

ANALYSE

Exercice 1.1.

On considère l'ensemble E des fonctions f de classe C^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} et telles que $f(0) = f(1) = 0$. On rappelle que la fonction cotangente est définie, lorsque cela est possible, par : $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Dans toute la suite f est un élément de E .

1. a) Déterminer un équivalent simple de $\cotan(\pi t)$ quand t est au voisinage de 0.

b) Montrer que la fonction φ définie sur $]0, 1[$ par : $\varphi(t) = \frac{f(t)}{t} f'(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures.

c) Établir l'équivalent suivant : $\cotan(\pi t) \underset{(1^-)}{\sim} \frac{1}{\pi(t-1)}$.

d) Dédire de ce qui précède l'existence de l'intégrale I définie par :

$$I = \int_0^1 f(t) f'(t) \cotan(\pi t) dt$$

2. a) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^2(t) \cotan(\pi t)$ et $\lim_{t \rightarrow 1^-} f^2(t) \cotan(\pi t)$.

b) Établir la formule suivante :

$$2\pi I = \pi^2 \int_0^1 f^2(t) (1 + \cotan^2(\pi t)) dt$$

3. a) Justifier l'existence de l'intégrale J définie par :

$$J = \int_0^1 (f'(x) - \pi f(x) \cotan(\pi x))^2 dx$$

b) Utiliser le fait que l'intégrale J est positive pour montrer que, pour tout élément f de E , on a :

$$\int_0^1 f^2(t) dt \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 f'^2(t) dt$$

4. En considérant la fonction f_1 définie sur $[0, 1]$ par $f_1(x) = \sin(\pi x)$, montrer que la constante π^2 obtenue dans la relation précédente est la meilleure possible.

5. Établir pour tout élément f de E , l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 |f(t)f'(t)| dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 f'^2(t) dt$$

Solution :

1. a) On a $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(\pi t) = 1$ et $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$, d'où : $\cotan(\pi t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\pi t}$.

b) On écrit $\varphi(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} f'(t)$ et comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, on a : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = (f'(0))^2$.

c) On pose $u = 1 - t$. On a : $\cotan(\pi t) = \cotan(\pi - \pi u) = -\cotan(\pi u)$ et par le résultat a) :

$$\cotan(\pi t) \underset{(1^-)}{\sim} -\frac{1}{\pi(1-t)} = \frac{1}{\pi(t-1)}$$

d) La fonction $t \mapsto f(t)f'(t) \cotan(\pi t)$ est continue sur $]0, 1[$ et l'intégrale semble doublement impropre :

$$\star f(t)f'(t) \cotan(\pi t) \underset{(0^+)}{\sim} \frac{1}{\pi} \times \frac{f(t)}{t} f'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{(f'(0))^2}{\pi}$$

$$\star f(t)f'(t) \cotan(\pi t) \underset{(1^-)}{\sim} \frac{1}{\pi} \times \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} f'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} \frac{(f'(1))^2}{\pi}$$

Finalement, l'intégrale est « faussement » impropre en 0 et en 1 donc convergente.

$$2. a) \star f^2(t) \cotan(\pi t) \underset{(0^+)}{\sim} \frac{f(t)}{\pi} \times \frac{f(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{f(0)}{\pi} \times f'(0) = 0$$

$$\text{De même : } f^2(t) \cotan(\pi t) \underset{(1^-)}{\sim} \frac{f(t)}{\pi} \times \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} \frac{f(1)}{\pi} \times f'(1) = 0$$

b) Pour $0 < a < b < 1$, soit $I(a, b) = \int_a^b f(t)f'(t) \cotan(\pi t) dt$, on a :
 $I = \lim_{a \rightarrow 0, b \rightarrow 1} I(a, b)$.

On procède alors à une intégration par parties :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t)f'(t) \iff u(t) = \frac{1}{2}f^2(t) \\ v(t) = \cotan(\pi t) \implies v'(t) = \pi(1 + \cotan^2(\pi t)) \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $[a, b]$, d'où :

$$I(a, b) = \left[\frac{f^2(t)}{2} \times \cotan(\pi t) \right]_a^b + \pi \int_a^b \frac{f^2(t)}{2} (1 + \cotan^2(\pi t)) dt$$

D'après 2. a), le crochet tend vers 0; d'où :

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 f^2(t)(1 + \cotan^2(\pi t)) dt \text{ et } 2\pi I = \pi^2 \int_0^1 f^2(t)(1 + \cotan^2(\pi t)) dt$$

3. a) Puisque $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \cotan(\pi t) = \frac{f'(0)}{\pi}$ et $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) \cotan(\pi t) = \frac{f'(1)}{\pi}$, J est convergente (faussement impropre) et clairement $J \geq 0$.

b) On a donc :

$$\int_0^1 f'^2(t) dt - 2\pi \int_0^1 f'(t)f(t) \cotan(\pi t) dt + \pi^2 \int_0^1 f^2(t) \cotan^2(\pi t) dt \geq 0, \text{ i.e.}$$

en transformant la dernière intégrale :

$$\int_0^1 f'^2(t) dt - 2\pi \int_0^1 f'(t)f(t) \cotan(\pi t) dt + \pi^2 \int_0^1 f^2(t)(\cotan^2(\pi t) + 1) dt - \pi^2 \int_0^1 f^2(t) dt \geq 0$$

Les deux intégrales centrales se télescopent (résultat 2. b)) et il reste :

$$\int_0^1 f^2(t) dt \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 f'^2(t) dt$$

4. Avec $\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$ et $\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$, il vient :

$$\int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \int_0^1 \cos^2(\pi x) dx = \frac{1}{2}.$$

Donc : $\int_0^1 f_1^2(t) dt = \frac{1}{2}$ et $\int_0^1 f_1'^2(t) dt = \frac{\pi^2}{2}$, ce qui prouve que la constante $\frac{1}{\pi^2}$ est la meilleure possible pour que l'inégalité soit universelle.

5. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui donne :

$$\int_0^1 |f(t)f'(t)| dt \leq \sqrt{\left(\int_0^1 f^2(t) dt \right)} \times \sqrt{\left(\int_0^1 f'^2(t) dt \right)}$$

On majore alors $\sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}$ par $\sqrt{\frac{1}{\pi^2} \int_0^1 f'^2(t) dt}$, d'où :

$$\int_0^1 |f(t)f'(t)| dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 f'^2(t) dt.$$

Exercice 1.2.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on dit que la suite réelle strictement positive $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la relation E_λ lorsque :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini}$$

1. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et les deux suites (v_n) et (y_n) définies par :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n^\beta}$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

a) Montrer que les deux suites vérifient une relation E_λ (avec λ à déterminer à chaque fois).

b) Etudier la convergence des deux séries $\sum v_n$ et $\sum y_n$ associées.

2. Soit $\lambda < 0$. Montrer que si la suite (u_n) vérifie (E_λ) , alors la série $\sum u_n$ diverge.

3. Soit (u_n) une suite qui vérifie (E_λ) avec $\lambda > 1$. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$ et on considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (n^{-\beta})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

a) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, où μ est un réel, indépendant de n , à déterminer.

b) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

c) Prouver que la série $\sum u_n$ converge.

4. Soit (u_n) une suite qui vérifie (E_λ) avec $0 \leq \lambda < 1$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

5. Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

Solution :

1. a) et b) • La série $\sum (v_n)$ est une série de Riemann, convergente si $\beta > 1$ et divergente sinon et on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ donc } \lambda = \beta.$$

• La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}$ est positive et décroissante sur $]1, +\infty[$, par théorème de comparaison série/intégrale, la série $\sum y_n$ converge s'il en est de même de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$

Or : $\int_2^T \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t} \right]_2^T \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln 2}$, la convergence de la série $\sum y_n$ est donc acquise.

Par ailleurs on a : $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{\ln n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc :

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-2} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ et } \lambda = 1.$$

2. Si $\lambda < 0$ alors : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} -\frac{\lambda}{n} > 0$.

Donc à partir d'un certain rang, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 : \exists n_0, \forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > 0$

Donc la suite $(u_n)_n$ ne peut tendre vers 0 et la série diverge grossièrement.

3. a) Par différence on a immédiatement $\mu = \beta - \lambda$.

b) Comme $\beta - \lambda < 0$, la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$ est négative à partir d'un certain rang :

$$\exists N, \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

c) Ce qui précède s'écrit aussi $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ et une récurrence immédiate donne alors :

$$\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n \text{ avec } K = \frac{u_N}{v_N}.$$

La série de Riemann $\sum v_n$ converge car $\beta > 1$. Par le théorème de comparaison sur les séries positives, on en déduit la convergence de $\sum u_n$.

4. En raisonnant comme dans la question précédente avec $\beta \in]\lambda, 1[$, on obtient :

$$\exists N, \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

puis : $\forall n \geq N, u_n \geq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n > 0$

puis (comme $K \neq 0$ et $\beta < 1$), par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la divergence de $\sum v_n$ donne celle de $\sum u_n$.

5. Au voisinage de 0 : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on a :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme la série $\sum w_n$ est à termes strictement positifs, d'après la question 4 avec $\lambda = \frac{1}{6} < 1$, on conclut à la divergence de la série $\sum w_n$.

Exercice 1.3.

On considère la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par :
$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{v_n + \frac{1}{2n}} \end{cases}$$

1. Montrer que, la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est bien définie et à termes positifs.

2. a) Étudier la fonction f_n définie sur \mathbb{R}^+ pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\forall x \geq 0, f_n(x) = x^2 - x - \frac{1}{2^n}$$

b) Montrer que l'équation $x^2 - x - \frac{1}{2^n} = 0$ possède, sur \mathbb{R}_+ , une unique solution que l'on note α_n .

3. a) Étudier le signe de $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.

b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

c) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'inégalité suivante : $v_n \geq \alpha_n$.

d) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

4. a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ converge.

b) Déterminer la valeur de sa limite.

Solution :

1. Evident.

2. a) f_n est une fonction polynôme donc dérivable. On a : $f'_n(x) = 2x - 1$, d'où le tableau de variation de f_n sur \mathbb{R}_+ :

x	0	1/2	$+\infty$
$f'_n(x)$		- 0 +	
f_n	$-1/2^n$	$\searrow < 0$	$\nearrow +\infty$

Sur $[0, \frac{1}{2}]$ et même sur $[0, 1]$, la fonction est strictement négative et donc ne s'annule pas. En revanche sur $[1, +\infty[$, f_n est strictement croissante et continue, elle réalise donc une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[-1/2^n, +\infty[$. le nombre 0 appartient à l'ensemble d'arrivée et possède donc un unique antécédent α_n , avec $\alpha_n > 1$.

3. a) On a $f_n(x) - f_{n+1}(x) = -\frac{1}{2^{n+1}}$ et donc $f_n(x) - f_{n+1}(x) < 0$.

b) En appliquant l'inégalité précédente en α_{n+1} on obtient : $f_n(\alpha_{n+1}) \leq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$, soit $f_n(\alpha_{n+1}) \leq 0$, c'est-à-dire $f_n(\alpha_{n+1}) \leq f_n(\alpha_n)$. Comme sur l'intervalle considéré la fonction f_n est strictement croissante, on en déduit que $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ et la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien décroissante.

c) $\star \alpha_2$ est la solution positive de l'équation $x^2 - 2x - \frac{1}{4} = 0$.

On trouve $\alpha_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ tandis que $v_1 = 1$ et que $v_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Or $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} < 6$, donc $\alpha_2 < v_2$.

★ Supposons que pour un certain n supérieur ou égal à 2, on ait : $\alpha_n \leq v_n$.

Alors : $\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n + \frac{1}{2^n}} \leq \sqrt{v_n + \frac{1}{2^n}} = v_{n+1}$, et comme la suite (α_n) est décroissante on a *a fortiori* : $\alpha_{n+1} \leq v_{n+1}$.

On conclut par le principe de récurrence : $\forall n \geq 2, \alpha_n \leq v_n$.

d) En appliquant f_n qui, sur l'intervalle considéré, est croissante, on obtient : $0 = f_n(\alpha_n) \leq f_n(v_n)$.

On a donc $v_n^2 - v_n - \frac{1}{2^n} \geq 0$, *a fortiori* $v_n^2 v_{n+1}^2$. Comme tout est positif il vient $v_n v_{n+1} \hat{=}$ et la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

4. a) La suite est décroissante à partir du rang 2 et minorée par $\frac{1}{2}$ ou même par 1, elle est donc convergente de limite notée ℓ .

b) On sait que $v_{n+1} = \sqrt{v_n + \frac{1}{2^n}}$. En passant à la limite, on obtient $\ell = \sqrt{\ell}$, soit $\ell^2 - \ell = 0$. Cette équation possède deux solutions 0 et 1. Comme 0 est à rejeter, il reste $\ell = 1$.

Exercice 1.4.

Pour tout x et y réels strictement positifs, on pose $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale définissant $B(x, y)$.

2. a) Prouver que $\forall x > 0, \forall y > 0, B(x, y) = B(y, x)$.

b) Montrer que $\forall x > 0, \forall y > 0, B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1)$.

3. Montrer que $\forall x > 0, \forall y > 0, B(x, y+1) = B(x, y) - B(x+1, y)$. En déduire que :

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y).$$

4. Soit n un entier naturel non nul. Soit x un réel strictement positif.

a) Étudier le signe sur $[0, 1]$ de la fonction $g : t \mapsto e^{-t} - 1 + t$. En déduire que pour tout $t \in [0, n]$, on a :

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

b) Montrer que pour tout $t \in [0, n]$, on a $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x)$

5. Montrer que :

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Solution :

1. La fonction $f : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue et positive sur $]0, 1[$.

$$f(t) \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}, \text{ avec } 1-x < 1. \quad f(t) \underset{(1)}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{1-y}}, \text{ avec } 1-y < 1.$$

Par suite, deux applications de la règle de Riemann montrent que $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

2. a) Le changement de variable $u = 1-t$ dans l'intégrale $B(x, y)$ donne immédiatement l'égalité demandée.

b) Soit $0 < a \leq b < 1$. On calcule $\int_a^b t^x (1-t)^{y-1} dt$ au moyen d'une intégration par parties en posant $u(t) = t^x$, d'où $u'(t) = xt^{x-1}$ et $v'(t) = (1-t)^{y-1}$, en prenant $v(t) = -\frac{1}{y}(1-t)^y$.

Comme $\lim_0(uv) = \lim_1(uv) = 0$, il vient alors par passage à la limite :

$$B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1).$$

3. On remarque que

$$B(x, y+1) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} (1-t) dt = B(x, y) - B(x+1, y).$$

De la question précédente, on déduit que :

$$B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1) = \frac{x}{y} (B(x, y) - B(x+1, y)).$$

Ainsi :

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y).$$

4. a) La fonction $g : t \mapsto e^{-t} - 1 + t$ est croissante sur $[0, 1]$ avec $g(0) = 0$. Elle est donc positive sur $[0, 1]$.

D'où, pour tout $t \in [0, n]$, $\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq e^{-\frac{t}{n}}$. En élevant à la puissance n , on trouve l'inégalité demandée. On peut aussi invoquer la convexité de l'exponentielle pour prouver que $\forall u \in \mathbb{R}, 1 + u \leq e^u$, relation que l'on applique à $u = -\frac{t}{n}$ avant d'élever à la puissance $n^{\text{ème}}$.

b) La relation à démontrer est évidente si $t \in [\sqrt{n}, n]$. Considérons à présent le cas où $t \in [0, \sqrt{n}[$.

On étudie sur $[0, \sqrt{n}[$ la fonction $f : t \mapsto n \ln \left(1 - \frac{t}{n}\right) + t - \ln \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)$.

La fonction f est dérivable sur $[0, \sqrt{n}[$ et on vérifie que $f'(t) = \frac{t((t-1)^2 + (n-1))}{(n-t)(n-t^2)}$,

quantité positive pour tout $t \in [0, \sqrt{n}[$.

Par suite, pour tout $t \in [0, \sqrt{n}[$, $f(t) \leq f(0) = 0$.

On en déduit que $n \ln \left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq \ln \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t$. L'inégalité demandée s'en déduit par croissance de la fonction exponentielle.

c) On déduit de a) et b) que :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \leq \int_0^n e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Or, par définition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x)$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} t^{x-1} dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-t} t^{x-1} dt - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^{x+1} dt \\ &= \Gamma(x) - 0 \cdot \Gamma(x+2) = \Gamma(x) \end{aligned}$$

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure à l'égalité souhaitée.

5. Le changement de variable $u = \frac{t}{n}$ donne $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x B(n+1, x)$.

On applique alors la formule établie à la question 3. lorsque $x = n$ (entier naturel). En réitérant la relation, on obtient :

$$B(n+1, y) = \frac{n}{n+y} B(n, y) = \left(\prod_{k=1}^n \frac{k}{k+y} \right) B(1, y)$$

Comme $B(1, y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1} dt = \frac{1}{y}$, on en déduit que pour tout entier

naturel n et tout réel $y > 0$, on a : $B(n+1, y) = \frac{n!}{y(y+1) \dots (y+n)}$.

Ainsi, $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x B(n+1, x) = n^x \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$.

Il suffit alors de passer à la limite lorsque n tend vers l'infini et de reconnaître $\Gamma(x)$ dans le membre de gauche grâce à la question 4. c)

Exercice 1.5.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0, 1]$ et soit F le sous-ensemble de E constitué par les fonctions h de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$ qui vérifient les deux relations :

$$\begin{cases} h(0) - h'(0) = 0 \\ h(1) + h'(1) = 0 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de h .

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit Φ l'application qui, à tout élément f de E , fait correspondre la fonction $g = \Phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1], g(x) = \Phi(f)(x) = \int_0^1 e^{-|x-y|} f(y) dy$$

- a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E .
 - b) Montrer que, pour tout f de E , $g = \Phi(f)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$ et calculer g' et g'' , où g' et g'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de g .
 - c) Montrer que, pour tout f de E , $g = \Phi(f)$ appartient à F .
3. a) Déterminer le noyau de Φ .
 - b) Soit g un élément de F . À l'aide d'intégrations par parties, établir la relation : $\Phi(g'') = \Phi(g) - 2g$.
 - c) En déduire que toute fonction g de F est l'image par Φ d'une fonction f de E et d'une seule.

Solution :

1. Les applications $\varphi : h \mapsto h(0) - h'(0)$ et $\psi : h \mapsto h(1) + h'(1)$, sont clairement des formes linéaires sur $\mathcal{C}^2([0, 1])$ et $F = \text{Ker}(\varphi) \cap \text{Ker}(\psi)$ est un sous-espace de $\mathcal{C}^2([0, 1])$, donc *a fortiori* de E .

2. a) La linéarité de Φ est une conséquence simple de la linéarité de l'intégration sur $[0, 1]$, mais il faut vérifier que $g = \Phi(f)$ est continue sur $[0, 1]$, pour cela on écrit :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x e^{-|x-y|} f(y) dy + \int_x^1 e^{-|x-y|} f(y) dy \\ &= \int_0^x e^{y-x} f(y) dy + \int_x^1 e^{x-y} f(y) dy = e^{-x} \int_0^x e^y f(y) dy + e^x \int_x^1 e^{-y} f(y) dy \end{aligned}$$

Sous cette forme la continuité de g résulte de la continuité des fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto e^{-x}$, $x \mapsto e^x f(x)$ et $x \mapsto e^{-x} f(x) \dots$

b) ... et g est même de classe \mathcal{C}^1 , avec :

$$g'(x) = \Phi(f)'(x) = -e^{-x} \int_0^x e^y f(y) dy$$

$$\begin{aligned}
& + e^x \int_x^1 e^{-y} f(y) dy + e^{-x} \times e^x f(x) + e^x (-e^{-x} f(x)) \\
& = -e^{-x} \int_0^x e^y f(y) dy + e^x \int_x^1 e^{-y} f(y) dy
\end{aligned}$$

La fonction g' est encore de classe \mathcal{C}^1 , avec :

$$\begin{aligned}
g''(x) = \Phi(f)''(x) = e^{-x} \int_0^x e^y f(y) dy + e^x \int_x^1 e^{-y} f(y) dy \\
- e^{-x} \times e^x f(x) + e^x (-e^{-x} f(x))
\end{aligned}$$

$$\text{Soit : } g''(x) = e^{-x} \int_0^x e^y f(y) dy + e^x \int_x^1 e^{-y} f(y) dy - 2f(x)$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in [0, 1], g''(x) = g(x) - 2f(x)$$

c) Les calculs précédents donnent en particulier :

$$\Phi(f)(0) = \int_0^1 e^{-y} f(y) dy ; \Phi(f)'(0) = \int_0^1 e^{-y} f(y) dy$$

$$\Phi(f)(1) = e^{-1} \int_0^1 e^{-y} f(y) dy ; \Phi(f)'(1) = -e^{-1} \int_0^1 e^{-y} f(y) dy$$

Donc $g = \Phi(f)$, qui est continue sur $[0, 1]$, vérifie $g(0) = g'(0)$ et $g(1) = -g'(1)$. Donc :

$$\forall f \in E, \Phi(f) \in F$$

3. a) Soit $f \in \text{Ker } \Phi$, on a $g = \Phi(f) = 0$ et $g'' = 0$, donc $2f = 0$ et $f = 0$.

$$\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$$

b) Pour pouvoir intégrer par parties, on revient à la forme vue en 2. a) :

$$\Phi(g'')(x) = e^{-x} \int_0^x e^y g''(y) dy + e^x \int_x^1 e^{-y} g''(y) dy$$

D'où, en intégrant g'' en g' :

$$\Phi(g'')(x) = e^{-x} \left([e^y g'(y)]_0^x - \int_0^x e^y g'(y) dy \right) + e^x \left([e^{-y} g'(y)]_x^1 + \int_x^1 e^{-y} g'(y) dy \right)$$

On recommence, dans le même sens :

$$\begin{aligned}
\Phi(g'')(x) &= e^{-x} \left([e^y (g'(y) - g(y))]_0^x + \int_0^x e^y g'(y) dy \right) \\
&\quad + e^x \left([e^{-y} (g'(y) + g(y))]_x^1 - \int_x^1 e^{-y} g'(y) dy \right) \\
&= g'(x) - g(x) - e^{-x} (g'(0) - g(0)) + e^x e^{-1} (g'(1) + g(1)) \\
&\quad - e^x e^{-x} (g'(x) + g(x)) + \Phi(g)(x)
\end{aligned}$$

et puisque $g \in F$, il reste :

$$\Phi(g'') = \Phi(g) - 2g$$

c) Pour $g \in F$, on a $\frac{1}{2}(g - g'') \in E$ et $\Phi(\frac{1}{2}(g - g'')) = g$. Comme on sait déjà que Φ est injective, on conclut.

Exercice 1.6.

Pour tout intervalle I de \mathbb{R} et toute fonction f de I dans \mathbb{R} , on dit que f est lipschitzienne sur I s'il existe un réel $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tous x, y de I , $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. On dit alors que f est k -lipschitzienne.

1. a) Montrer que les fonctions constantes, puis la fonction valeur absolue sont lipschitziennes sur I .

b) Montrer que si f et g sont lipschitziennes et bornées, alors $f \times g$ est lipschitzienne sur I .

c) Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est continue sur I .

d) Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} . Montrer que si f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, alors f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

e) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit la fonction polynôme $P_{n,k}$ sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Pour toute fonction f continue sur $[0, 1]$, on pose $B_n(f) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) P_{n,k}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 P_{n,k}(x) = \frac{1}{n} x(1-x).$$

Dans toute la suite, on considère une fonction f ρ -lipschitzienne sur $[0, 1]$.

3. Montrer que $|f|$ est bornée sur $[0, 1]$. Nous noterons M sa borne supérieure. Soient $x \in [0, 1]$ et $\alpha > 0$. On considère les ensembles

$$\mathcal{E}_1 = \left\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha\right\} \text{ et } \mathcal{E}_2 = \left\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha\right\}$$

ainsi que les sommes :

$$S_1(x) = \sum_{k \in \mathcal{E}_1} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| P_{n,k}(x) \text{ et } S_2(x) = \sum_{k \in \mathcal{E}_2} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| P_{n,k}(x).$$

4. a) Montrer que $S_2(x) \leq \rho\alpha$ puis que $S_1(x) \leq \frac{M}{2n\alpha^2}$.

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| = 0$.

Solution :

1. a) Les fonctions constantes sont clairement 1-lipschitziennes sur \mathbb{R} . D'après la deuxième inégalité triangulaire, pour tous $x, y \in [0, 1]$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Ainsi, la fonction valeur absolue est 1-lipschitzienne sur \mathbb{R} .

b) Notons M_f (resp. M_g) un majorant de $|f|$ (resp. $|g|$) et supposons que f (resp. g) est k_f -lipschitzienne (resp. k_g -lipschitzienne). Soient $x, y \in I$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)g(x) - f(y)g(x)| + |f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq M_g|f(x) - f(y)| + M_f|g(x) - g(y)| \\ |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq (M_gk_f + M_fk_g)|x - y|. \end{aligned}$$

Ainsi, fg est $(M_gk_f + M_fk_g)$ -lipschitzienne.

c) Soit f une fonction k -lipschitzienne sur I et $x_0 \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, $|f(x_0) - f(x)| \leq k|x_0 - x| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$: f est continue en tout point x_0 .

d) Soit f une fonction de classe \mathbb{C}^1 sur $[a, b]$. Alors, f' est continue sur $[a, b]$ donc $|f'|$ est bornée sur $[a, b]$. Notons M sa borne supérieure. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous $x, y \in [a, b]$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, et f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

e) Supposons par l'absurde qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}_+^*$ telle que la fonction racine carrée soit k -lipschitzienne sur $[0, 1]$. Alors, pour tous $x, y \in [0, 1]$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x - y|.$$

En particulier, $\forall x \in]0, 1]$, $\sqrt{x} \leq kx$, i.e. $1 \leq k\sqrt{x}$ ce qui est faux pour x assez petit.

2. On peut faire un calcul direct, mais : soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et $x \in [0, 1]$. On sait que l'espérance de X vaut nx et sa variance $nx(1 - x)$ (même pour $x \in \{0, 1\}$). Donc :

$$\begin{aligned} nx(1 - x) &= \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 P(X = k) = \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \\ &= n^2 \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 P_{n,k}(x) \end{aligned}$$

Soit :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 P_{n,k}(x) = \frac{x(1 - x)}{n}.$$

3. La fonction f est lipschitzienne donc continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Elle est bien bornée.

4. a) Comme la fonction f est ρ -lipschitzienne, pour $k \in \mathcal{E}_2$,

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \alpha \implies \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \rho\alpha.$$

Ainsi,

$$S_2 \leq \sum_{k \in \mathcal{E}_2} \rho\alpha P_{n,k}(x) \leq \rho\alpha \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} P_{n,k}(x) \leq \rho\alpha.$$

Comme la fonction $|f|$ est bornée sur $[0, 1]$ par la constante M ,

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sum_{k \in \mathcal{E}_1} 2MP_{n,k}(x) \leq 2M \sum_{k \in \mathcal{E}_1} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 P_{n,k}(x) \\ &\leq 2M \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 P_{n,k}(x) \leq \frac{2M}{\alpha^2} \times \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{M}{2\alpha^2 n}, \\ &\hspace{20em} (\text{car } 0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

b) Finalement : $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq S_1 + S_2 \leq \rho\alpha + \frac{2M}{2n\alpha^2}$. Donc :

$$\sup_{[0,1]} |B_n(f) - f| \leq \rho\alpha + \frac{2M}{2n\alpha^2}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, en choisissant $\alpha = \frac{\varepsilon}{2\rho}$ puis n assez grand, on a bien $\sup_{[0,1]} |B_n(f) - f| \leq \varepsilon$, soit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[0,1]} |B_n(f) - f| = 0.$$

Exercice 1.7.

On admet que la suite de terme général $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ converge et on note γ sa limite. On considère en outre les fonctions :

$$S : x \mapsto \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt, x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad R : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, x > 0$$

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(t) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-t}}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

2. Établir la convergence des intégrales définissant $S(x)$ et $R(x)$ respectivement sur \mathbb{R} et \mathbb{R}_+^* .

3. Montrer que : $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt$.

4. En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n = \int_0^1 \frac{1 - e_n(t)}{t} dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t} dt,$$

où e_n est définie sur $[0, n]$ par $e_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

5. a) Montrer que pour tout t réel, $1 + t \leq e^t$.

b) Montrer que pour $q \in [0, 1[$, $1 - q^n \leq n(1 - q)$.

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, n]$,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq e_n(t) \leq e^{-t}$$

puis que $0 \leq e^{-t} - e_n(t) \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$.

7. Montrer que $\gamma = S(1) - R(1)$.

Solution :

1. La fonction f est évidemment continue sur \mathbb{R}^* . De plus, $e^u \underset{(0)}{=} 1 + u + o(u)$, ce qui montre que f est aussi continue en 0.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $S(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur l'intervalle fermé borné d'extrémités 0 et x , donc convergente. Pour $x > 0$, $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, 1]$, donc l'intégrale de cette fonction sur cet intervalle est convergente. Enfin, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est convergente car $t \geq 1 \implies \left|\frac{e^{-t}}{t}\right| \leq e^{-t}$ dont l'intégrale est convergente.

3. On a, $\frac{1 - (1-t)^n}{t} = 1 + (1-t) + \dots + (1-t)^{n-1}$, d'où,

$$\int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-t)^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left[-\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

4. En effectuant le changement de variable affine $u = nt$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{\frac{u}{n}} \times \frac{1}{n} du = \int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} du + \int_1^n \dots \\ &= \int_0^1 \frac{1 - e_n(t)}{t} dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t} dt + \ln n. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

5. a) La fonction $t \mapsto e^t - 1 - t$ admet pour *minimum* 0 en 0. Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 + t \leq e^t$.

b) Pour $q \in [0, 1]$: $1 - q^n = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \leq n(1 - q)$.

6. On en déduit successivement que pour tout réel t , $1 + \frac{t}{n} \leq e^{\frac{t}{n}}$ et $1 - \frac{t}{n} \leq e^{-\frac{t}{n}}$, ce qui implique pour $t \in [0, n]$:

$$\star 0 \leq e_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \left(e^{-\frac{t}{n}}\right)^n = e^{-t}$$

$$\star 0 \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} \leq e^t e^{-t} = 1 \text{ et } \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e_n(t)$$

Donc : $(1 - \frac{t^2}{n^2})^n e^{-t} \leq e_n(t) \leq e^{-t}$

Puis : $0 \leq e^{-t} - e_n(t) \leq e^{-t}(1 - (1 - \frac{t^2}{n^2})^n)$

Or, pour $t \in [0, n]$, on a : $1 - (1 - \frac{t^2}{n^2})^n \leq n \times \frac{t^2}{n^2} = \frac{t^2}{n}$ (résultat 5. b)) , d'où :

$$0 \leq e^{-t} - e_n(t) \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$$

7. On a : $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 \frac{1 - e_n(t)}{t} dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t} dt \right)$ (question 4.)

Or :

$$\star 0 \leq \int_0^1 \frac{1 - e_n(t)}{t} dt - S(1) = \int_0^1 \frac{e^{-t} - e_n(t)}{t} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^1 t e^{-t} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\star \int_1^n \frac{e_n(t)}{t} dt = \int_1^n \frac{e_n(t) - e^{-t}}{t} dt + \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt$$

$$\text{et } 0 \leq \int_1^n \frac{e^{-t} - e_n(t)}{t} dt \leq \frac{1}{n} \int_1^n t e^{-t} dt \leq \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} t e^{-t} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{tandis que : } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt = R(1)$$

Ainsi $\gamma = S(1) - R(1)$.

Exercice 1.8.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on considère le polynôme $P_\lambda = X^3 + \lambda X - 1$.

1. Montrer que ce polynôme admet un unique zéro réel noté $u(\lambda)$.
2. Montrer que la fonction $u : \lambda \mapsto u(\lambda)$ est décroissante sur \mathbb{R}^+ .
3. Montrer que pour $\lambda > 0$, on a $u(\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$, en déduire $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u(\lambda)$.
4. a) Montrer que u est bornée.
b) Montrer que pour λ et λ_0 dans \mathbb{R}^+ , on a :

$$[u(\lambda) - u(\lambda_0)][u(\lambda)^2 + u(\lambda)u(\lambda_0) + u(\lambda_0)^2 + \lambda] + (\lambda - \lambda_0)u(\lambda_0) = 0$$
- c) Montrer que u est continue sur \mathbb{R}^+ .
5. Montrer que u est dérivable sur \mathbb{R}^+ et exprimer $u'(\lambda)$ en fonction de $u(\lambda)$.
6. Montrer que u est une bijection de \mathbb{R}^+ sur $]0, 1]$.

Solution :

1. On a $P'_\lambda(x) = 3x^2 + \lambda > 0$ et $x \mapsto P_\lambda(x)$ est strictement croissante sur \mathbb{R} . Comme $\lim_{-\infty} P_\lambda = -\infty$ et $\lim_{+\infty} P_\lambda = +\infty$, P_λ réalise une bijection strictement croissante de \mathbb{R} sur \mathbb{R} : P_λ s'annule une fois et une seule sur \mathbb{R} .

Notons que $P_\lambda(0) = -1$, donc $u(\lambda) > 0$.

2. Soit λ, λ' tels que $\lambda' < \lambda$. On a :

$$\begin{aligned} P_\lambda(u(\lambda')) &= u(\lambda')^3 + \lambda u(\lambda') - 1 = u(\lambda')^3 + \lambda' u(\lambda') - 1 + (\lambda - \lambda') u(\lambda') \\ &= (\lambda - \lambda') u(\lambda') > 0 \end{aligned}$$

Ainsi $P_\lambda(u(\lambda')) > P_\lambda(u(\lambda))$ et donc $u(\lambda') > u(\lambda)$, ce qui prouve que l'application u est strictement décroissante.

3. On a $u(\lambda) = \frac{1 - u(\lambda)^3}{\lambda}$, donc $\lambda > 0 \implies u(\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$ et comme $u(\lambda) > 0$, on en déduit :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u(\lambda) = 0$$

4. a) u est positive strictement décroissante, telle que $u(0) = 1$, la fonction u est à valeurs dans $[0, 1]$, donc bornée.

b) On a : $u(\lambda)^3 + \lambda u(\lambda) = 1 = u(\lambda_0)^3 + \lambda_0 u(\lambda_0)$, soit :

$$[u(\lambda) - u(\lambda_0)][u(\lambda)^2 + u(\lambda)u(\lambda_0) + u(\lambda_0)^2 + \lambda] + \lambda u(\lambda) - \lambda_0 u(\lambda_0) = 0$$

et comme $\lambda u(\lambda) - \lambda_0 u(\lambda_0) = \lambda(u(\lambda) - u(\lambda_0)) + (\lambda - \lambda_0)u(\lambda_0)$

$$[u(\lambda) - u(\lambda_0)][u(\lambda)^2 + u(\lambda)u(\lambda_0) + u(\lambda_0)^2 + \lambda] + (\lambda - \lambda_0)u(\lambda_0) = 0$$

c) Ecrivons :

$$|u(\lambda) - u(\lambda_0)| = \frac{|\lambda - \lambda_0|u(\lambda_0)}{u(\lambda)^2 + u(\lambda)u(\lambda_0) + u(\lambda_0)^2 + \lambda} \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|u(\lambda_0)}{u(\lambda_0)^2} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0$$

Donc u est continue en tout point λ_0 .

5. En revenant sur le calcul précédent, on écrit par continuité de u :

$$\frac{u(\lambda) - u(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -\frac{u(\lambda_0)}{u(\lambda)^2 + u(\lambda)u(\lambda_0) + u(\lambda_0)^2 + \lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} -\frac{u(\lambda_0)}{3u(\lambda_0)^2 + \lambda_0}$$

u est dérivable sur \mathbb{R}^+ et $u'(x) = -\frac{u(x)}{3u(x)^2 + x}$

6. u' est strictement négative, donc u réalise une bijection strictement décroissante de \mathbb{R}^+ sur son image $]0, 1]$.

Exercice 1.9.

On considère une fonction f définie et continue sur $[0, \pi]$ et l'intégrale

$$I_n = \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt.$$

1. On suppose que f est de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Montrer que la suite (I_n) est convergente de limite nulle.

2. On suppose ici que f est seulement de classe C^0 sur $[0, \pi]$. On veut démontrer que le résultat précédent est encore valable.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F la fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} qui à tout n -uplet de réels (a_1, a_2, \dots, a_n) associe le nombre $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \sin(kt))^2 dt$. Pour tout k , on pose $b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(kt) dt$.

Enfin, on rappelle que pour tout couple de réels (a, b) , on a

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b)).$$

Calculer pour tout couple (k, ℓ) d'entiers strictement positifs l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin(kt) \sin(\ell t) dt.$$

En déduire que quel que soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt$$

b) Montrer que F admet un minimum global au point $(b_1(f), \dots, b_n(f))$. Quelle est la valeur de ce minimum ?

c) Montrer que la série $\sum (b_k(f))^2$ est convergente et donner un majorant de sa somme.

d) Conclure.

Solution :

1. Les deux fonctions à intégrer étant de classe C^1 sur $[0, \pi]$, une intégration par parties donne : $I_n = [-\frac{1}{n} f(t) \cos(nt)]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi f'(t) \cos(nt) dt$

Les fonctions f et f' sont bornées sur le segment $[0, \pi]$ par M et M' respectivement. Ainsi :

$$|I_n| \leq \frac{2M}{n} + \frac{\pi M'}{n}$$

cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

2. a) Comme $\sin kt \sin \ell t = \frac{1}{2} \cos(k - \ell)t - \frac{1}{2} \cos(k + \ell)t$, il vient :

$$\int_0^\pi \sin(kt) \sin(\ell t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ \pi/2 & \text{si } k = \ell \end{cases}$$

Ainsi : $F(a_1, \dots, a_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt - 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\sum_{k=1}^n a_k \sin(kt))^2 dt$

Lorsqu'on développe le carré de la dernière expression, tous les termes des doubles produits ont une intégrale nulle, alors que l'intégrale des autres termes vaut $\frac{\pi}{2}$. On obtient ainsi :

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt$$

b) Le calcul donne :

$$F(a_1, \dots, a_n) - F(b_1(f), \dots, b_n(f)) = \sum_{k=1}^n [a_k - b_k(f)]^2 \geq 0$$

Il en résulte que F admet un minimum global en $(b_1(f), \dots, b_n(f))$.

c) Comme F est à valeurs positives, son minimum est positif ou nul, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^n b_k^2(f) - 2 \sum_{k=1}^n b_k(f) b_k(f) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt \geq 0$$

ce qui est équivalent à $\sum_{k=1}^n b_k^2(f) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt$.

Les sommes partielles de la série $\sum b_k^2(f)$ sont majorées, la série est donc convergente et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2(f) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt$$

d) La série converge, donc son terme général tend vers 0, c'est-à-dire :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k(f) = 0.$$

Exercice 1.10.

1. a) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t^2} dt$ converge. On note alors $F(x)$ sa valeur.

b) Grâce au changement de variable $t \mapsto 1/t = u$, dont on justifiera l'utilisation, prouver une propriété de symétrie de la courbe représentative \mathcal{C} de F .

c) Justifier que $\forall t \in [1, +\infty[$, $\frac{t^{x-1}}{1+t^2} \geq \frac{t^{x-3}}{2}$. En déduire la limite de F à gauche quand x tend vers la borne supérieure de D .

2. On admet que F est de classe C^2 sur D et que

$$\forall x \in D, F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{t^{x-1}}{1+t^2} \right) dt$$

a) Étudier les variations de F' sur D .

b) Déterminer les limites de F' aux bornes de D .

c) Dresser le tableau de variations de F et représenter l'allure de la courbe \mathcal{C} .

3. Pour $x \in D$, on définit une fonction g_x sur \mathbb{R} par

$$g_x : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ \frac{1}{F(x)} \times \frac{t^{x-1}}{1+t^2} & \text{si } t \in]0, +\infty[\end{cases}$$

a) Prouver que g_x est une densité de probabilité.

b) Étudier l'existence des moments d'une variable aléatoire U_x (définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P)), de loi de densité g_x .

Solution :

1. a) Soit $f_x : t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t^2}$, la fonction f_x est continue sur \mathbb{R}_+^* .

On a : $f_x(t) \underset{(0^+)}{\sim} t^{x-1}$ d'intégrale convergente sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$, et $f_x(t) \underset{(+\infty)}{\sim} t^{x-3}$ d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $x < 2$, d'où en appliquant deux fois la règle de Riemann :

$$D =]0, 2[$$

b) La fonction $t \mapsto 1/t$ est de classe \mathcal{C}^1 bijective de \mathbb{R}_+^* dans lui-même. Le changement de variable ainsi suggéré donne en procédant directement avec les bornes 0 et $+\infty$:

$$F(x) = \int_{+\infty}^0 \frac{u^{1-x}}{1+1/u^2} \frac{-du}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2-x-1}}{1+u^2} = F(2-x)$$

(ce qui est compatible avec le domaine de définition !) Donc \mathcal{C} est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$.

$$\text{c) On a } 1 \leq t \implies 1+t^2 \leq 2t^2 \implies \frac{t^{x-1}}{1+t^2} \geq \frac{t^{x-3}}{2}.$$

Comme $f_x \geq 0$, on a $F(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-3}}{2} dt = \frac{1}{2(2-x)} \xrightarrow{x \rightarrow 2^-} +\infty$.

2. a) On a : $F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2 t^{x-1}}{1+t^2} dt > 0$, donc F' est strictement croissante.

b) $\lim_{2^-} F' = L \in [0, +\infty]$ existe d'après le théorème de la limite monotone.

Si F' avait une limite finie en 2 à gauche, alors F' serait bornée sur $[0, 2[$ et par l'inégalité des accroissements finis il en serait de même de F , ce qui est faux. Donc $L = \lim_{2^-} F' = +\infty$ et par symétrie, $\lim_{0^+} F' = -\infty$.

c) Comme F' est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, le théorème de la bijection assure l'existence d'un unique x_0 tel que $F'(x_0) = 0$, et $x_0 = 1$ par symétrie. De plus : $F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, d'où le tableau de variations :

x	0	1	2
$F'(x)$		- 0 +	
F	$+\infty$	$\searrow \pi/2 \nearrow$	$+\infty$

3. a) pour $x \in D$, la fonction g_x est positive, continue sur \mathbb{R}^* et d'intégrale 1, donc est une densité de probabilité.

b) $E(U_x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1+k}}{1+t^2} dt$ si cette intégrale converge, donc si $x-1+k \in]0, 2[$ (l'intégrande est positif) ; d'après le domaine de définition de F :

- $E(U_x)$ existe si et seulement si $x \in]0, 1[$;
- pour tout $x \in D$, U_x n'admet pas de moment d'ordre ≥ 2 .

Exercice 1.11.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit la fonction F_n par :

$$F_n : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^x)^n}.$$

- Déterminer l'ensemble de définition de F_n .
- Pour tout $n \geq 1$ et tout $x > 1$, montrer que $F_{n+1}(x) - F_n(x) = -\frac{1}{nx} \times F_n(x)$.
- Pour tout $x > 1$, montrer que la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. (on pourra «couper» l'intégrale en trois à l'aide des intervalles : $[0, n^{-\frac{1}{2x}}]$, $[n^{-\frac{1}{2x}}, 1]$ et $[1, +\infty[$).
- Pour $x > 1$ fixé, on pose $v_n = n^{\frac{1}{x}} F_n(x)$.
 - Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$.
 - En déduire la convergence de la suite de terme général v_n . Montrer que sa limite, qui sera notée ℓ , est non nulle.
 - En déduire, en fonction de $F_1(x)$ et de ℓ , un équivalent de $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{kx} \right)$ quand n tend vers $+\infty$.
 - Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} F_n(x)$.

Solution :

1. ★ Si $x > 0$, l'intégrale proposée n'est impropre que pour la borne infinie, et : $0 \leq \frac{1}{(1+t^x)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{xn}}$, donc l'intégrale converge si et seulement si $nx > 1$.

★ Si $x = 0$, la fonction à intégrer est constante non nulle et l'intégrale diverge banalement ;

★ si $x < 0$, on a : $\frac{1}{(1+t^x)^n} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$. et la divergence est encore banale.

Ainsi $F_n(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$ et $nx > 1$, soit $x \in]\frac{1}{n}, +\infty[$.
Donc toutes les fonctions F_n sont définies sur $]1, +\infty[$

2. Pour tout $T > 0$, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{dt}{(1+t^x)^{n+1}} - \int_0^T \frac{dt}{(1+t^x)^n} &= \int_0^T \frac{t}{x} \times \frac{-xt^{x-1}}{(1+t^x)^{n+1}} dt \\ &= \left[\frac{t}{x} \times \frac{1}{n(1+t^x)^n} \right]_0^T - \int_0^T \frac{dt}{nx(1+t^x)^n} \end{aligned}$$

En faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient :

$$F_{n+1}(x) - F_n(x) = -\frac{1}{nx} \times F_n(x), \text{ i.e. } F_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{1}{nx}\right) F_n(x)$$

3. Pour tout $x > 1$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{n^{-1/2x}} \frac{dt}{(1+t^x)^n} \leq \int_0^{n^{-1/2x}} dt = \frac{1}{n^{1/2x}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \\ 0 &\leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^x)^n} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{nx}} = \frac{1}{nx-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \\ 0 &\leq \int_{n^{-1/2x}}^1 \frac{dt}{(1+t^x)^n} \leq \frac{1 - n^{-1/2x}}{(1 + n^{-1/2})^n} \\ 0 &\leq \int_{n^{-1/2x}}^1 \frac{dt}{(1+t^x)^n} \leq (1 - n^{-1/2x}) \exp(-n \ln(1 + n^{-1/2})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \\ &\quad (\text{car } n \ln(1 + n^{-1/2}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty) \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$.

4. a) D'après la relation de la question 2, on a :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{nx}\right).$$

Des calculs de développement limités à l'ordre 2 donnent :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \left(-\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2}\right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La règle de Riemann donne la convergence de la série $\sum \ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$

b) Par télescopage on en déduit que la suite de terme général $\ln(v_n)$ converge de limite notée ℓ_0 , donc la suite (v_n) converge vers $\ell = e^{\ell_0} > 0$.

c) D'après la question 2, on a par un argument de récurrence banal :

$$F_{n+1}(x) = F_1(x) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{kx} \right).$$

D'après la question précédente, on a $F_{n+1}(x) \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{\ell}{(n+1)^{1/x}} \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{\ell}{n^{1/x}}$.

D'où $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{kx} \right) \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{\ell}{F_1(x)n^{1/x}}$, car $F_1(x) > 0$.

d) On a $F_{n+1}(x) \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{\ell}{(n)^{1/x}}$, et comme $1/x < 1$, la règle de Riemann montre que la série diverge.

Exercice 1.12.

Soit Φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$.

1. a) Montrer que Φ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} sur $]0, \sqrt{2\pi}[$.

b) On note Ψ la bijection réciproque de Φ . Dresser son tableau de variations.

2. Soit x réel.

a) Montrer $\Phi(x) + \Phi(-x) = \sqrt{2\pi}$.

En déduire que pour tout $y \in]0, \sqrt{2\pi}[$: $-\Psi(y) = \Psi(\sqrt{2\pi} - y)$.

b) Montrer que pour tout x réel négatif, on a :

$$e^{-x^2/2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \leq -x\Phi(x) \leq e^{-x^2/2}$$

[Pour la minoration, on écrira, pour $B < x$, $\int_B^x e^{-u^2/2} du = \int_B^x \frac{1}{u} \times ue^{-u^2/2} du$ avant de procéder à une intégration par parties]

c) En déduire un équivalent de $\Phi(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, puis un équivalent de $\sqrt{2\pi} - \Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Soit x un réel négatif. On pose $x = \Psi(y)$.

a) Dans quel intervalle se trouve y ?

b) Montrer que

$$-\frac{\Psi^2(y)}{2} - \ln |\Psi(y)| + \ln \left(1 - \frac{1}{\Psi^2(y)} \right) \leq \ln y \leq -\frac{\Psi^2(y)}{2} - \ln |\Psi(y)|$$

c) En déduire un équivalent de $\Psi(y)$ lorsque y tend vers 0 par valeurs supérieures.

Solution :

1. a) La fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ étant continue sur \mathbb{R} , strictement positive, l'intégrale étant clairement convergente, la fonction $x \mapsto \Phi(x)$ est de classe C^1 , strictement croissante et comme on sait que $\lim_{+\infty} \Phi = \sqrt{2\pi}$, elle réalise une bijection strictement croissante de \mathbb{R} sur $]0, \sqrt{2\pi}[$.

b) Comme $\Phi'(x)$ n'est jamais nul sur \mathbb{R} , son inverse Ψ est également de classe C^1 , strictement croissante et réalise une bijection de $]0, \sqrt{2\pi}[$ sur \mathbb{R} .

2. a) C'est une propriété de la loi normale. Par parité de $t \mapsto e^{-t^2/2}$ sur \mathbb{R} , $\Phi(-x) = \sqrt{2\pi} - \Phi(x)$, ce qui donne le résultat pour Φ .

Posons $x = \Psi(y)$. On vient de montrer que $\Phi(-\Psi(y)) = \sqrt{2\pi} - y$. En composant par Ψ , il vient $-\Psi(y) = \Psi(\sqrt{2\pi} - y)$.

b) Soit $x < 0$.

★ Pour tout $B < x$: $\int_B^x u.e^{-u^2/2} du \leq \int_B^x x.e^{-u^2/2} du$. Or :

$$\int_B^x u.e^{-u^2/2} du = [-e^{-u^2/2}]_B^x \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} -e^{-x^2/2}$$

Donc, $-e^{-x^2/2} \leq \int_{-\infty}^x x.e^{-u^2/2} du = x\Phi(x)$.

★ Pour la minoration, une intégration par parties donne pour tout $B < x$:

$$\begin{aligned} \int_B^x e^{-u^2/2} du &= \int_B^x \frac{1}{u} \times u e^{-u^2/2} du = \left[\frac{e^{-u^2/2}}{u} \right]_B^x - \int_B^x \frac{e^{-u^2/2}}{u^2} du \\ &= \left[\frac{e^{-u^2/2}}{u} \right]_B^x - \int_B^x \frac{u.e^{-u^2/2}}{u^3} du \end{aligned}$$

Or :

$$\int_B^x \frac{u.e^{-u^2/2}}{u^3} du \leq \int_B^x \frac{u.e^{-u^2/2}}{x^3} du = \frac{1}{x^3} [-e^{-u^2/2}]_B^x$$

En prenant la limite lorsque B tend vers $-\infty$, il vient :

$$\Phi(x) \geq \frac{-1}{x} \times e^{-x^2/2} + \frac{1}{x^3} \times e^{-x^2/2}$$

ce qui est la minoration demandée.

c) Lorsque x tend vers $-\infty$, les inégalités précédentes donnent un équivalent de $\Phi(x)$ qui est $-\frac{e^{-x^2/2}}{x}$.

La relation $\Phi(x) + \Phi(-x) = \sqrt{2\pi}$ donne, lorsque x tend vers $+\infty$

$$\sqrt{2\pi} - \Phi(x) = \Phi(-x) \sim \frac{e^{-x^2/2}}{x}$$

3. a) On a : $y \in]0, \Psi(0)[=]0, \sqrt{\pi/2}[$.

b) Posons $x = \Psi(y)$. Les inégalités précédentes donnent :

$$-\frac{1}{\Psi(y)} \times e^{-\Psi(y)^2/2} \left(1 - \frac{1}{\Psi(y)^2}\right) \leq \Phi(\Psi(y)) = y \leq -\frac{1}{\Psi(y)} \times e^{-\Psi(y)^2/2}$$

On remarque que $-\Psi(y) = |\Psi(y)|$. En passant au logarithme, il vient :

$$-\frac{\Psi^2(y)}{2} - \ln |\Psi(y)| + \ln \left(1 - \frac{1}{\Psi^2(y)}\right) \leq \ln y \leq -\frac{\Psi^2(y)}{2} - \ln |\Psi(y)|$$

c) On a $\lim_{y \rightarrow 0^+} \Psi(y) = -\infty$.

Donc, $\ln |\Psi(y)| = o\left(-\frac{\Psi^2(y)}{2}\right)$ et $\ln \left(1 - \frac{1}{\Psi^2(y)}\right) \sim -\frac{1}{\Psi^2(y)}$.

Ceci entraîne qu'au voisinage de 0, $\ln(y) \sim -\frac{\Psi^2(y)}{2}$ et comme $\Psi(y) < 0$:

$$\Psi(y) \sim -\sqrt{2 \ln(y)}$$

Exercice 1.13.

Soit n un entier, tel que $n \geq 2$.

On considère \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de la norme associée notée $\|\cdot\|$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes strictement positives. On confond vecteur de \mathbb{R}^n et matrice colonne canoniquement associée et on pose, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(X) = {}^t X A X$.

1. Soit B un élément de \mathbb{R}^n . Montrer que l'équation $A X = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^n$ admet une unique solution qu'on notera R .

2. Montrer qu'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que pour tout X de \mathbb{R}^n

$$\alpha \|X\|^2 \leq \Phi(X) \leq \beta \|X\|^2$$

Dans la suite de l'exercice, on pose pour $X \in \mathbb{R}^n$: $F(X) = \Phi(X) - 2 {}^t B X$.

3. a) Déterminer le gradient ∇F_X de F en X .

b) Soient X et H deux éléments de \mathbb{R}^n . Montrer que

$$F(X + H) = F(X) + \langle \nabla F_X, H \rangle + \Phi(H)$$

c) En déduire que F possède un minimum sur \mathbb{R}^n . En quel point est-il atteint ?

4. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, $X \neq 0$. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ de façon à ce que $F(X - \alpha \nabla F_X)$ soit minimal. Calculer ce minimum.

5. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de \mathbb{R}^n par, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $X_{k+1} = X_k - \alpha_k \nabla F_{X_k}$, où $\alpha_k = \frac{\|\nabla F_{X_k}\|^2}{2\Phi(X_k)}$ si $X_k \neq R$ et 0 sinon.

- a) Montrer que la suite $(F(X_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge.
- b) Exprimer $F(X_{k+1}) - F(X_k)$ en fonction de α_k et de ∇F_{X_k} .
6. Une suite $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de \mathbb{R}^n sera dite convergente vers un vecteur $Z \in \mathbb{R}^n$ si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Y_k - Z\| = 0$, ce qui revient à dire que les coordonnées de Y_k convergent vers les coordonnées correspondantes de Z .
- a) Montrer que la suite $(\nabla F_{X_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- b) En déduire la limite de la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Solution :

1. La matrice A n'admet pas 0 comme valeur propre : elle est donc inversible et l'équation $AX = B$ admet comme unique solution $R = A^{-1}B$.

2. La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale :

$$\exists D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ diagonale et } P \text{ orthogonale telles que } A = PD^tP.$$

Les coefficients λ_i sont les valeurs propres de A , donc sont strictement positifs.

Ainsi, on posant $Y = {}^tPX$, il vient : $\Phi(X) = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$. De plus, la matrice P étant orthogonale, on a : $\|Y\| = \|X\|$. Donc :

$$\min(\lambda_i) \|X\|^2 = \min(\lambda_i) \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \Phi(X) \leq \max(\lambda_i) \sum_{i=1}^n y_i^2 = \max(\lambda_i) \|X\|^2$$

On peut prendre $\alpha = \min(\lambda_i)$ et $\beta = \max(\lambda_i)$

3. a) En écrivant F en fonction des coordonnées du vecteur X , il vient :

$$F(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j - 2 \sum_{i=1}^n x_i b_i$$

C'est un polynôme en les n variables x_1, \dots, x_n . Les dérivées partielles existent et sont continues en tout point X et pour tout indice i :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(X) = 2a_{i,i}x_i + 2 \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}x_j - 2b_i$$

Matriciellement le gradient s'écrit donc

$$\nabla F_X = 2(AX - B)$$

b) Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$F(X + H) - F(X) = 2{}^tHAX + \Phi(H) - 2\langle B, H \rangle = \langle \nabla F_X, H \rangle + \Phi(H)$$

par la remarque précédente.

c) Les points critiques sont déterminés par $\nabla F_X = 0$. Le seul point critique est donc le point R . De plus, pour tout $H \in \mathbb{R}^n$, $F(R+H) - F(R) = \Phi(H) > 0$ (question 2), donc au point R on a un minimum global de F .

4. En remplaçant H par ∇F_X , on obtient :

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= F(X) - \langle \nabla F_X, \alpha \nabla F_X \rangle + \Phi(\alpha \nabla F_X) \\ &= \alpha^2 \Phi(\nabla F_X) - \alpha \langle \nabla F_X, \nabla F_X \rangle + F(X) \end{aligned}$$

C'est un trinôme du second degré en α .

Le minimum est atteint pour $\alpha = \frac{\|\nabla F_X\|^2}{2\Phi(\nabla F_X)}$ et vaut : $F(X) - \frac{\|\nabla F_X\|^4}{4\Phi(\nabla F_X)}$.

5. a) La question précédente montre que α_k est choisi de façon à minimiser la fonction g pour $X = X_k$. Donc $F(X_{k+1}) \leq F(X_k)$ et la suite est décroissante. Elle est de plus minorée par $F(R)$: elle converge.

b) On a :

$$F(X_{k+1}) - F(X_k) - \alpha_k \|\nabla F_{X_k}\|^2 + \alpha_k^2 \Phi(\nabla F_{X_k}) = -\frac{\|\nabla F_{X_k}\|^4}{4\Phi(\nabla F_{X_k})^2}$$

6. a) On remarque que $\lim_{k \rightarrow +\infty} (F(X_{k+1}) - F(X_k)) = 0$.

Donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|\nabla F_{X_k}\|^4}{4\Phi(\nabla F_{X_k})^2} = 0$.

Enfin par la question 2,

$$\frac{\|\nabla F_{X_k}\|^4}{4\Phi(\nabla F_{X_k})^2} \geq \frac{\|\nabla F_{X_k}\|^4}{4\beta \|\nabla F_{X_k}\|^2}$$

Tout ceci montre que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla F_{X_k}\|^2 = 0$.

b) Comme $\nabla F_{X_k} = 2(AX_k - B)$, on a $X_k = \frac{1}{2}(A^{-1}\nabla F_{X_k}) + R$ ce qui montre, par exemple en revenant aux coefficients, que $\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k = R$.

Exercice 1.14.

1. On considère une fonction g positive, décroissante et de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I .

a) Justifier l'existence des bornes suivantes : $m = \inf\{F(t), t \in [a, b]\}$ et $M = \sup\{F(t), t \in [a, b]\}$, où $F(t) = \int_a^t f(x)dx$.

b) Montrer que l'on a :

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(b)F(b) - \int_a^b g'(x)F(x) dx.$$

c) En déduire que :

$$mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq Mg(a).$$

d) Prouver qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a)F(c) = g(a) \int_a^c f(x) dx$$

2. On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R}^+ en posant : $\varphi(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$.

a) Montrer que l'intégrale définissant $\varphi(a)$ est convergente, pour tout $a > 0$.

b) Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et h la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* en posant $h(t) = \frac{1 - e^{-at}}{t}$.

Établir que h est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* qui est décroissante et positive. Montrer qu'elle est prolongeable en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

c) Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $A > 0$, montrer qu'il existe $c \in [0, A]$ tel que

$$\int_0^A \frac{1 - e^{-tx}}{t} \sin(t) dt = x[1 - \cos c]$$

Prouver que la fonction φ est continue en 0.

Solution :

1. a) Comme primitive d'une fonction continue, F est dérivable et par suite continue sur le segment $[a, b]$, elle admet donc une borne inférieure et une borne supérieure sur $[a, b]$ (qui sont atteintes).

b) On fait l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b F'(x)g(x)dx = [F(t)g(t)]_a^b - \int_a^b g'(x)F(x)dx \\ &= g(b)F(b) - \int_a^b g'(x)F(x)dx. \end{aligned}$$

c) Comme g est décroissante, sa dérivée est négative et en utilisant la question précédente il vient :

$$mg(a) = mg(b) + m(g(a) - g(b)) = mg(b) + m \int_a^b (-g'(x))dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx$$

et $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mg(b) + M \int_a^b (-g'(x))dx = Mg(a)$.

d) On peut supposer $g(a) \neq 0$. Avec la question c), on voit que l'égalité souhaitée s'obtient en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $t \mapsto F(t)/g(a)$ sur l'intervalle $[a, b]$.

2. a) Comme la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en 0, il n'y a pas de problème de convergence en 0.

Comme $|\frac{\sin t}{t}e^{-at}| \leq e^{-at}$, on voit que si $a > 0$, l'intégrale considérée est absolument convergente.

Lorsque $a = 0$, on voit avec une intégration par parties que :

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx = -\cos X + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Comme l'intégrale figurant dans la dernière inégalité est absolument convergente, on en déduit que l'intégrale proposée est encore convergente.

b) Un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $t \mapsto e^{-at}$ permet de voir que h se prolonge par continuité en posant $h(0) = a$. Avec un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $t \mapsto e^{at}$, on voit que $\frac{h(t) - h(0)}{t} = -\frac{a^2}{2} + o(1)$, par suite, h est dérivable en 0 et $h'(0) = -\frac{a^2}{2}$.

Comme pour $t > 0$, $h'(t) = \frac{(1+at)e^{-at} - 1}{t^2} = e^{-at} \frac{1+at - e^{at}}{t^2}$, avec le développement limité utilisé précédemment on trouve $\lim_{t \rightarrow 0} h'(t) = -\frac{a^2}{2}$ et h est donc de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ (on peut aussi utiliser ceci pour montrer la dérivabilité en 0). Le fait que $h'(t) \leq 0$ sur \mathbb{R}^+ est de notoriété publique. La fonction h est donc décroissante et il est clair qu'elle est positive.

c) Comme les hypothèses nécessaires sont vérifiées, la formule prouvée au cours de la première question, en prenant pour f la fonction $t \mapsto \sin t$ et pour g la fonction $t \mapsto \frac{1 - e^{-tx}}{t}$, donne bien l'égalité souhaitée. En majorant $1 - \cos x$ par 2 et en faisant tendre A vers ∞ , on obtient l'inégalité $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq 2x$ qui implique la continuité de φ en 0.

Exercice 1.15.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ la somme partielle de rang n de la série de terme général $u_k(x)$. En considérant les sommes partielles de rangs pairs et celles de rangs impairs, montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge pour tout réel x .

On notera $u(x)$ la somme de cette série.

2. Pour $n \geq 1$, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$.

3. Montrer que la série de terme général $(-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est convergente. On notera s sa somme.

4. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{n})$.

(on pourra considérer $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \ln(1 + \frac{1}{k})$, et utiliser le fait que :

$$|u(x) - s| \leq |u(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - s_n| + |s_n - s|$$

5. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $s_{2n} = \ln\left(\frac{(2n!)^2}{2^{4n}(n!)^4}(2n+1)\right)$ et en utilisant l'équivalence de Stirling : $n! \underset{(\infty)}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$.

Solution :

1. La série de terme général u_n est une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue. On sait alors que les sommes partielles de rangs pairs et celles de rangs impairs forment des suites adjacentes, donc convergentes de même limite et la suite des sommes partielles converge.

2. On a : $R_n(x) = u(x) - S_n(x)$ et comme $u(x)$ est compris entre $S_n(x)$ et $S_{n+1}(x)$, on a bien :

$$|R_n(x)| \leq |S_{n+1}(x) - S_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x^2}{(n+1)(1+x^2)}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

3. Même démonstration que dans la question 1.

$$\begin{aligned} 4. \star \text{ On a } |u(x) - s| &= |u(x) - S_n(x) + S_n(x) - s_n + s_n - s| \\ &\leq |u(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - s_n| + |s_n - s| \quad (1) \end{aligned}$$

\star Or, pour tout x réel, $|u(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$,

$|s_n - s| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ pour les mêmes raisons que dans la question précédente.

De plus, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, 2 \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, donc :

$$|u(x) - S_n(x)| + |s_n - s| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

\star Pour n_0 et $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq A$, $|S_{n_0}(x) - s_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ puisque $s_{n_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} S_{n_0}(x)$.

En écrivant l'inégalité (1) pour n_0 , on a le résultat.

b) Effectuons une démonstration par récurrence. L'initialisation est immédiate et si la relation est acquise pour un certain rang n , alors :

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n} - \ln\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2n+2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(2n!)^2}{2^{4n}(n!)^4}\right) - \ln\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left(\frac{(2n!)^2 (2n+1)^2}{2^{4n+2} (n!)^4 (n+1)^2} (2n+3) \right) = \ln \left(\frac{(2n+2!)^2 (2n+3)}{2^{4n+2} (n!)^4 (2n+2)^2 (n+1)^2} \right) \\
&= \ln \left(\frac{(2(n+1)!)^2}{2^{4(n+1)} ((n+1)!)^4} (2n+3) \right)
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait. On conclut par le principe de récurrence

En utilisant la formule de Stirling, on trouve $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Donc $s = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Exercice 1.16.

On note $C([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[0, 1]$.

À toute fonction $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, on associe la suite $(a_k(f))_k$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k(f) = \int_0^1 x^k f(x) dx.$$

1. Montrer que pour $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, la suite $(a_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. Soient α et β deux réels tels que $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 vérifiant les deux conditions suivantes :
 - i) pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, $P(x) > 1$.
 - ii) pour tout $x \in [0, \alpha] \cup [\beta, 1]$, $0 \leq P(x) \leq 1$.
3. Montrer qu'un polynôme P satisfaisant les conditions précédentes vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} (P(x))^n dx = +\infty.$$

4. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

a) On suppose qu'il existe trois constantes réelles ε , α et β avec $\varepsilon > 0$ et $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ telles que l'on ait :

$$\forall x \in [\alpha, \beta], f(x) \geq \varepsilon.$$

Soit P un polynôme satisfaisant aux conditions énoncées dans la question 2. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x)(P(x))^n dx = +\infty.$$

b) On suppose que f appartient à $C([0, 1], \mathbb{R})$ et vérifie $\forall k \in \mathbb{N}, a_k(f) = 0$. Montrer que la fonction f est identiquement nulle sur $[0, 1]$.

5. Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $x \in [0, 1]$.

a) On pose $F_1(x) = -\int_x^1 f(t) dt$. Exprimer $a_k(F_1)$ en fonction de $a_{k+1}(f)$.

b) Pour $x \in [0, 1]$, on pose $F_0(x) = f(x)$ et $\forall i \in \mathbb{N}, F_{i+1}(x) = -\int_x^1 F_i(t) dt$.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Exprimer $a_k(f)$ en fonction de $a_{k-i}(F_i)$.

c) On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq p, a_k(f) = 0$.

Prouver que F_p est identiquement nulle sur $[0, 1]$. Que peut-on en déduire pour f ?

Solution :

1. La fonction f est continue sur $[0, 1]$, donc bornée. On note M la borne supérieure de $|f(x)|$ sur $[0, 1]$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|a_k(f)| \leq \int_0^1 x^k |f(x)| dx \leq M \int_0^1 x^k dx = \frac{M}{k+1}.$$

Par encadrement, la suite $(a_k(f))_k$ converge vers 0.

2. Le polynôme P doit valoir 1 en α et β , on le cherche donc de la forme $P(X) = 1 + \lambda(X - \alpha)(\beta - X)$. On voit alors que $\lambda = 1$ convient (ou tout autre nombre strictement compris entre 0 et 1)

3. Soit P un des polynômes trouvés à la question précédente. Soit $[c, d]$ un segment strictement inclus dans $]\alpha, \beta[$ et m le plus petit des deux nombres $P(c)$ et $P(d)$. On a $m > 1$ et

$$\int_{\alpha}^{\beta} P(x)^n dx \int_c^d P(x)^n dx (d-c)m^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$$

4. a) Comme $\forall x \in [\alpha, \beta], f(x) \geq \varepsilon$, on a : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)P^n(x)dx \geq \varepsilon \int_{\alpha}^{\beta} P^n(x)dx$.

D'après la question précédente, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)P^n(x)dx = +\infty$.

D'autre part, pour tout $x \in [0, \alpha] \cup [\beta, 1]$, $0 \leq P(x) \leq 1$, donc $0 \leq P^n(x) \leq 1$.

D'où, $\left| \int_0^{\alpha} f(x)P^n(x)dx \right| \leq \int_0^{\alpha} |f(x)|dx$ et $\left| \int_{\beta}^1 f(x)P^n(x)dx \right| \leq \int_{\beta}^1 |f(x)|dx$.

Par suite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)P^n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\alpha} f(x)P^n(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} \dots + \int_1^{\beta} \dots \right) = +\infty.$$

b) On raisonne par l'absurde en supposant f non identiquement nulle. Ainsi, il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f(x_0) > 0$. On pose alors $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0) > 0$. Par continuité de f sur $[0, 1]$, il existe un voisinage $[\alpha, \beta]$ de x_0 dans $[0, 1]$ tel que pour tout $x \in [\alpha, \beta], f(x) \geq \varepsilon$. Nous sommes donc dans les conditions de 4.a et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x)P^n(x)dx = +\infty.$$

Écrivons alors $P(X) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k X^k \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.

Or, par hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 = a_k(f) = \int_0^1 x^k f(x) dx$. Alors, par linéarité de l'intégration, $\int_0^1 f(x) P^n(x) dx = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) P^n(x) dx = 0$.

On obtient donc une contradiction. Ainsi, la fonction f est identiquement nulle sur $[0, 1]$.

5. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k(F_1) = \int_0^1 x^k F_1(x) dx$. On effectue une intégration par parties en posant $u'(x) = x^k$, et en prenant $u(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, $v(x) = F_1(x)$ d'où $v'(x) = f(x)$. On obtient alors : $a_k(F_1) = \frac{-1}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} f(x) dx = \frac{-1}{k+1} a_k(F_1)$.

b) En utilisant la question précédente, on montre par récurrence que pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, on a :

$$a_k(f) = (-1)^i \frac{k!}{(k-i)!} a_{k-i}(F_i).$$

c) Supposons qu'il existe un entier p tel que pour tout $k \geq p$, $a_k(f) = 0$. Alors, par la question précédente appliquée pour $i = p$ et $k = p+u$, on trouve $a_u(F_p) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{N}$. Par la question 4, ceci implique que $F_p = 0$. Or, on montre que $f = F_0 = (F_p)^{(p)}$. La fonction f est donc identiquement nulle sur $[0, 1]$.

Exercice 1.17.

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par le premier terme u_0 et par les relations de récurrence suivantes :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{u_n}}}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{u_n}}}{2}$$

1. A quelle condition portant sur la valeur de u_0 , les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont-elles bien définies ?

Dans toute la suite, on supposera cette condition réalisée.

2. Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , $u_n^2 + v_n^2 = 1$.

3. Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites monotones bornées.

4. a) En déduire la convergence de ces deux suites. On note α la limite de (u_n) et β celle de (v_n) . Exprimer β en fonction de α et montrer que $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$.

b) Montrer que α est l'unique point fixe de l'application $f : t \mapsto \frac{\sqrt{2 + \sqrt{t}}}{2}$ sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$.

c) Déterminer selon la position de u_0 par rapport à α le sens de variation de chacune des suites (u_n) et (v_n) .

Solution :

1. Pour que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ soient bien définies sur \mathbb{N} , il est tout d'abord nécessaire que u_0 soit positif ou nul ainsi que $2 - \sqrt{u_0}$, c'est à dire $u_0 \leq 4$ afin que u_1 et v_1 soient définis.

Un raisonnement par récurrence montre clairement que dans ce cas $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont bien définies, positives, avec $0 \leq u_n \leq 4$.

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq v_n \leq u_n \leq 4$.

2. Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = \frac{2 + \sqrt{u_n} + 2 - \sqrt{u_n}}{4} = 1$.

3. D'après ce qui précède, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq v_n \leq u_n \leq 1$ et les suites u et v sont effectivement bornées.

D'autre part, la suite récurrente (u_n) est associée à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{x}}$ qui est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

Comme $u_0 \in \mathbb{R}^+$, et que \mathbb{R}^+ est stable par f , u est monotone, le sens de monotonie étant donné par le signe de $u_1 - u_0$, tandis que (v_n) est monotone de sens de monotonie opposé à celui de u , puisque pour tout $n \geq 0$,

$$v_{n+1} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{u_n}}}{2}.$$

4. a) Les deux suites (u_n) et (v_n) étant monotones et bornées, elles sont convergentes. De plus, en passant à la limite dans les inégalités trouvées plus

haut, on a $0 \leq \alpha \leq 1$ et bien sr $\beta = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{\alpha}}}{2}$. Enfin, $\alpha = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{\alpha}}}{2}$ donne

$\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}$, puis $\alpha \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}/2}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Enfin $\alpha \leq 1$ donne $\alpha \leq \frac{\sqrt{2 + \sqrt{1}}}{2} < 1$.

Ainsi

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$$

b) Pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = x$ est équivalent successivement à $2x = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$ puis à $2 + \sqrt{x} = 4x^2$ puis à $x = 4(2x^2 - 1)^2$ et $2x^2 - 1 \geq 0$, i.e. $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Posons $P(x) = 4x^4 - 4x^2 - \frac{x}{4} + 1$. On a :

$$P'(x) = 16x^3 - 8x - \frac{1}{4}, P''(x) = 48x^2 - 8 = 8(6x^2 - 1).$$

P'' reste strictement positif sur $I = [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$; P' est donc strictement croissante sur I et $P'(1) = 8 - \frac{1}{4} > 0$, $P'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4\sqrt{2} - 8\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} < 0$. Il existe donc un unique x_0 de I qui annule P' et $x_0 > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

P est strictement décroissante sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}, x_0[$ et strictement croissante sur $]x_0, 1]$.

Avec $P(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{8} < 0$ et $P(1) = \frac{3}{4} > 0$, on a aussi $P(x_0) < 0$ et on en conclut que P s'annule une fois et une seule sur I , ce qu'il fallait.

c) On sait que la suite (u_n) est monotone et converge vers α . Donc :

- Si $u_0 < \alpha$ alors (u_n) est strictement croissante tandis que (v_n) est strictement décroissante.
- Si $u_0 > \alpha$ alors (u_n) est strictement décroissante tandis que (v_n) est strictement croissante.
- Si $u_0 = \alpha$ alors u est constante égale à α et v constante égale à β .

Exercice 1.18.

Pour tout entier n de \mathbb{N} , on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt$.

1. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n) . En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_{n+2} + u_n$.
4. Pour tout $n \geq 2$, montrer que $\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.

En déduire un équivalent simple de u_n , lorsque n tend vers l'infini, puis la nature de la série de terme général u_n .

5. On considère la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, on note S_N sa somme partielle de rang N , soit : $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

a) Préciser la nature de la série considérée.

b) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p (u_{2p+3} + u_{2p+1}) = \frac{1}{2} S_N$.

c) En déduire la valeur de la somme de la série.

Solution :

1. Clairement $u_0 = \frac{\pi}{4}$. Puis, $u_1 = [-\ln(\cos t)]_0^{\pi/4} = -\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} \ln(2)$.

Enfin, comme pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\tan'(t) = \tan^2(t) + 1$, on trouve :

$$u_2 = \int_0^{\pi/4} (\tan^2(t) + 1 - 1) dt = [\tan(t) - t]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

2. Pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n (\tan t - 1) dt$. Comme pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $0 \leq \tan t \leq 1$, il s'ensuit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite $(u_n)_n$ est donc décroissante. De plus, par positivité de l'intégrale, la suite $(u_n)_n$ est minorée par 0. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est convergente.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} + u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n (\tan^2 t + 1) dt = \left[\frac{(\tan t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Par décroissance de la suite $(u_n)_n$, on obtient d'après la question 3 :

$$2u_n \geq u_n + u_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

De même : $2u_n \leq u_n + u_{n-2} = \frac{1}{n-1}$. On en déduit les inégalités demandées.

Il en résulte que $u_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{2n}$.

Par la règle de Riemann, on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

5. a) La règle spécifique aux séries alternées montre que la série converge. Si on veut détailler, on étudie les sous-suites des sommes partielles d'indices pairs et celles d'indices impairs et on montre qu'elles sont adjacentes.

b) D'après la question 3, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p+3} + u_{2p+1} = \frac{1}{2p+2}$.

En multipliant par $(-1)^p$, puis en sommant, on trouve que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p (u_{2p+3} + u_{2p+1}) = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{(-1)^p}{p+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

d'où le résultat.

c) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p (u_{2p+3} + u_{2p+1}) = \sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p u_{2p+3} + \sum_{p=0}^N (-1)^p u_{2p+1}$$

Après un changement d'indice, on obtient :

$$\sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p (u_{2p+3} + u_{2p+1}) = - \sum_{p=1}^N (-1)^p u_{2p+1} + \sum_{p=0}^N (-1)^p u_{2p+1}$$

$$= u_1 + (-1)^{N+1} u_{2N+1}.$$

Comme la suite $(u_n)_n$ converge vers 0 (question 4), il s'ensuit que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p (u_{2p+3} + u_{2p+1}) \right) = u_1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

On en déduit que la somme de la série proposée est $\ln 2$.

Exercice 1.19.

On considère une suite réelle bornée $(a_n)_{n \geq 0}$ et on pose, pour tout $x \in I = [0, 1[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On note $(s_n)_{n \geq 0}$ la suite des sommes partielles définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = a_0 + \dots + a_n.$$

On admet que si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si $x \mapsto K(x)$ est une fonction définie sur I à valeurs dans \mathbb{N} telle que $\lim_{x \rightarrow 1^-} K(x) = +\infty$, alors on

a $\lim_{x \rightarrow 1^-} u_{K(x)} = \ell.$

1. Vérifier que la série définissant la fonction f est absolument convergente pour tout x de I . La fonction f est donc bien définie sur I .

2. Soit N un entier strictement positif fixé. Montrer que

$$(1-x) \sum_{n=0}^N s_n x^n = \sum_{n=0}^N a_n x^n - s_N x^{N+1}.$$

En déduire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ est convergente pour tout $x \in I$ et que l'on a

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

3. On suppose dans cette question que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente et de somme nulle.

a) Pour tout $x \in I$, on pose $K(x) = \lfloor 1/\sqrt{1-x} \rfloor$, où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t . Vérifier que $K(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

b) On pose $u_n = \sup\{|s_k|, k \geq n\}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et converge vers 0.

c) Montrer que l'on a :

$$|f(x)| \leq (1-x)[(K(x)+1)u_0 + \sum_{k=K(x)+1}^{\infty} |s_k| x^k] \leq (1-x)(K(x)+1)u_0 + u_{K(x)+1}.$$

d) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$.

4. On suppose dans cette question que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente et de somme s . Prouver que $f(x)$ converge vers s lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Solution :

1. L'ensemble $\{|a_k|, k \geq 0\}$ est borné, on peut donc considérer sa borne supérieure M . On a $|a_k x^k| \leq M x^k$ puisque $x \in [0, 1[$. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet alors de conclure.

2. On a :

$$(1-x) \sum_{n=0}^N s_n x^n = \sum_{n=0}^N s_n x^n - \sum_{n=1}^{N+1} s_{n-1} x^n = \sum_{n=0}^N a_n x^n - s_N x^{N+1}.$$

Comme $|s_N x^{N+1}| \leq (N+1)M x^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, on en déduit que la série de terme général $s_n x^n$ converge et on obtient à la limite la formule souhaitée.

3. a) On a $\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 \leq K(x)$, d'où le résultat.

b) Comme la suite $(s_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0, l'ensemble $\{|s_n|, n \geq 0\}$ est non vide et borné, il possède une borne supérieure, et il s'ensuit que u_n est bien défini.

Si $I =]-r, r[$ est un intervalle ouvert contenant 0, il n'y a qu'un nombre fini de s_n qui ne se trouvent pas dans l'intervalle $]-r/2, r/2[$ car la suite $(s_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0, et par suite il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ qui ne sont pas contenus dans I . Ceci implique la convergence de u_n vers 0.

c) En utilisant l'égalité prouvée à la question 2), il vient :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq (1-x) \sum_{n=0}^{K(x)} |s_n| x^n + (1-x) \sum_{n=K(x)+1}^{\infty} |s_n| x^n \\ &\leq (1-x)(K(x)+1)u_0 + (1-x)u_{K(x)+1} \sum_{n=K(x)+1}^{\infty} x^n \\ &\leq (1-x)(K(x)+1)u_0 + (1-x)u_{K(x)+1} \frac{x^{K(x)+1}}{1-x} \\ &\leq (1-x)(K(x)+1)u_0 + u_{K(x)+1}. \end{aligned}$$

d) On observe que :

$$(1-x)(K(x)+1)u_0 + u_{K(x)+1} \leq (1-x) \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} + 1 \right) u_0 + u_{K(x)+1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0,$$

d'après la propriété évidente admise dans l'énoncé et la question 3. b).

4. On se ramène au cas précédent en posant $b_0 = a_0 - s$ et $b_n = a_n$ si $n \geq 1$. En effet, on a :

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (s_n - s)x^n + s = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) x^k + s.$$

Exercice 1.20.

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{e^t - 1} dt$ est convergente si et seulement si $x > -1$.

On définit alors la fonction f sur $] -1, +\infty[$ en posant : $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{e^t - 1} dt$.

2. a) Déterminer $f(0)$ en utilisant le changement de variable $u = e^{-t}$.

b) Montrer que, pour $x > 0$, on a $f(x+1) - f(x) = \frac{e^{-(x+1)}}{x+1}$. Donner la valeur de $f(1)$.

3. Dresser le tableau de variations de f et préciser les limites aux bornes.

4. a) Montrer que pour tout réel x strictement supérieur à -1 , l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t e^{-tx}}{e^t - 1} dt$ est convergente.

b) Établir que pour tout réel h strictement positif, on a

$$|f(x+h) - f(x)| \leq h \int_1^{+\infty} \frac{t e^{-tx}}{e^t - 1} dt$$

c) Établir que, pour tout réel h strictement négatif et tel que $h > \frac{-x-1}{2}$, on a :

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |h| \int_1^{+\infty} \frac{t e^{-t(x-1)/2}}{e^t - 1} dt$$

d) En déduire que f est continue en tout point de $] -1, +\infty[$.

5. Comment pourrait-on démontrer que f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et que, pour tout x strictement supérieur à -1 , on a : $f'(x) = - \int_1^{+\infty} \frac{t e^{-tx}}{e^t - 1} dt$.

Solution :

1. La fonction $g : t \mapsto \frac{e^{-tx}}{e^t - 1}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, $g(t) \sim e^{-t(x+1)}$ dont l'intégrale converge sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $x+1 > 0$. Le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives permet de conclure que l'intégrale définissant $f(x)$ converge si et seulement si $x > -1$.

2. a) En sous-entendant le passage à la limite :

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{1 - e^{-t}} = [\ln(1 - e^{-t})]_1^{+\infty} = -\ln(1 - e^{-1}) \\ &= -\ln(e - 1) + 1 \end{aligned}$$

b) Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$f(x + 1) - f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t(x+1)}}{e^t - 1} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{e^t - 1} dt = \int_1^{+\infty} -e^{-t(x+1)} dt,$$

soit :

$$f(x + 1) - f(x) = -\frac{e^{-(x+1)}}{x + 1}$$

Avec $x = 0$, on obtient : $f(1) - f(0) = -\frac{1}{e}$. Comme $f(0) = 1 - \ln(e - 1)$, on a $f(1) = 1 - \frac{1}{e} - \ln(e - 1)$.

3. a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x > y > -1$, on a pour $t \geq 1$, $-tx < -ty$, et par croissance de la fonction exponentielle les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant : $f(x) \leq f(y)$, et même $f(x) < f(y)$ par continuité de la fonction à intégrer, donc f est strictement décroissante sur $] -1, +\infty[$.

b) $\forall t \geq 1$, $e^t - 1 \geq e - 1$. Par suite :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{e - 1} \int_1^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{e - 1} \times \frac{e^{-x}}{x}. \text{ D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$\star \forall t \geq 1$, $e^t - 1 \leq e^t$, et :

$$f(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{e^t} dt = \int_1^{+\infty} e^{-t(x+1)} dt = \frac{e^{-(x+1)}}{x + 1}. \text{ D'où : } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

4. a) La fonction $\varphi : t \rightarrow \frac{t \cdot e^{-tx}}{e^t - 1}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a : $\varphi(t) \sim t \cdot e^{-t(x+1)}$. Si $x > -1$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \times t \cdot e^{-t(x+1)} = 0$, ce qui

montre que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge.

b) Pour $h > 0$ et $t \geq 1$, classiquement :

$$|e^{-t(x+h)} - e^{-tx}| = e^{-tx}(1 - e^{-th}) \leq ht \cdot e^{-tx}$$

$$\text{Puis en intégrant : } |f(x+h) - f(x)| \leq \int_1^{+\infty} \frac{|e^{-t(x+h)} - e^{-tx}|}{e^t - 1} dt \leq h \int_1^{+\infty} \frac{t \cdot e^{-tx}}{e^t - 1} dt.$$

c) Pour $h < 0$ et $t \geq 1$:

$$|e^{-t(x+h)} - e^{-tx}| = e^{-t(x+h)}(1 - e^{th}) \leq e^{-t(x+h)}(-th)$$

$$\text{et comme } h < \frac{-x-1}{2}, |e^{-t(x+h)} - e^{-tx}| \leq e^{-t \frac{x-1}{2}}(-th)$$

En intégrant comme précédemment, on a alors l'inégalité demandée.

d) Le résultat a) donne la continuité à droite et le résultat b) la continuité à gauche en tout point x .

5. En remplaçant les inégalités usuelles sur la fonction exponentielle par des inégalités de Taylor-Lagrange à un ordre plus élevé, on prouverait de la même façon que f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et que, pour tout x strictement supérieur à -1 , on a : $f'(x) = - \int_1^{+\infty} \frac{t \cdot e^{-tx}}{e^t - 1} dt$.

Exercice 1.21.

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $\arctan(t) + \arctan(\frac{1}{t}) = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt) - \arctan(yt)}{t} dt$$

a) Montrer que f est définie au moins sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

b) On suppose que $x \neq y$. Donner une expression simple de $f(x, y)$.

(On écrira que $f(x, y) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\arctan(xt) - \arctan(yt)}{t} dt$).

3. Soit g la fonction définie sur $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \setminus \{(x, x), x > 0\}$ par :

$$g(x, y) = \frac{f(x, y)}{x - y}$$

Montrer qu'on peut prolonger g par continuité en tout point (x, x) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Solution :

1. Soit $\varphi : t \mapsto \arctan(t) + \arctan(1/t)$, la fonction φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , avec $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \times \frac{-1}{t^2} = 0$. Elle est donc constante sur cet intervalle et vaut en $t = 1$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

2. La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\arctan(xt) - \arctan(yt)}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . On peut supposer $x > y$, auquel cas, la fonction φ est positive sur \mathbb{R}^{+*} .

- au voisinage de 0, un DL de \arctan donne $\varphi(t) \sim \frac{(x-y)t}{t}$ qui admet une limite en 0 : c'est donc une intégrale faussement impropre en 0.

- au voisinage de $+\infty$, la question précédente permet d'écrire que $\varphi(t) \sim \frac{x-y}{xyt^2}$ et la règle de Riemann donne la convergence de l'intégrale sur $[1, +\infty[$.

b) On écrit (il n'y a pas de problème en 0, en prolongeant les fonctions par continuité) :

$$\int_0^A \frac{\arctan(xt) - \arctan(yt)}{t} dt = \int_0^A \frac{\arctan(xt)}{t} dt - \int_0^A \frac{\arctan(yt)}{t} dt$$

Les changements de variable $u = xt$ et $u = yt$ (licites), ainsi que la relation de Chasles permettent d'obtenir :

$$\int_0^A \frac{\arctan(xt) - \arctan(yt)}{t} dt = \int_{yA}^{xA} \frac{\arctan(u)}{u} du.$$

Par le résultat de la question 1, on écrit :

$$\begin{aligned} \int_{yA}^{xA} \frac{\arctan(u)}{u} du &= \frac{\pi}{2} \int_{yA}^{xA} \frac{du}{u} - \int_{yA}^{xA} \frac{\arctan(1/u)}{u} du \\ &= \frac{\pi}{2} (\ln(x) - \ln(y)) - \int_{yA}^{xA} \frac{\arctan(1/u)}{u} du. \end{aligned}$$

Enfin, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{yA}^{xA} \frac{\arctan(1/u)}{u} du = 0$, comme reste d'intégrale convergente

ou en majorant la fonction à intégrer par $\frac{1}{u^2}$. Donc :

$$f(x, y) = \frac{\pi}{2} (\ln(x) - \ln(y)).$$

3. g est définie par : $g(x, y) = \frac{\pi}{2} \times \frac{\ln x - \ln y}{x - y}$, lorsque x et y sont strictement positifs et différents.

Soit $x > 0$ fixé, on a $\lim_{y \rightarrow x} g(x, y) = \frac{\pi}{2x}$. On est donc conduit à poser :

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \times \frac{\ln x - \ln y}{x - y} & \text{si } y \neq x \\ \frac{\pi}{2x} & \text{si } y = x \end{cases}.$$

La fonction g est évidemment continue sur Δ .

Pour $x_0 > 0$, posons $x = x_0 + h, y = x_0 + k$, avec h et k assez petits pour que $x_0 + h > 0$ et $x_0 + k > 0$. Alors :

→ Si $h \neq k$, $g(x, y) = \frac{\pi}{2} \times \frac{\ln(x_0 + h) - \ln(x_0 + k)}{(x_0 + h) - (x_0 + k)} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{t}$, avec t compris entre $x_0 + h$ et $x_0 + k$ (théorème des accroissements finis).

→ Tandis que si $h = k$, $g(x, y) = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{x_0 + h}$.

Ainsi, dans les deux cas :

$$|g(x_0 + h, x_0 + k) - g(x_0, x_0)| = \frac{\pi}{2} \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{x_0} \right|, \text{ où } |t - x_0| \leq \max(|h|, |k|).$$

Ainsi $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} g(x_0 + h, x_0 + k) = g(x_0, x_0)$ et g est aussi continue en tout point (x_0, x_0) avec $x_0 > 0$.

