

Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire BL constituent la première version d'un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2011.

1 Sujets donnés en option scientifique

Sujet S 1150 - Exercice

Les variables aléatoires de cet exercice sont toutes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit λ un réel strictement positif donné et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\{-1, 1\}$ de même loi définie par :

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{\lambda + 1}.$$

- 1) Question de cours : Énoncer le théorème de l'espérance totale.
- 2) Calculer, pour tout n de \mathbb{N} , les moments d'ordre 1 et 2 de la variable aléatoire X_n .
- 3) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire

$$U = X_0 X_3 - X_1 X_2.$$

- 4) Pour tout n de \mathbb{N} , on pose $Y_n = \prod_{i=0}^n X_i$.
 - a) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de λ et de n . En déduire la loi de Y_n .
 - b) Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 5) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On suppose que, pour tout n de \mathbb{N} , les variables aléatoires T, X_0, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.

Soit $V = \prod_{i=0}^T X_i$ l'application définie sur Ω par : $\forall \omega \in \Omega, V(\omega) = \prod_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$.

- a) En admettant que V est une variable aléatoire, déterminer pour tout n de \mathbb{N} , la loi conditionnelle de V sachant l'événement $(T = n)$.
- b) En déduire l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(V / [T = n])$.
- c) Montrer que $\mathbb{E}(V) = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \exp\left(-\frac{2\lambda}{1 + \lambda}\right)$.

- 6) Quelle est la loi de la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$?

Sujet S 1150 - Exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré $\leq n$.

- 1) Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ unique tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

- 2) Décomposer P_n en un produit de polynômes de degré 1.

Sujet S 1152 - Exercice

- 1) Question de cours : Théorème de d'Alembert-Gauss.
- 2) On considère l'équation (1) dont l'inconnue x est réelle :

$$x^3 - x^2 + k = 0 \quad (1).$$

Donner en fonction de $k \in \mathbb{R}$, le nombre de racines de (1).

- 3) On suppose que (1) possède trois racines (éventuellement confondues) que l'on note α , β et γ . On pose :

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma, \tau = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma \text{ et } \pi = \alpha\beta\gamma.$$

Montrer que $\sigma = 1$, $\tau = 0$, $\pi = -k$.

Réciproquement, si on suppose $\sigma = 1$, $\tau = 0$, $\pi = -k$, peut-on en déduire que les nombres α , β et γ sont les trois solutions de (1) ?

- 4) Soit a , b et c , trois réels donnés. On note $s = a + b + c$, $t = ab + ac + bc$ et $p = abc$.
On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 ayant A pour matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 .

- a) Montrer que s est une valeur propre de A et donner un vecteur propre associé à s .
- b) Montrer que le plan vectoriel P d'équation $x + y + z = 0$ est stable par f .
- c) On suppose qu'il existe une autre valeur propre $\lambda \neq s$. Montrer que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est inclus dans P .

Dans la suite, on suppose que : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $t = ab + ac + cb = 0$ et $a + b + c > 0$.

- 5)
 - a) Montrer que a , b , c sont racines de (1) et $k \in [0, \frac{4}{27}]$.
 - b) Justifier l'existence d'une base orthonormée \mathcal{V} de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & r \end{pmatrix}$.
 - c) Montrer que $u = r$, $v = -w$ et $u^2 + w^2 = 1$. En déduire l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = r = \cos \theta$ et $w = -v = \sin \theta$. L'endomorphisme f admet-il d'autres valeurs propres que 1 ?

Sujet S 1152 - Exercice sans préparation

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ i.i.d.. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k suit une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

On pose $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Etudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Sujet S 1155 - Exercice

- 1) Question de cours : Rappeler la définition d'un espace vectoriel euclidien.
- 2) On considère l'espace euclidien \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 ayant comme matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

- a) Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}^3, \|f(u)\| \leq \|u\|$.
 - b) Vérifier que f est un projecteur.
 - c) Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sans calcul.
Montrer que $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$.
- 3) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n , et p un projecteur de E .
 - a) Montrer que si $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont orthogonaux, alors : $\forall u \in E, \|p(u)\| \leq \|u\|$.
 - b) Montrer que si $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ ne sont pas orthogonaux, alors : $\exists u \in E, \|p(u)\| > \|u\|$.
 - c) Montrer qu'un projecteur p non nul est une projection orthogonale si et seulement si :

$$\sup_{u \neq 0} \frac{\|p(u)\|}{\|u\|} = 1.$$

Sujet S 1155 - Exercice sans préparation

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.

On suppose que l'espérance $\theta = \mathbb{E}(X_1)$ est non nulle et inconnue.

Trouver l'estimateur sans biais de l'espérance $\theta = \mathbb{E}(X_1)$ qui soit de variance minimale dans

l'ensemble des estimateurs sans biais de la forme $\tilde{\theta}_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ $((a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n)$.

Sujet S 1157 - Exercice

- 1) Question de cours : Estimateur sans biais et convergent d'un paramètre réel inconnu.

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$, et pour n entier supérieur ou égal à 2, soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon i.i.d. de la loi de X . On suppose que la loi de X dépend d'un paramètre réel θ non nul inconnu.

On note \mathcal{E}_θ l'ensemble des estimateurs $T_n = T_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de θ sans biais et admettant une variance.

On admet l'existence d'un estimateur \hat{T}_n de \mathcal{E}_θ de variance minimale : on dit que \hat{T}_n est optimal dans \mathcal{E}_θ .

Soit T_n et U_n deux éléments de \mathcal{E}_θ .

On pose, pour tout réel α : $S_\alpha(T_n, U_n) = T_n + \alpha(U_n - T_n)$.

- 2) Montrer que $S_\alpha(T_n, U_n)$ appartient à \mathcal{E}_θ .
3) a) Etablir pour tout réel α , l'inégalité (\mathbb{V} désigne la variance et **Cov** la covariance) :

$$\alpha^2 \mathbb{V}(U_n - \hat{T}_n) + 2\alpha \mathbf{Cov}(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) \geq 0.$$

- b) En déduire que $\mathbf{Cov}(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) = 0$.
4) Réciproquement, montrer que si $\mathbf{Cov}(T_n, U_n - T_n) = 0$ pour tout U_n de \mathcal{E}_θ , alors T_n est optimal dans \mathcal{E}_θ .
5) On suppose l'existence de deux estimateurs optimaux \hat{T}_n et T_n^* dans \mathcal{E}_θ . Montrer que $T_n^* = \hat{T}_n$ presque sûrement.
6) Dans cette question, X suit la loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.

On pose : $\hat{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $W_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_n)^2$.

- a) Montrer que \hat{X}_n et W_n sont des estimateurs sans biais de θ .
b) On admet que \hat{X}_n est optimal dans \mathcal{E}_θ et que W_n admet une variance.
Montrer que : $\mathbf{Cov}(\hat{X}_n, W_n) = \frac{\theta}{n}$.

Sujet S 1157 - Exercice sans préparation

Soit E l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles.

Soit Φ l'endomorphisme de E qui, à toute suite (u_n) de E , associe la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

- 1) Déterminer les noyaux de Φ , de $\Phi \circ \Phi$ et de Φ^k pour $k \geq 3$ et leurs dimensions respectives.
2) Quelle est l'image de Φ ?

Sujet S 1163 - Exercice

- 1) Question de cours : Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} ($n \geq 2$). Donner un exemple d'une fonction non continue sur \mathbb{R}^2 .

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^1 . On définit la fonction g de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt & \text{si } x \neq y \\ f(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

- 2) Exemple.

Dans cette question seulement, on suppose que f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

Déterminer la fonction g correspondante et montrer que g admet un minimum global sur \mathbb{R}^2 .

- 3) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$. Montrer que g est de classe C^1 sur D et calculer ses dérivées partielles du premier ordre sur D .
- 4) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que g admet des dérivées partielles du premier ordre en (a, a) et les exprimer en fonction de $f'(a)$, où f' désigne la dérivée de f .
- 5) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in D$.

- a) Montrer que :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) = \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y (y-t)(f'(t) - f'(a)) dt.$$

- b) En déduire que : $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| \leq \frac{1}{2} \sup \{|f'(t) - f'(a)|, t \in S\}$ où S désigne le segment d'extrémités x et y .

- 6) Déduire des questions précédentes que g est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Sujet S 1163 - Exercice sans préparation

Un joueur effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce qui donne Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $q = 1 - p$, $p \in]0, 1[$.

On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit la variable aléatoire N égale au rang d'apparition du premier Pile s'il existe et égale à 0 si Pile n'apparaît jamais.

On définit une variable aléatoire X de la façon suivante :

Si $N = n > 0$, le joueur dispose dans une urne n boules numérotées de 1 à n ; Il tire une boule de cette urne et X prend comme valeur le numéro de la boule tirée ;

Si $N = 0$, on pose $X = 0$.

- 1) Pour tout k de \mathbb{N}^* , exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ sous forme de somme.

- 2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{p}{q} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^q \left(\sum_{n=k}^M t^{n-1} \right) dt$.

- 3) Etudier la limite de $\int_0^q \frac{t^M}{1-t} dt$ lorsque M tend vers $+\infty$. Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$.

Sujet S 1175 - Exercice

Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 5 et $F = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans \mathbb{R} .

1) Question de cours : Caractériser les isomorphismes d'espaces vectoriels de dimensions finies ?

2) Soit f_1, f_2, \dots, f_6 les applications linéaires de E vers \mathbb{R} définies par :

$$\forall P \in E, f_1(P) = P(0), f_2(P) = P'(0), f_3(P) = P''(0), f_4(P) = P(1), f_5(P) = P'(1) \text{ et } f_6(P) = P''(1),$$

où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P .

a) Que vaut $\bigcap_{i=1}^6 \text{Ker}(f_i)$?

b) L'application Φ de E dans \mathbb{R}^6 définie par $\Phi(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_6(P))$ est-elle un isomorphisme d'espaces vectoriels ?

c) En déduire que la famille (f_1, \dots, f_6) est libre dans l'espace vectoriel F .

3) Soit S l'ensemble défini par :

$$S = \{Q \in \mathbb{R}[X] / Q(0) = 1, Q'(0) = 1, Q''(0) = 0, Q(1) = 0, Q'(1) = 0 \text{ et } Q''(1) = 1\}.$$

a) Montrer que l'ensemble $S \cap E$ contient exactement un élément et le déterminer.

b) Soit $Q \in S$. Déterminer le reste de la division euclidienne de Q par $X^3(X-1)^3$. En déduire l'ensemble S .

4) a) Déterminer l'ensemble K défini par :

$$K = \left\{ Q \in \mathbb{R}[X] / Q(-1) = 0, Q'(-1) = 0, Q''(-1) = 4, Q\left(-\frac{3}{2}\right) = 1, Q'\left(-\frac{3}{2}\right) = 2, Q''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \right\}.$$

b) Existe-t-il une fonction f , non polynomiale, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , deux fois dérivable, telle que :

$$f(-1) = 0, f'(-1) = 0, f''(-1) = 4, f\left(-\frac{3}{2}\right) = 1, f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 2, f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \quad ?$$

Sujet S 1175 - Exercice sans préparation

On considère une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$ où $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

On note pour $n \geq 1$, $X_n = \max_{1 \leq i \leq n} U_i$.

1) Prouver que la suite (X_n) converge en probabilité vers θ .

2) Etudier la convergence en loi de $Y_n = n(\theta - X_n)$.

Sujet S 101 - Exercice

Dans l'exercice toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles. Lorsqu'elle existe, l'espérance d'une variable aléatoire X est notée $\mathbb{E}(X)$.

- 1) Dans cette question X est une variable aléatoire discrète ou à densité.
 - a) Question de cours : Rappeler la définition de la fonction de répartition de X et en donner les principales propriétés.
 - b) On appelle médiane de X tout réel m tel que : $\mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$.
Démontrer qu'un tel réel existe toujours, mais qu'il n'est pas forcément unique.
- 2) Dans cette question X est une variable aléatoire discrète ou à densité admettant un moment d'ordre 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \mathbb{E}((X - x)^2)$.
 - a) Pour x réel, donner, en justifiant, l'expression de $f(x)$ en fonction de la variance $\mathbb{V}(X)$ de X , de $\mathbb{E}(X)$ et de x .
 - b) Démontrer qu'il existe un unique réel x_0 en lequel la fonction f est minimale et déterminer x_0 et $f(x_0)$.
- 3) Dans cette question X est une variable aléatoire à densité et qui admet une espérance. On pose, pour x réel, $g(x) = \mathbb{E}(|X - x|)$ et $\varphi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \geq x)$.

- a) Montrer que $x\mathbb{P}(X \geq x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Quel résultat analogue a-t-on au voisinage de $-\infty$?
- b) On suppose dans cette sous-question qu'il existe une densité de X qui est continue sur \mathbb{R} . Montrer que, pour tout x réel,

$$g(x) = \int_{-\infty}^x \mathbb{P}(X \leq t) dt + \int_x^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq t) dt \quad (1).$$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que la formule (1) reste valable même si aucune des densités de X n'est continue sur \mathbb{R} .

- c) Déterminer, pour a, b réels, une expression de $g(b) - g(a)$ sous la forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction φ .
En déduire que si m est une médiane de X , g est minimale en m .
- 4) a) Soit a un réel strictement positif. On note h la fonction de la variable réelle définie par :

$$h(x) = \int_0^{+\infty} |t - x| e^{-at} dt.$$

Déterminer le minimum de h et préciser un réel en lequel ce minimum est atteint.

- b) Répondre aux mêmes questions pour la fonction k définie par $k(x) = \int_{-1}^1 \frac{|t - x|}{1 + t^2} dt$.

Sujet S 101 - Exercice sans préparation

Dans cet exercice E désigne un espace vectoriel et p, n sont deux entiers strictement positifs.

1) Soit (e_1, \dots, e_p) une famille libre de vecteurs de E et x un vecteur de E .
Caractériser, en le justifiant, le fait que la famille (e_1, \dots, e_p, x) soit liée.

2) Soit (x_1, \dots, x_n) une famille de vecteurs de E supposés non tous nuls. On note

$$\mathcal{A} = \{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, (x_i)_{i \in J} \text{ libre}\}$$

Soit J_0 un élément de \mathcal{A} de cardinal maximal.

Que peut-on dire de $(x_i)_{i \in J_0}$ vis-à-vis de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$?

3) Soit (x_1, \dots, x_n) une famille de vecteurs de E et r le rang de cette famille.
On en extrait une famille de n' vecteurs et on note r' le rang de cette famille extraite.
Montrer que $n - r \geq n' - r'$.

Sujet S 108 - Exercice

Dans l'exercice toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles.

- 1) Soit X une variable aléatoire.
 - a) Rappeler la définition de la fonction de répartition F de X et en donner des propriétés.
 - b) Dans cette sous-question, on suppose que X est à densité. Montrer que F réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]0, 1[$ si et seulement si F est strictement croissante.
 - c) Soit Y une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Soit X définie sur Ω par :

$$X(\omega) = \begin{cases} Y(\omega) + 1, & \text{si } Y(\omega) < -1; \\ 0, & \text{si } -1 \leq Y(\omega) \leq 1; \\ Y(\omega) - 1, & \text{si } Y(\omega) > 1. \end{cases}$$

Montrer que X est une variable aléatoire, et représenter sa fonction de répartition. Quel commentaire peut-on faire ?

Dans la suite de l'exercice X désigne une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F est strictement croissante. On envisage plusieurs méthodes pour simuler la loi de X conditionnellement à $(X > m)$ pour un réel m donné.

- 2) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et m un réel fixé.
 - a) Montrer que l'événement $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X_n \leq m)$ est de probabilité nulle.
 - b) Soit Z l'application de Ω dans \mathbb{R} définie par : $\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = X_p(\omega)$ où p est le plus petit indice n tel que $X_n(\omega) > m$ si $\omega \notin A$ et $Z(\omega) = m$ si $\omega \in A$.
Montrer que Z est une variable aléatoire et que pour tout x réel, $\mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}_{(X > m)}(X \leq x)$.
 - c) Quel commentaire peut-on faire sur cette méthode de simulation lorsque m est très grand ?
- 3) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $]0, 1[$ de loi uniforme et $m \in \mathbb{R}$. On pose

$$V = F^{-1}(F(m) + (1 - F(m))U) \quad (1)$$

- a) Montrer que V est une variable aléatoire et que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(V \leq x) = \mathbb{P}_{(X > m)}(X \leq x)$.
- b) Comparer cette méthode à celle envisagée à la question précédente.
- c) Déterminer F et F^{-1} lorsque X a pour densité $f_X : x \mapsto \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Expliciter dans ce cas la variable V en fonction de U lorsque $m = 0$. Quelle est alors la loi de V ?
- d) Si a et b sont deux réels tels que $a < b$, proposer, par analogie avec la formule (1), une variable aléatoire W simulant la loi de X conditionnellement à $(a < X < b)$.

Sujet S 108 - Exercice sans préparation

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E pour lequel il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

- 1) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (on pourra penser au procédé d'orthonormalisation de Schmidt).
- 2) On suppose de plus que pour tout x de E , $\langle u(x), x \rangle = 0$.
Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = -\langle u(y), x \rangle$. Que peut-on dire de u ?

Sujet S 109 - Exercice

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1) Question de cours : Inégalité de Bienaymé-Tchébichev. Estimateur sans biais, convergent.

Pour un entier $n \geq 2$, on considère n variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n de loi uniforme sur $[0, A]$, où $A \in \mathbb{R}_+^*$ est inconnu. On pose $S_n = \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)$ et $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

2) Calculer l'espérance et la variance de S_n en fonction de A et n .

3) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n - A| > \varepsilon) = 0$.

4) Calculer la fonction de répartition F_n de M_n . La variable aléatoire M_n admet-elle une densité (si oui, la donner) ?

5) Soit $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$; on pose $\widetilde{M}_n = \alpha_n M_n$. Calculer les espérances $\mathbb{E}(\widetilde{M}_n)$ et $\mathbb{E}(\widetilde{M}_n^2)$.

6) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour que \widetilde{M}_n soit un estimateur asymptotiquement sans biais de A .

7) On suppose la condition de la question précédente réalisée. Montrer que :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\widetilde{M}_n - A| > \varepsilon) = 0$.

8) Quel est le risque quadratique de \widetilde{M}_n ? À quelle condition sur $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ s'agit-il d'un meilleur estimateur de A que S_n ?
En particulier, si on choisit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de façon à obtenir un estimateur sans biais de A , obtient-on un meilleur estimateur que S_n ?

Sujet S 109 - Exercice sans préparation

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont des valeurs propres. Démontrer que f est diagonalisable.

Sujet S 112 - Exercice

Dans cet exercice toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- 1) Question de cours : Rappeler la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.
- 2) Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On considère deux suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires convergeant en probabilité, la première vers u , la seconde vers v .

Démontrer que la suite de variables aléatoires $(U_n + V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $u + v$.

- 3) Dans cette question, on suppose les réels u et v supérieurs ou égaux à 1.
 - a) Établir l'inégalité : $|\ln(u) - \ln(v)| \leq |u - v|$.
 - b) En déduire que si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires ne prenant que des valeurs supérieures ou égales à 1, convergeant en probabilité vers u , la suite de variables aléatoires $(\ln(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\ln(u)$.

- 4) Dans cette question, x désigne un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

- a) Établir, pour tout $t \in [0, x]$, l'inégalité : $\frac{x-t}{1-t} \leq x$.

- b) En déduire la limite de l'intégrale $\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt$ quand l'entier n tend vers l'infini.

- c) Démontrer l'égalité : $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

- 5) Dans cette question, p désigne un paramètre strictement compris entre 0 et 1.

Soit X une variable aléatoire discrète telle que, pour tout entier k strictement positif, la probabilité que la variable X prenne la valeur k soit donnée par : $\mathbb{P}[X = k] = \frac{(1-p)^k}{k \ln(\frac{1}{p})}$

Le résultat de la question précédente, appliqué à $x = 1 - p$, prouve que X ne peut pas prendre d'autres valeurs.

- a) Établir l'égalité : $\frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X^2]} = p$, où \mathbb{E} désigne l'espérance.

- b) Démontrer que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X , alors

$$\widehat{p}_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sum_{k=1}^n (X_k)^2} \text{ est un estimateur convergent du paramètre } p.$$

Sujet S 112 - Exercice sans préparation

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

On admet que $A^2 + I_3 = 2A$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

- 1) Montrer que A admet une seule valeur propre λ . A est-elle diagonalisable ?
- 2) Déterminer le sous-espace associé à λ .
- 3) Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sujet S 113 - Exercice

- 1) Question de cours : Rappeler la définition du rang d'une matrice.
Une matrice carrée et sa transposée ont-elles nécessairement le même rang ?
- 2) Dans cette question, A et B sont deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$) qui ont au moins une valeur propre commune.
 - a) Démontrer qu'il existe un nombre réel α et deux matrices-colonnes X, Y non nulles telles que ${}^tAX = \alpha X$ et $BY = \alpha Y$.
 - b) En déduire qu'il existe une matrice carrée non nulle M telle que : $MA = BM$.
 - c) Montrer que les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont une valeur propre commune
et trouver une matrice non nulle M telle que : $MA = BM$.
- 3) Dans cette question, a est un endomorphisme de \mathbb{C}^n .
 - a) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que, si z est un nombre complexe qui n'est pas une valeur propre de a et si le polynôme $P = (X - z)Q$ est un polynôme annulateur de a , Q est alors aussi un polynôme annulateur de a .
 - b) Démontrer qu'il existe un polynôme annulateur de a dont les seules racines sont les valeurs propres de a .
- 4) Dans cette question, on examine la réciproque de la propriété prouvée en 2° et on considère donc deux matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une matrice non nulle M telle que : $MA = BM$.
 - a) Que peut-on dire des valeurs propres de A et de B lorsque M est inversible ?
 - b) Démontrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on a : $MP(A) = P(B)M$.
 - c) Démontrer, à l'aide de 3°, que A et B ont nécessairement une valeur propre commune.

Sujet S 113 - Exercice sans préparation

On considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

a) Quelle est la loi de S_n ?

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $\mathbb{P}[S_n \geq n + \sqrt{n}]$?

2) On considère une variable aléatoire N_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendante des X_k et dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}[N_n = n] = \mathbb{P}[N_n = n + 1] = \frac{1}{2} .$$

a) Trouver l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T_n(\omega) = S_{N_n(\omega)} .$$

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $\mathbb{P}[T_n \geq n + \sqrt{n}]$?

2 Sujets donnés en option économique

Sujet E 2203 - Exercice

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2} .$$

1) Question de cours : Rappeler la définition d'une densité de probabilité.

2) Vérifier que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dont f est une densité de probabilité.

3) a) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de X .

b) A-t-on, pour tout réel s , pour tout réel t tels que $t \geq s$,

$$\mathbb{P}_{[X > s]}([X > t]) = \mathbb{P}([X > t - s])?$$

4) Pour tout entier $n \geq 1$ et tout x réel, on pose :

$$H_n(x) = \int_{-\infty}^x f(t)(1 + t.e^{-n|t|}) dt .$$

Montrer que H_n est une fonction de répartition.

5) Soit X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de fonction de répartition H_n . Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X .

Sujet E 2203 - Exercice sans préparation

Soit n un entier ≥ 2 et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0, \dots, 0)\}$.

On considère la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pose $B = X^t X$ et $A = {}^t X X$.

On désigne par u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à B .

- 1) Expliciter la matrice B et la matrice A .
- 2) Quel est le rang de u ? Déterminer son noyau.
- 3) B est-elle diagonalisable?
- 4) Calculer B^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Sujet E 2214 - Exercice

On admet la propriété suivante (\mathcal{P}) :

Si la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le nombre réel L , alors la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n = \frac{1}{n}(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1})$ converge aussi vers L .

On se donne deux nombres réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \frac{1 + \alpha \cdot u_n}{1 + \beta \cdot u_n}.$$

- 1) Question de cours : Convergence et divergence des suites réelles monotones.
- 2) Dans cette question seulement, on suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.
 - a) Étudier les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par :
$$f(x) = x \frac{1+x}{1+2x}.$$
 - b) Étudier la convergence de la suite (u_n) .
 - c) Écrire un programme en Pascal permettant le calcul de u_{10} .
- 3) Dans le cas général, prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
- 4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1/u_n$. Prouver que la suite $(v_{n+1} - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\beta - \alpha$.
- 5) En utilisant la propriété (\mathcal{P}), déduire du résultat précédent un équivalent de u_n de la forme $\frac{1}{q \cdot n}$ lorsque n tend vers $+\infty$, où q est un réel strictement positif.

Sujet E 2214 - Exercice sans préparation

n souris (minimum 3) sont lâchées en direction de 3 cages, chaque cage pouvant contenir les n souris et chaque souris allant dans une cage au hasard.

- 1) Calculer la probabilité pour qu'une cage au moins reste vide.
- 2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cages restées vides. Calculer l'espérance de X .

Sujet E 202 - Exercice

- 1) Question de cours : Variable aléatoire à densité. Propriétés de sa fonction de répartition.

On considère une densité de probabilité f , nulle sur \mathbb{R}_- , continue sur \mathbb{R}_+ , associée à une variable aléatoire X . On suppose que X est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on note F la fonction de répartition de X .

- 2) Montrer que F possède une unique primitive s'annulant en 0. On note H_f cette fonction. Montrer que H_f est de classe C^1 .
- 3) Donner H_f dans les cas suivants :

a) $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$.

b) $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ si $x > 0$.

c) $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \frac{1}{2(1+x)^{3/2}}$ si $x > 0$.

Dans chacun des cas, étudier l'existence d'une direction asymptotique et d'une asymptote oblique pour la courbe représentative de H_f lorsque x tend vers $+\infty$.

- 4) On suppose que X admet une espérance ℓ .
- a) En intégrant par parties $\int_0^x t f(t) dt$, montrer que $H_f(x) \sim x$ au voisinage de $+\infty$.

En déduire que la courbe représentative de H_f admet une direction asymptotique en $+\infty$.

- b) A-t-on toujours une asymptote ?

Sujet E 202 - Exercice sans préparation

Soit E l'ensemble des matrices $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où (a, b) prend toute valeur de \mathbb{R}^2 .

- 1) Montrer que E est un espace vectoriel réel de dimension 2.
Calculer le produit $M_{a,b} \cdot M_{a',b'}$ pour $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$.
Vérifier que ce produit appartient à E .
- 2) Calculer $M_{a,b}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Sujet E 205 - Exercice

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

- 1) Question de cours : Indépendance de n variables aléatoires discrètes ($n \in \mathbb{N}^*$).

- 2) a) On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie. On suppose qu'à chaque lancer la probabilité d'obtenir « Pile » est égale à p . On notera « P » et « F » les événements (Obtenir « Pile »), respectivement (Obtenir « Face »).
On définit les variables aléatoires X_1 et X_2 de la façon suivante : X_1 vaut k si le premier « Pile » de rang impair s'obtient au rang $2k - 1$ (entier qui représente le k -ième nombre impair de \mathbb{N}^*) ;
 X_2 vaut k si le premier « Pile » de rang pair s'obtient au rang $2k$ (entier qui représente le k -ième nombre pair de \mathbb{N}^*).
Par exemple, si l'on obtient « (F, P, F, F, F, P, P, ...) », alors X_1 prend la valeur 4 et X_2 prend la valeur 1.
On posera $X_1 = 0$ (respectivement $X_2 = 0$) si « Pile » n'apparaît à aucun rang impair (respectivement à aucun rang pair).
 - b) Prouver que $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 0) = 0$.
 - c) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_2 = 1)$. Déterminer les lois de X_1 et de X_2 . Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
 - d) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au minimum de X_1 et de X_2 .
- 3) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p .
 - a) Montrer que la variable aléatoire $Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$ suit une loi géométrique ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel x).
 - b) Montrer que les variables aléatoires Y et $2Y - X$ sont indépendantes.

Sujet E 205 - Exercice sans préparation

On note E_4 l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 4 et on considère l'application Δ qui, à un polynôme P de E_4 associe le polynôme $Q = \Delta(P)$ défini par : $Q(x) = P(x+2) - P(x)$.

- 1) Vérifier que l'application Δ est un endomorphisme de E_4 .
Expliciter la matrice de Δ dans la base canonique de E_4 .
- 2) Déterminer le noyau de Δ . On pourra prouver que si $P \in \text{Ker } \Delta$, alors $P(x) - P(0)$ a une infinité de racines.
- 3) L'endomorphisme Δ est-il diagonalisable ?
- 4) Existe-t-il un polynôme Q appartenant à E_4 ayant un unique antécédent par Δ ?

Sujet E 209 - Exercice

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n . On note $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général

$$m_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } j = i + 1 \\ n + 1 - j & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ est égale à M .

- 1) Question de cours : Rappeler la définition d'un vecteur propre d'un endomorphisme. Énoncer la propriété relative à une famille de vecteurs propres d'un endomorphisme, associés à des valeurs propres distinctes.
- 2) a) Calculer $u(X^k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
b) En déduire l'expression de $u(P)$ pour $P \in E$ en fonction notamment de P et de P' .
- 3) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_k(X) = (X - 1)^k (X + 1)^{n-k}$.
a) Calculer $u(P_k)$.
b) En déduire que (P_0, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
c) L'endomorphisme u est-il diagonalisable? Préciser ses valeurs propres et les espaces propres associés.
- 4) Dans cette question, on suppose que $n = 3$.
a) Expliciter M et déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $P^{-1}MP = D$.
b) Déterminer les matrices commutant avec D .
c) Existe-t-il un endomorphisme v de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $v \circ v = u$?

Sujet E 209 - Exercice sans préparation

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{N}^* , indépendantes et telles que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{2^i}$$

- 1) Reconnaître la loi de X et Y .
- 2) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$ et la loi de X conditionnellement à $(X + Y = k)$, k étant un entier supérieur ou égal à 2 fixé.
- 3) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X > Y)$.
- 4) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 2Y)$ et $\mathbb{P}_{[X \geq Y]}(X \geq 2Y)$.

Sujet E 210 - Exercice

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{n}$ (d'espérance n).

Pour tout x réel on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soient :

$$Y_n = \lfloor X_n \rfloor \quad \text{et} \quad Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$$

- 1) Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
- 2) Déterminer la loi de Y_n et son espérance.
- 3) Déterminer $Z_n(\Omega)$ et montrer que,

$$\forall t \in [0, 1] : \quad \mathbb{P}(Z_n \leq t) = \frac{1 - e^{-\frac{t}{n}}}{1 - e^{-\frac{1}{n}}}.$$

- 4) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.
- 5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et N_n la variable aléatoire définie par :

$$N_n = \text{card} \left\{ k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{tel que} \quad X_k \leq \frac{k}{n} \right\}$$

où $\text{card}(A)$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble fini A .

a) Reconnaître la loi de N_n et donner son espérance et sa variance.

b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(N_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire N dont on précisera la loi.

Sujet E 210 - Exercice sans préparation

Soit E l'ensemble des matrices $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où (a, b) prend toute valeur de \mathbb{R}^2 .

- 1) Montrer que E est un espace vectoriel réel de dimension 2.
- 2) Dans le cas où soit $a = b$, soit $a = -2b$, prouver que $M_{a,b}$ n'est pas inversible. Dans le cas contraire, calculer son inverse et montrer qu'il appartient à E .
- 3) Calculer $M_{a,b}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Sujet E 222 - Exercice

- 1) Question de cours : Estimateur, biais, risque quadratique.

Soit a, b et c trois réels strictement positifs et soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad f(x) = c \text{ si } x \in [0, a[\quad f(x) = \frac{b}{x^4} \text{ si } x \in [a, +\infty[.$$

- 2) Déterminer b et c en fonction de a pour que f soit une densité de probabilité continue sur \mathbb{R}_+ .

On suppose b et c ainsi définis dans la suite de l'exercice et X est une variable aléatoire définie sur un espace probablisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de densité f .
Donner une allure de la représentation graphique de f .

- 3) Pour quelles valeurs $k \in \mathbb{N}^*$, X admet-elle un moment d'ordre k ?
- 4) Déterminer l'espérance et la variance de X si elles existent.
- 5) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X .
On pose

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- a) Montrer que (T_n) est un estimateur de a .
- b) Construire à partir de (T_n) un estimateur (S_n) sans biais de a .
- c) Quel est le risque quadratique de (S_n) ?

Sujet E 222 - Exercice sans préparation

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer $A^2 - I$.
- 2) A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

3 Sujets donnés en option littéraire BL

Sujet BL 304 - Exercice

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 \neq 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1}.$$

- 1) Question de cours : Énoncer le principe du raisonnement par récurrence.
- 2) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ et le signe de $f(x) - x$. Donner l'allure de la courbe représentative de f .
Justifier que la suite (u_n) est bien définie.
- 3) On suppose dans cette question que $u_0 > 1$.
Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 2(1 + \sqrt{2})$.
Montrer que la suite (u_n) est croissante et déterminer sa limite.
- 4) Étudier de même le cas où $u_0 < 1$.
Montrer que la suite (u_n) est monotone. Étudier la nature de cette suite.

Sujet BL 304 - Exercice sans préparation

Soit n un entier ≥ 2 et k un entier de $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

Une urne contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On les tire toutes une à une sans remise.

Soit X la variable aléatoire égale au rang de la dernière boule blanche tirée.

Déterminer la loi de X .

Calculer son espérance et sa variance.

On rappelle la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Sujet BL 305 - Exercice

1) Question de cours : Critères de convergence d'une série à termes positifs.

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction f_n définie sur $[0, 1]$, à valeurs réelles, par :
 $f_n(x) = (1 - x^n)^{1/n}$.

On pose, pour $n \geq 2$: $u_n = 1 - \int_0^1 f_n(x) dx$.

2) a) Etudier les variations de la fonction f_n sur $[0, 1]$.

Calculer la dérivée seconde de f_n et en déduire que f_n est une fonction concave.

b) Montrer que la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère ortho-normé, est symétrique par rapport à la première bissectrice.

c) Montrer que l'unique point fixe de f_n sur $[0, 1]$ a pour abscisse $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$.

3) On pose, pour tout $n \geq 2$: $v_n = (1 - x_n)^2$ et $w_n = \int_0^{x_n} (1 - f_n(x)) dx$.

À l'aide de la représentation graphique de f_n , montrer que : $u_n = v_n + 2w_n$.

4) a) Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

b) Etablir, pour tout réel y positif, la relation :

$$1 - y^{1/n} = \frac{1 - y}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} y^{k/n}}.$$

c) En déduire que l'on a : $0 \leq w_n \leq \frac{2}{(n+1)^2}$.

d) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Sujet BL 305 - Exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$. On lance n pièces de monnaie équilibrées. On définit les événements :

A : « On obtient Face au plus une fois »,

B : « On obtient Face au moins une fois et Pile au moins une fois ».

Montrer qu'il existe une valeur de n pour laquelle A et B sont indépendants.

4 Sujets donnés en option technologique

Sujet T 417 - Exercice

- 1) Question de cours : Principes du raisonnement par récurrence.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x^2 + x) e^x$, où e désigne la base du logarithme népérien.

- 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- 3) a) Résoudre l'équation : $x^2 + 3x + 1 = 0$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f ; étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
- 5) Étudier graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \lambda$, où λ est un réel donné quelconque.
- 6) Pour tout x réel et pour tout entier naturel n , trouver l'expression de $f^{(n)}(x)$, où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n -ème de la fonction f avec la convention $f^{(0)} = f$.

Sujet T 417 - Exercice sans préparation

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et N boules bleues.

On effectue dans cette urne un tirage simultané de 2 boules et on suppose que tous les tirages possibles sont équiprobables.

- 1) Exprimer en fonction de N , la probabilité p d'obtenir un tirage unicolore.
- 2) Trouver la valeur de N pour laquelle la probabilité d'obtenir 2 boules bleues est égale à $\frac{1}{6}$. Quelle est dans ce cas la valeur de p ?

Sujet T 418 - Exercice

- 1) Question de cours : Limite d'une fonction composée.

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} - \{-3/2, -1/2\}$ par : $f(x) = \frac{2}{(2x+1)(2x+3)}$.

- 2) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 3) Tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
- 4) a) Déterminer la valeur des deux constantes réelles a et b telles que pour tout x de D , on ait :

$$f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{2x+3}$$

- b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^t f(x) dx$, dans laquelle t désigne un nombre réel strictement positif.
- c) On pose pour tout réel t strictement positif : $F(t) = \int_0^t f(x) dx$. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$.

Sujet T 418 - Exercice sans préparation

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et 4 boules bleues. On effectue 5 tirages successifs de 2 boules prises simultanément dans l'urne, avec remise (après chaque tirage de 2 boules, on replace les boules obtenues dans l'urne).

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages unicolores obtenus à l'issue de cette suite de 5 tirages.

- 1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
- 2) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .