}) ont été définis, on pose :

$$\tilde{L}_k = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle X^k, L_i \rangle L_i$$

ce qui permet d'avoir l'orthogonalité, puis on norme : $L_k = \frac{\tilde{L}_k}{\|\tilde{L}_k\|}$. Ce qui

donne une famille orthonormée avec $\langle X^k, L_k \rangle > 0$. L'unicité est également claire.

Comme L_k est de degré k (par récurrence), la famille (L_0, L_1, L_2, L_3) est bien une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

★ $\int_{-1}^1 \lambda^2 dt = 2\lambda^2$ et ceci vaut 1 avec $\lambda > 0$ lorsque $L_0 = \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$

★ $\begin{cases} \int_{-1}^1 (\alpha t + \beta)^2 dt = 1 \iff \frac{2\alpha^2}{3} + 2\beta^2 = 1 \\ \int_{-1}^1 (\alpha t + \beta) dt = 0 \iff \beta = 0 \end{cases},$

avec $\alpha > 0$ il vient $\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}, \beta = 0$ et $L_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} X$

★ On trouve de même $L_2 = \frac{3\sqrt{10}}{4}(X^2 - \frac{1}{3})$

3. a) On a $\|P\| = 1$. Si $P = \sum_{i=0}^3 a_i L_i$, alors :

$$1 = \|P\|^2 = \langle \sum_{i=0}^3 a_i L_i, \sum_{i=0}^3 a_i L_i \rangle = \sum_{i=0}^3 a_i^2.$$

b) Comme $P(x) = \sum_{i=0}^3 a_i L_i(x)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^4 muni de sa structure euclidienne canonique permet d'écrire :

$$|P(x)| \leq \left(\sum_{i=0}^3 a_i^2\right)^{1/2} \times \left(\sum_{i=0}^3 L_i(x)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=0}^3 L_i(x)^2\right)^{1/2}$$

4. ★ $\sup_{[-1,1]} |L_0| = \frac{1}{\sqrt{2}} ; \sup_{[-1,1]} |L_1| = \frac{\sqrt{6}}{2} ; \sup_{[-1,1]} |L_2| = \frac{3\sqrt{10}}{4}(1 - \frac{1}{3}) = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Une étude rapide donne :

x	0	$1/\sqrt{5}$	1
L_3	0	$\searrow -\sqrt{14}/(2\sqrt{5})$	$\nearrow \sqrt{14}/2$

$$\text{Donc } \sup_{x \in [-1,1]} |L_3(x)| = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Enfin :

$$\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)| \leq \left(\sum_{i=0}^3 \sup_{x \in [-1,1]} L_i(x)^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} \right)^{1/2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Exercice 2.16.

1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = id$. Justifier que f est diagonalisable.

Dans la suite, n est un entier naturel tel que $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ est le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ désigne la base canonique de E .

Pour $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on note P_{j-1} le polynôme :

$$P_{j-1}(X) = (1 - X)^{j-1} (1 + X)^{n-j+1}$$

Soit $a_{i,j}$ le coefficient de X^{i-1} dans l'écriture de P_{j-1} selon \mathcal{B} et

$$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

2. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$.

Expliciter A et déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. n est à nouveau un entier fixé supérieur ou égal à 2.

a) Pour $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, calculer $(1+x)^n P_{j-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ de deux façons et en déduire que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j} P_{i-1}(X) = 2^n X^{j-1}$$

b) Montrer que $A^2 = 2^n I_{n+1}$, où I_{n+1} désigne la matrice identité de taille $n+1$.

c) La matrice A est-elle diagonalisable ? Que dire de ses valeurs propres ?

Solution :

1. On a : $\forall x \in E, x = \frac{1}{2}(x + f(x)) + \frac{1}{2}(x - f(x))$.

Or : $f(x + f(x)) = f(x) + f^2(x) = x + f(x)$, donc $\frac{1}{2}(x + f(x)) \in \text{Ker}(f - I)$, tandis qu'un calcul semblable donne $\frac{1}{2}(x - f(x)) \in \text{Ker}(f + I)$. D'où :

$$\text{Ker}(f - I) + \text{Ker}(f + I) = E$$

Comme $[f(x) = x \text{ et } f(x) = -x] \implies x = 0$, cette somme est directe. Donc f est diagonalisable et les seules valeurs propres possibles sont -1 et 1 .

2. On a : $P_0(X) = (1 + X)^2$, $P_1(X) = (1 - X)(1 + X) = 1 - X^2$ et $P_2(X) = (1 - X)^2$, d'où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + (\lambda - 1)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2 - \lambda & \lambda(2 - \lambda) \\ 0 & 2 - \lambda & 2\lambda - 4 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow \tilde{L}_1 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 - \lambda^2 \\ 0 & 2 - \lambda & 2\lambda - 4 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 4 - \lambda^2 & 0 & 0 \\ 2\lambda - 4 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 - \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de A sont donc 2 et -2 , et :

$${}^t(x \ y \ z) \in E_{(2)}(A) \iff x - y - z = 0$$

$${}^t(x \ y \ z) \in E_{(-2)}(A) \iff \begin{cases} 4y - 8z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2z \\ x = y - 3z = -z \end{cases}$$

Donc $E_{(2)}(A)$ est un plan et $E_{(-2)}(A)$ une droite : A est diagonalisable.

3. a) On a $P_{j-1}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j} x^{i-1}$, d'où, pour $x \neq -1$:

$$(1+x)^n P_{j-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = (1+x)^n \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} [a_{i,j} (1-x)^{i-1} (1+x)^{n-i+1}] = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j} P_{i-1}(x)$$

Mais, on a aussi :

$$(1+x)^n P_{j-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = (1+x)^n \left(1 - \frac{1-x}{1+x}\right)^{j-1} \left(1 + \frac{1-x}{1+x}\right)^{n-j+1}$$

$$= (2x)^{j-1} 2^{n-j+1} = 2^n x^{j-1}$$

D'où le résultat demandé.

b) Pour tout $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on a :

$$2^n X^{j-1} = \sum_{i=1}^{n+1} [a_{i,j} \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i} X^{k-1}] = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\sum_{i=1}^{n+1} a_{k,i} a_{i,j} \right] X^{k-1},$$

d'où, par identification : $\sum_{i=1}^{n+1} a_{k,i} a_{i,j} = 2^n \delta_{k,j} = \begin{cases} 2^n & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, soit :

$$A^2 = 2^n I_{n+1}$$

c) Ainsi $\left(\frac{A}{2^{n/2}}\right)^2 = I_{n+1}$ et d'après la question 1, $\frac{A}{2^{n/2}}$ est diagonalisable, donc A aussi, et :

$$\text{Spec}(A) \subset \{-2^{n/2}, 2^{n/2}\}$$

Exercice 2.17.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Montrer que l'application T définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\text{si } C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, T(C) = \sum_{i=1}^n c_{i,i}$$

est une forme linéaire telle que $\forall C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), T(CD) = T(DC)$.

Dans tout le reste du problème, (A, B) désigne un couple de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$AB - BA = A \text{ avec } A \text{ non nulle } (*)$$

2. Montrer que $T(A) = 0$ et que A n'est pas inversible.

3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k B - BA^k = kA^k$.

4. En considérant les valeurs propres de l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\varphi : M \mapsto MB - BM$$

montrer qu'il existe un entier $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que $A^p = 0$.

5. Pour $n = 2$, déterminer les couples (A, B) solutions du problème (*).

Solution :

1. La trace est une forme linéaire et

$$\text{tr}(CD) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{i,k} d_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n d_{k,i} c_{i,k} = \text{tr}(DC)$$

2. Si A inversible :

$$\begin{aligned} AB - BA = A &\implies ABA^{-1} - B = I \implies \text{tr}(ABA^{-1}) - \text{tr}(B) = n \\ &\implies \text{tr}(BA^{-1}A) - \text{tr}(B) = n, \text{ soit } 0 = n, \text{ ce qui est absurde.} \end{aligned}$$

3. Démontrons ceci par récurrence, la propriété étant banale pour $k = 0$ et dans l'énoncé pour $k = 1$.

Supposons la propriété acquise pour un rang $k \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned} A^{k+1}B - BA^{k+1} &= A(A^k B) - BA^{k+1} = A(BA^k + kA^k) - BA^{k+1} \\ &= kA^{k+1} + (AB - BA)A^k \\ &= kA^{k+1} + AA^k = (k+1)A^{k+1}. \end{aligned}$$

On conclut donc par le principe de récurrence.

4. • Si A n'est pas nilpotente, alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi(A^k) = kA^k \neq 0$, ce qui prouve que k est valeur propre de φ . En dimension finie, on ne peut

avoir qu'un nombre fini de valeurs propres. L'hypothèse est absurde. De plus comme $A \neq 0$, on a bien $p \geq 2$.

- Soit p le plus petit des entiers k tels que $A^k = 0$. Soit X une colonne telle que $A^{p-1}X \neq 0$. La famille $(X, AX, \dots, A^{p-1}X)$ est alors libre. En effet $\lambda_0 X + \lambda_1 AX + \dots + \lambda_{p-1} A^{p-1}X = 0$ donne en multipliant à gauche par A^{p-1} : $\lambda_0 A^{p-1}X = 0$ et donc $\lambda_0 = 0$, en multipliant alors à gauche par A^{p-2} , il vient $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite.

Par conséquent cette famille est de cardinal inférieur ou égal à n , soit $p \leq n$.

5. Pour $n = 2$, la question précédente entraîne $A^2 = 0$.

- Tous les couples $(0, B)$ sont des solutions évidentes.
- Si $A \neq 0$: il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J$ (soit a l'endomorphisme canoniquement associé à A , on choisit un vecteur x tel que $a(x) \neq 0$, et, conformément au raisonnement fait en 4., on considère la base $(a(x), x)$).

$AB - BA = A$ s'écrit donc $PJP^{-1}B - BPJP^{-1} = PJP^{-1}$, soit

$$J(P^{-1}BP) - (P^{-1}BP)J = J.$$

On pose alors $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et un calcul simple montre que la relation précédente est vérifiée lorsque $\gamma = 0$ et $\delta = \alpha + 1$. Les couples solutions sont donc les couples :

$$\left(P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P \in GL_2(\mathbb{R})$$

Exercice 2.18.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n .

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E tel que $u^k = 0$ et $u^{k-1} \neq 0$, où 0 est l'endomorphisme nul.

On dit alors que u est un endomorphisme *nilpotent* d'indice k .

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{k-1}(x_0) \neq 0$.

Prouver que $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{k-1}(x_0))$ est une famille libre de E . En déduire que $k \leq n$.

2. On pose désormais $F = \text{Vect}(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{k-1}(x_0))$

Montrer que F est stable par u .

3. a) Soit H un supplémentaire de $\text{Vect}(u^{k-1}(x_0))$ dans E . Montrer qu'il existe une forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall h \in H, \varphi(h) = 0 \text{ et } \varphi(u^{k-1}(x_0)) \neq 0.$$

Montrer que la famille $(\varphi, \varphi \circ u, \varphi \circ u^2, \dots, \varphi \circ u^{k-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.

4. On pose $G = \bigcap_{i=0}^{k-1} \text{Ker}(\varphi \circ u^i)$. Montrer que G est stable par u et déterminer $F \cap G$.

5. a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient H_1, H_2, \dots, H_p des hyperplans de E . Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p) \geq n - p$.

b) Montrer que F et G sont supplémentaires.

Solution :

1. On sait que u^{k-1} n'est pas l'endomorphisme nul. Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $u^{k-1}(x_0) \neq 0$. Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq k-1} \in \mathbb{C}^k$ tel que $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i u^i(x_0) = 0$.

Supposons que les λ_i ne sont pas tous nuls et appelons j le plus petit indice $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ tel que λ_i soit non nul. En appliquant u^{k-j-1} à l'égalité précédente, on obtient $\lambda_j u^{k-1}(x_0) = 0$, ce qui est impossible. Par suite, la famille $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{k-1}(x_0))$ est une famille libre de E et donc : $k \leq \dim(E) = n$.

2. $x \in F \implies x = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i u^i(x_0)$, où $\lambda_i \in \mathbb{C}$; comme $u^k = 0$, il vient :

$$u(x) = \sum_{i=0}^{k-2} \lambda_i u^{i+1}(x_0) \in F. \text{ Ainsi, } F \text{ est stable par } u.$$

3. a) Soit (e_1, \dots, e_{n-1}) une base de H , la forme linéaire φ définie par

$$\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_{n-1}) = 0 \text{ et } \varphi(u^{k-1}(x_0)) = 1$$

convient. (on définit une application linéaire en se donnant les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ)

b) Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq k-1} \in \mathbb{C}^k$ telle que $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \varphi \circ u^i = 0$.

→ Comme $u^k = 0$, en $x = u^{k-1}(x_0)$, on obtient : $\lambda_0 = 0$.

→ Puis, en appliquant l'égalité en $x = u^{k-2}(x_0)$, on trouve que $\lambda_1 = 0$. De proche en proche, on prouve ainsi que tous les λ_i sont nuls. La famille $(\varphi, \varphi \circ u, \varphi \circ u^2, \dots, \varphi \circ u^{k-1})$ est donc une famille libre de $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.

4. ★ Soit $x \in G$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $\varphi \circ u^i(x) = 0$. Montrons que $u(x) \in G$, i.e. que $\varphi \circ u^i(u(x)) = 0$, pour tout $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$.

D'une part, si $0 \leq i \leq k-2$, alors $1 \leq i+1 \leq k-1$ et $\varphi \circ u^{i+1}(x) = 0$ du fait que $x \in G$.

D'autre part, si $i = k-1$, alors $\varphi \circ u^{i+1}(x) = \varphi(u^k(x)) = 0$ puisque $u^k = 0$.

Ainsi, G est stable par u .

★ Soit $x \in F \cap G$. Alors, il existe des complexes λ_i tels que $x = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i u^i(x_0)$.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $\varphi \circ u^i(x) = 0$.

En particulier, $0 = \varphi \circ u^{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \varphi \circ u^{k-1+i}(x)$. Or, $u^p = 0$, pour tout $p \geq k$, d'où $\lambda_0 = 0$. De proche en proche, on montre ainsi que tous les λ_i sont nuls.

Par suite, $F \cap G = \{0\}$.

5. a) Si $p = 1$, la propriété est évidente. Supposons la propriété vraie à un rang p .

Considérons alors $(p+1)$ hyperplans de $E : H_1, H_2, \dots, H_{p+1}$.

On pose $F = H_1 \cap H_2 \dots \cap H_p$. La propriété au rang p donne $\dim(F) \geq n-p$.

Enfin

$$\begin{aligned} \dim(F \cap H_{p+1}) &= \dim F + \dim H_{p+1} - \dim(F + H_{p+1}) \geq (n-p) + (n-1) - n \\ &\geq n - (p+1), \text{ puisque } F + H_{p+1} \subset E, \end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité au rang $p+1$ et on conclut par le principe de récurrence.

b) Comme $F \cap G = \{0\}$, il reste seulement à montrer que :

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G),$$

autrement dit que $\dim(G) = n - k$.

On a déjà $\dim(E) \geq \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) = k + \dim(G)$. D'où, $\dim(G) \leq n - k$.

D'autre part, par la question 5. a), G qui est l'intersection de k hyperplans de E est de dimension au moins égale à $n - k$. D'où, $\dim(G) = n - k$. Par conséquent, F et G sont supplémentaires dans E .