Chapitre 10

Continuité des fonctions numériques

Sommaire

1 Continuité en un point

f est une fonction définie sur un intervalle I ; cet intervalle est supposé non vide et non réduit à un point.

1.1 Définition et premières propriétés

Soit a un point de I.

Définition 1 – Continuité en un point a

On dit que f est continue en a lorsque $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$, ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0;\ \forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I, \left|f(x) - f(a)\right| \leq \varepsilon$$

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a.

Le changement de variable $x = a + h$ permet de remplacer la condition $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$, par $f(a+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(a)$.

En fait si la fonction f est définie en a et a une limite finie en a, celle-ci ne peut être que $f(a)$.

Proposition 2 – Continuité en a et limite en a

On a équivalence de :

(i) f est continue en a ;

(ii) f a une limite finie en a.

1.2 Continuité à droite ou à gauche en un point

Soit a un point de I.

Définition 3 – Continuité à droite un point

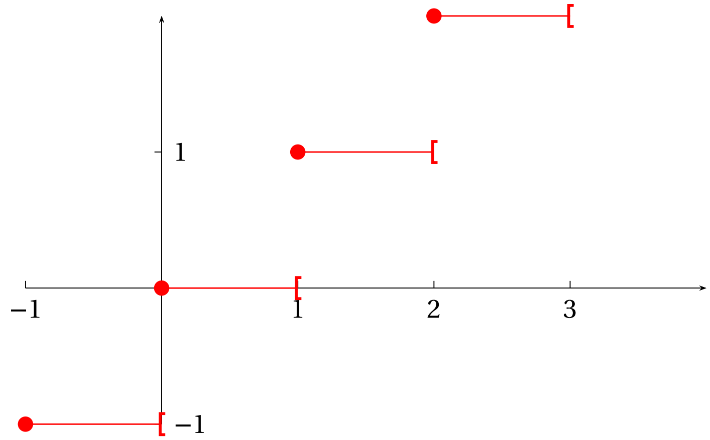
On dit que f est continue à droite en a lorsque $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} f(a)$, ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0;\ \forall x \in]a, a+\delta] \cap I, \left|f(x) - f(a)\right| \leq \varepsilon$$

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue à droite en a.

La condition se note aussi : $f(a^+) = f(a)$.

✎ ***Exemple.*** $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en 2.



On définit de même la continuité à gauche en a : $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} f(a)$ ou encore $f(a^-) = f(a)$.

✎ ***Exemple.*** $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est discontinue à gauche en 2.

Théorème 4 – Lien entre continuité en a et continuité à gauche et à droite en a

On suppose que a n'est pas une extrémité de I. Alors on a équivalence de :

(i) f est continue en a

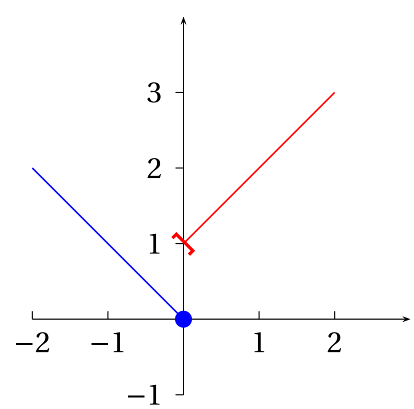
(ii) $f(a^-) = f(a^+) = f(a)$

(iii) $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} f(a)$

(iv) f est continue à gauche et à droite en a

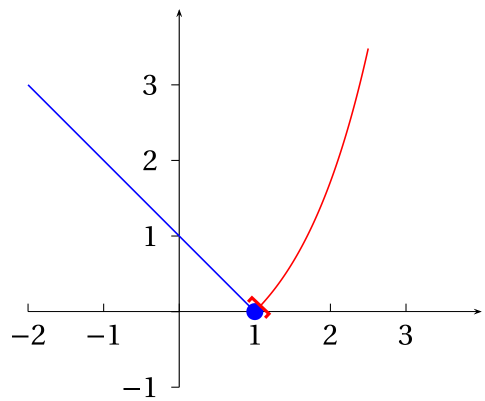
Supposer que a n'est pas une extrémité de I assure que f est définie à droite et à gauche de a.

✎ ***Exemple.*** $f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x \leq 0 \\ x + 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



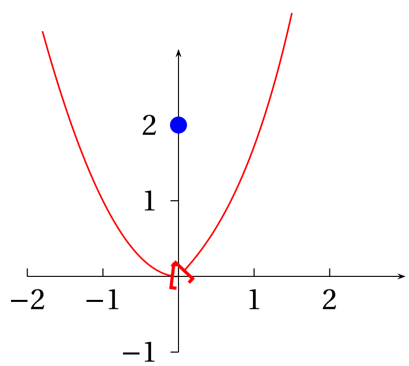
Sur cette exemple : $f(0^-) = 0$, $f(0^+) = 1$ et $f(0) = 0$. Donc f est continue à gauche en 0, mais discontinue à droite en 0. À fortiori, elle n'est pas continue en 0.

✎ ***Exemple.*** $f(x) = \begin{cases} 1-x \text{ si } x \leq 1 \\ e^{x-1}-1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



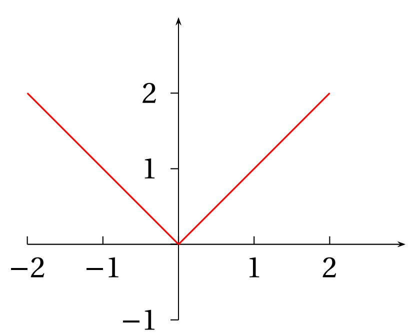
Sur cette exemple : $f(1^-) = f(1^+) = f(1) = 0$. f est donc continue en 1, puisqu'elle est continue à gauche $\boxed{\text{et}}$ à droite en ce point.

✎ ***Exemple.*** $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \\ e^x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

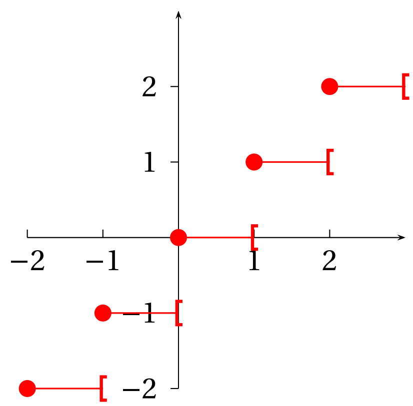


Sur cette exemple : $f(0^-) = f(0^+) = 0$ et $f(0) = 2$. Donc f n'est ni continue à gauche, ni continue à droite en 0. À fortiori, elle n'est pas continue en 0.

✎ ***Exemple.*** $x \longmapsto |x|$ est continue en 0.



✎ ***Exemple.*** Si $a \notin \mathbb{Z}$, $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en a.
Si $a \in \mathbb{Z}$, $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en a mais est discontinue à gauche en a.



1.3 Prolongement par continuité

Dans ce paragraphe, a est une extrémité de I n'appartenant pas à I. La fonction f n'est donc pas définie en a.

Définition 5 – Prolongement continu

Si g est une fonction définie sur l'intervalle $I \cup \{a\}$ on dit qu'elle est un *prolongement de f continu en a* lorsque :

1. g est continue en a ;
2. $g_{|I} = f$

On dit alors que f est *prolongeable par continuité en a* lorsqu'il existe une fonction g qui est un prolongement de f continue en a.

Théorème 6 – Prolongement par continuité

On a équivalence de :

1. f est prolongeable par continuité en a ;
2. f admet une limite finie en a ;
3. f admet un DL d'ordre 0 en a.

Dans ce cas le prolongement est unique et c'est la fonction $g : I \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases}$$

En pratique le prolongement g est encore noté f, pour simplifier les notations.

✎ ***Exemple.*** Peut-on prolonger par continuité en 0 la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$?

1.4 Propriétés des fonctions continues un point

Dans ce paragraphe a est un point de I.

Théorème 7 – Image d'une suite de limite a par une fonction continue en a

On suppose que f est continue en a. Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang; de plus, elle converge vers a :

$$\left(u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \quad \text{et} \quad f \text{ continue en } a \right) \implies f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$$

Application classique.
Si I est un intervalle stable par f on peut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, si $a \in I$ et si f est continue en a alors $f(a) = a$: on dit que a est un *point fixe* de f.

En plus de la fonction f, on se donne pour le théorème suivant une fonction g définie sur le même intervalle I.

Théorème 8 – Opérations sur les fonctions continues en a

On suppose que f et g sont continues en a. Dans ce cas :

1. pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est continue en a;
2. la fonction $f \times g$ est continue en a;
3. si g ne s'annule pas, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Dans le théorème suivant on suppose que f est à valeurs dans un intervalle J, et que g est une fonction définie sur cet intervalle J. La fonction $g \circ f$ est donc définie sur l'intervale I.

Théorème 9 – Composition de fonctions continues

On suppose que f est continue en a, et que g est continue en $b = f(a)$. Dans ce cas, la fonction $g \circ f$ est continue en a.

⚠ Ne pas dire que f et g sont toutes les deux continues en a; à priori g n'est pas même pas définie au point a. g doit être continue en $b = f(a)$.

En pratique, on fera appel aux deux théorèmes précédents sous le nom de *théorèmes généraux*.

2 Continuité sur un intervalle

f est une fonction définie sur un intervalle I ; cet intervalle est supposé non vide et non réduit à un point.

2.1 Définition et théorèmes généraux

Définition 10 – Continuité sur un intervalle

On dit que f est continue sur l'intervalle I lorsque f est continue en tout point $a \in I$.

✎ ***Exemple.*** f continue sur $[0,+\infty[$ signifie que f est continue en tout $a > 0$, et que f est continue à droite en 0.

✎ ***Exemple.*** f continue sur $]0,+\infty[$ signifie que f est continue en tout $a > 0$.

✎ ***Exemple.*** f continue sur $]1,2]$ signifie que f est continue en tout $a \in]1,2[$, et que f est continue à gauche en 2.

Définition 11 – Continuité sur une union d'intervalles

On se donne une famille d'intervalles $(I_j)_{j\in J}$ deux à deux disjoints, et tels que l'union de deux d'entre eux ne donne pas un intervalle.
On dit que f est continue sur $A = \bigcup_{j\in J} I_j$ lorsque, pour tout $j \in J$, f est continue sur I_j.

✎ ***Exemple.*** f continue sur $\mathbb{R}^*$ signifie que f est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, donc que f est continue en tout $a < 0$ et en tout $a > 0$.

⚠ Si f est continue sur deux intervalles I et J alors elle peut ne pas être continue sur leur union $I \cup J$ (si $I \cup J$ est encore un intervalle).
Par exemple si f continue sur $]-\infty,0[$ et $[0,+\infty[$ alors $]-\infty,0[\cup[0,+\infty[= \mathbb{R}$, mais f peut ne pas être continue sur $\mathbb{R}$ car on ne sait pas si elle est continue à gauche en 0.

2.2 Continuité des fonctions usuelles

• La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Aux points de $\mathbb{Z}$, elle est seulement continue à droite.

• Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** La fonction $x \longmapsto x^3 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• Les fractions rationnelles (= quotient de polynômes) sont continues sur leur ensemble de définition.

✎ ***Exemple.*** La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^5+3x^2+2x-1}{(x-1)^3x}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$ et la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• Les fonctions cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$.

• Les fonctions arccos et arcsin sont continues sur $[-1,1]$.

• La fonction tan est continue sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

• La fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$.

• La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.

• Les fonctions ch et sh sont continues sur $\mathbb{R}$.

• La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• Les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, sont continues au moins sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0, on a le résultat suivant.

Théorème 12 – Prolongement de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0

1. Pour $\alpha \geq 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est prolongeable en 0 en une fonction continue, en posant $0^\alpha = 0$ si $\alpha > 0$ et $0^0 = 1$.
2. Pour $\alpha < 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ n'est prolongeable par continuité en 0 puisque sa limite est $+\infty$.

✎ ***Exemple.*** $x \longmapsto \sqrt{x}$ continue sur $\mathbb{R}^+$, et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

⚠ Pour des puissances entières, l'ensemble de continuité peut être beaucoup plus grand que $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}_+^*$.
Par exemple $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme), et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (fraction rationnelle).

2.3 Opérations arithmétiques sur les fonctions continues

En plus de la fonction f, on se donne pour le théorème suivant une fonction g définie sur le même intervalle I.

Théorème 13 – Opérations sur les fonctions continues

On suppose que f et g sont continues sur I. Dans ce cas :

1. pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est continue sur I ;
2. la fonction $f \times g$ est continue sur I ;
3. si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Dans le théorème suivant on suppose que f est à valeurs dans un intervalle J, et que g est une fonction définie sur cet intervalle J. La fonction $g \circ f$ est donc définie sur l'intervale I.

Théorème 14 – Composition de fonctions continues

On suppose que f est continue sur I, et que g est continue sur J. Dans ce cas, la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

⚠ Ne pas dire que f et g sont toutes continues sur I ; à priori g n'est pas même pas définie sur I. g doit être continue sur J tel que $f(I) \subseteq J$.

En pratique, on fera appel aux deux théorèmes précédents sous le nom de *théorèmes généraux*.

Pour démontrer simplement qu'une fonction est continue, on utilise la continuité des fonctions usuelles et le théorème précédent.

✎ ***Exemple.*** La fonction $\varphi : x \longmapsto \sqrt{\ln(1+x^2)} + \arccos(x)$ est définie et continue sur $[-1, 1]$.

✎ ***Exemple.*** La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 15 – Théorème des valeurs intermédiaires

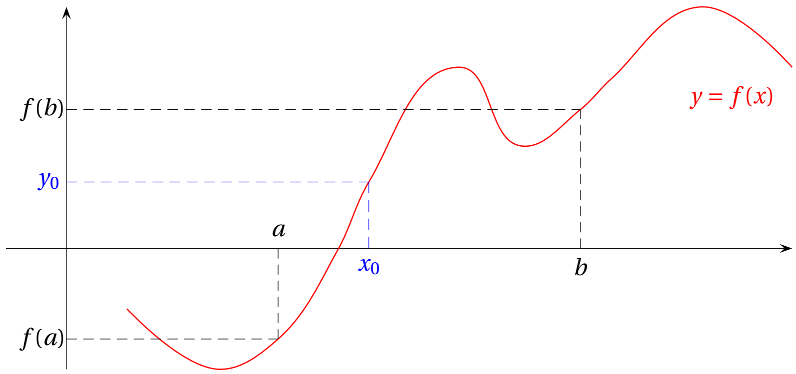
Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors f prend toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$:

$$\forall y_0 \in [f(a), f(b)], \quad \exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) = y_0$$

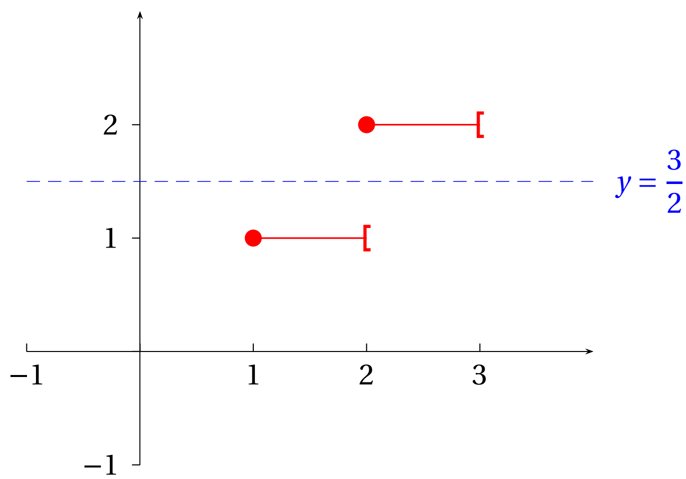
Ceci peut s'écrire plus succintement :

$$[f(a), f(b)] \subseteq f\big([a, b]\big)$$

⚠ Dans la notation $[f(a), f(b)]$, on ne sous-entend pas que $f(a) \leq f(b)$, on peut très bien avoir $f(a) > f(b)$.



⚠ Ce résultat est faux si f n'est pas continue.
Par exemple pour $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$, on a $\frac{3}{2} \in \big[f(1), f(2)\big] = [1,2]$, mais $\forall x \in [1,2]$, $f(x) \neq \frac{3}{2}$.



Pour la preuve, on fixe $y_0 \in [f(a), f(b)]$. On cherche $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

• **Simplification du problème.** En posant $g(x) = f(x) - y_0$, on est ramené à chercher $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x_0) = 0$.

On a $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ ou $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$, donc $g(a) \leq 0 \leq g(b)$ ou $g(b) \leq 0 \leq g(a)$.

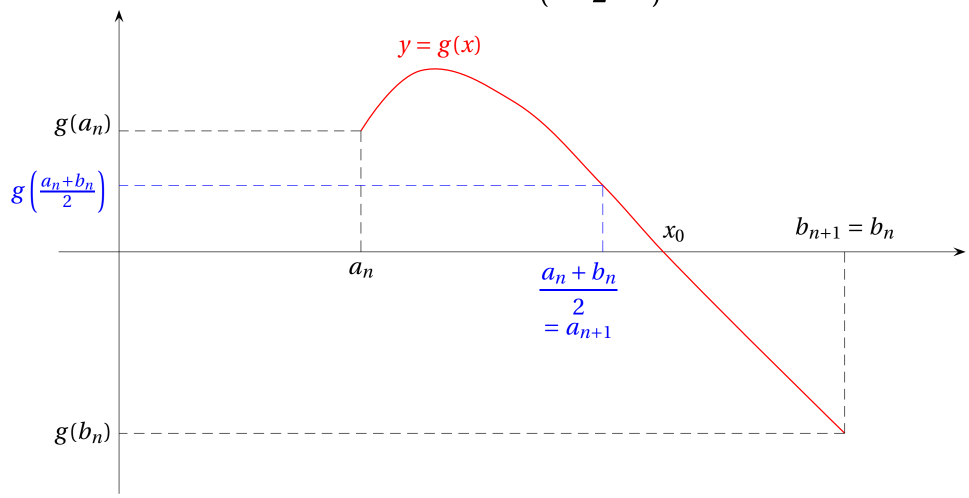
Quitte à remplacer g par $-g$ on peut supposer que $g(b) \leq 0 \leq g(a)$, et le problème est toujours de trouver $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x_0) = 0$.

• **Définition de deux suites adjacentes par dichotomie.** On définit deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et :

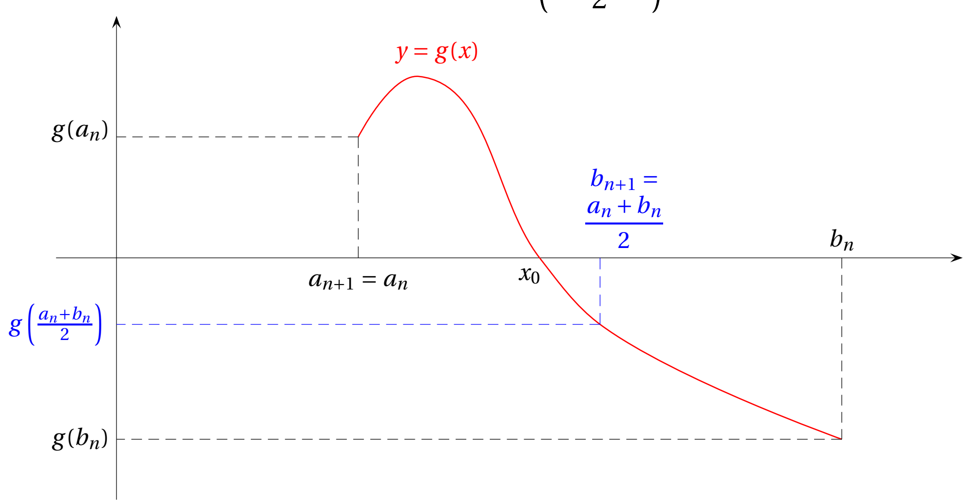
$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{si } g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0 \\ a_n & \text{si } g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si } g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0 \\ \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{si } g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

On peut visualiser cette construction.

1. dans le cas où $g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0$:



2. dans le cas où $g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$:



On vérifie alors par récurrence qu'elles ont les propriétés suivantes :

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ et $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$;

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(b_n) \leq 0 \leq g(a_n)$.

Ceci montre en particulier que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Notons x_0 leur limite commune.

• **Conclusion.** Il reste à vérifier que $x_0 \in [a, b]$ et que $g(x_0) = 0$.

Corollaire 16 – Image d'un intervalle par une fonction continue

Si I est un intervalle et si f est continue sur I alors $J = f(I)$ est aussi un intervalle.

⚠ Ceci est faux si f n'est pas continue. Par exemple si $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$, alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle.

⚠ La **nature** de l'intervalle (ie le caractère ouvert/fermé/borné...) n'est pas conservée. Par exemple cos est continue sur $\mathbb{R}$ (intervalle ouvert non borné) et $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$ (intervalle fermé borné).

Corollaire 17 – Signe d'une fonction continue sur un intervalle

Soit f continue sur un intervalle I.

1. Si f ne s'annule pas sur I, alors f est de signe constant au sens strict sur I.
2. Par contraposée si la fonction change de signe sur I, alors elle s'annule sur I.

⚠ Si la fonction s'annule sur I, elle peut ne pas changer de signe.
Prendre par exemple $x \longmapsto x^2$ sur $[-1,1]$.

⚠ Ceci est faux si la fonction est discontinue en un point : la fonction peut changer de signe sans s'annuler, comme le montre la fonction $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{-x-1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

2.5 Théorème de continuité sur un segment

On rappelle qu'on appelle *segment* tout intervalle $[a,b]$ *fermé et borné*.

Théorème 18 – Théorème de continuité sur un segment

Soit f continue sur un segment $[a,b]$. Alors $f\big([a,b]\big)$ est aussi un segment.

Cela signifie que $f\big([a,b]\big) = [m,M]$ où :

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

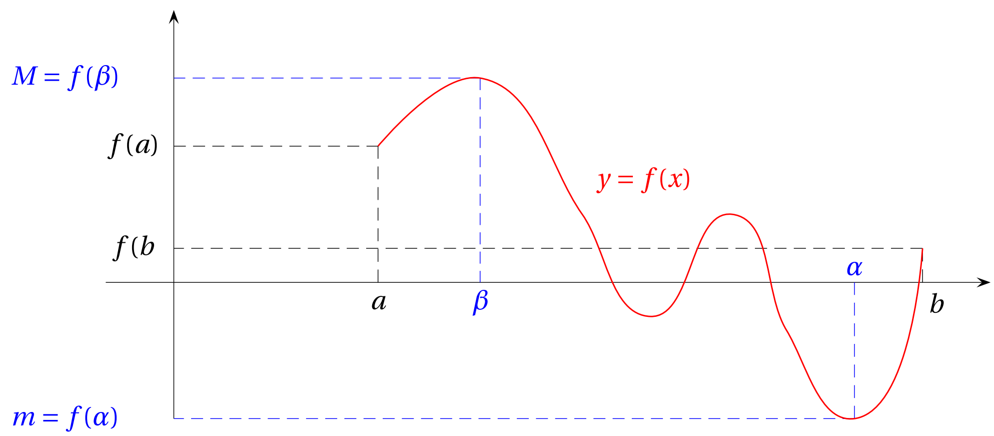
Rappelons que, par définition d'un minimum et d'un maximum, ces bornes sont atteintes, donc :

$$\exists \alpha \in [a,b] \,/\, m = f(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \exists \beta \in [a,b] \,/\, M = f(\beta)$$

et ainsi :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$$

Autrement dit : f **est bornée et atteint ses bornes**.



⚠ Ceci est faux si on ne prend pas un segment.
Par exemple $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$ mais n'est pas majorée puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

⚠ Le résultat est faux si la fonction n'est pas continue.
Par exemple la fonction $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie sur $[0,1]$ mais n'est pas majorée puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

3 Fonctions continues et bijectives

3.1 Propriétés des fonctions numériques bijectives

I et J sont deux intervalles.

On rappelle que si $f : I \longrightarrow J$ est bijective alors elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$, définie par :

$$\forall x \in I, \forall y \in J, \quad y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

et caractérisée par les relations :

$$\forall x \in I,\ f^{-1}\big(f(x)\big) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in J,\ f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

Dans les énoncés de ce paragraphe, f est une bijection de I vers J.

Proposition 19 – Parité de l'application réciproque

Si f est impaire sur I, alors f^{-1} est impaire sur J.

⚠ Si f est paire, on ne peut pas dire que f^{-1} est paire. La raison est très simple : si f est paire, elle ne peut pas être injective, et donc f^{-1} n'existe pas.

Proposition 20 – Monotonie de l'application réciproque

Si f est strictement monotone sur I, alors f^{-1} est strictement monotone sur J. Plus précisément :

- si f est strictement croissante sur I, alors f^{-1} est strictement croissante sur J ;
- si f est strictement décroissante sur I, alors f^{-1} est strictement décroissante sur J.

Dasn l'énoncé suivant a est un point de I ou une borne de I ; b est un point de J ou une borne de J.

Proposition 21 – Limites de l'application réciproque

Si f est strictement croissante sur I alors :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b^+ \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^+} f^{-1}(y) = a^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = b^- \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^-} f^{-1}(y) = a^-$$

De même, si f est strictement décroissante sur I alors pour tout $a \in I$:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b^- \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^-} f^{-1}(y) = a^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = b^+ \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^+} f^{-1}(y) = a^-$$

Proposition 22 – Représentation graphique de l'application réciproque

$\mathscr{C}_{f^{-1}}$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$

3.2 Théorème de la bijection monotone

Théorème 23 – Théorème de la bijection monotone

On suppose que :

(i) I est un intervalle de $\mathbb{R}$;

(ii) f est une fonction continue sur I ;

(iii) f est strictement monotone sur I.

Dans ce cas f est bijective de I vers l'intervalle image $J = f(I)$.
De plus l'application réciproque f^{-1} est continue sur J.

⚠ Il n'y pas de réciproque, une fonction bijective peut être ni continue, ni strictement monotone.

Proposition 24 – Calcul de l'intervalle image $J = f(I)$

On suppose f est strictement croissante et continue sur l'intervalle I. Alors pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$f\big([a,b]\big) = \big[f(a), f(b)\big] \qquad f\big([a,b[\big) = \big[f(a), f(b^-)\big[$$

$$f\big(]a,b]\big) = \big]f(a^+), f(b)\big] \qquad f\big(]a,b[\big) = \big]f(a^+), f(b^-)\big[$$

Si f est strictement décroissante et continue sur l'intervalle I, alors pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$f\big([a,b]\big) = \big[f(b), f(a)\big] \qquad f\big([a,b[\big) = \big]f(b^-), f(a)\big]$$

$$f\big(]a,b]\big) = \big[f(b), f(a^+)\big[\qquad f\big(]a,b[\big) = \big]f(b^-), f(a^+)\big[$$

✎ ***Exemple.*** La fonction exp est continue et strictement croissante de l'intervalle $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Sa bijection réciproque est la fonction $\ln :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. On retrouve donc que ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante et :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

✎ ***Exemple.*** Si $\alpha \neq 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Sa bijection réciproque est la fonction $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.

✎ ***Exemple.*** La restriction de la fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Sa bijection réciproque arctan est donc continue sur $\mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** La restriction de la fonction sin est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Sa bijection réciproque arcsin est donc continue sur $[-1,1]$.

✎ ***Exemple.*** La restriction de la fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Sa bijection réciproque arccos est donc continue sur $[-1,1]$.

3.3 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 25 – Continuité en un point a

On dit que f est continue en $a \in I$ lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

On peut définir de même les notions de continuité à droite ou à gauche.

Définition 26 – Continuité sur un intervalle

On dit que f est continue sur l'intervalle I lorsque f est continue en tout point $a \in I$.

Théorème 27 – Lien avec les parties réelles et imaginaires

On a équivalence de :

(i) f est continue sur I ;

(ii) $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues sur I.

✎ ***Exemple.*** Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dans le théorème suivant on se donne une autre fonction g définie sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Théorème 28 – Opérations sur les fonctions continues

Si f et g sont continues sur I alors les fonctions λf, $f+g$, $f \times g$, $\overline{f}$ et $|f|$ sont aussi continues sur I.
Si de plus g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Le théorème suivant se généralise pour les fonctions à valeurs complexes.

Théorème 29 – Théorème de continuité sur un segment

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue sur le segment $[a,b]$, alors la fonction f est bornée sur $[a,b]$.

⚠ Le théorème des valeurs intermédiaires n'a plus de sens : on ne peut pas parler des valeurs intermédiaires entre deux complexes.
Par exemple la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{it}$ prend la valeur -1 en π et la valeur 1 en 0, mais elle ne s'annule jamais.

⚠ De même dire qu'une fonction à valeurs complexes est monotone n'a pas de sens.

4 Compétences à acquérir sur ce chapitre

➥ Connaître la notion de continuité, en un point de l'ensemble de définition.

- ✪ L'utiliser pour calculer une limite.
- ✪ Vérifier que f est continue en a en comparant $f(a)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.
- ✪ Vérifier que f est continue en a en montrant qu'elle est continue à gauche ($f(a^-) = f(a)$) et à droite ($f(a^+) = f(a)$).

➥ Prolonger une fonction par continuité, en un point qui n'est pas dans l'ensemble de définition.

- ✪ Ne pas confondre avec la vérification de la continuité en un point (cas où le point est déjà dans l'ensemble de définition).

➥ Savoir montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle.

- ✪ Utiliser les théorèmes généraux sur les fonctions continues.
- ✪ Pour un quotient de fonctions continues ne pas oublier que le dénominateur de doit pas s'annuler.
- ✪ Pour une composée de fonctions continues ne pas oublier que les intervalles doivent bien « s'emboîter ».

➥ Connaître les trois théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues.

- ✪ Le théorème des valeurs intermédiaires qui permet de montrer qu'une fonction s'annule au moins une fois.
- ✪ Le théorème de continuité sur un segment qui permet de montrer qu'une fonction est bornée et que les bornes « sont atteintes ».
- ✪ Le théorème de la bijection monotone qui permet de définir une bijection réciproque, et qui permet aussi de montrer qu'une fonction s'annule une seule fois.

➥ Connaître l'algorithme de dichotomie pour approcher numériquement un zéro d'une fonction continue.

5 Exercices

Continuité d'une fonction numérique

EXERCICE 1. Étude de la continuité

Étudier la continuité (et les éventuels prolongements par continuité) des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{2x+|x|}$
3. $f(x) = x^x$
4. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ x^2 + x \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ \ln(x) + e^x \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$

EXERCICE 2. Exemples plus difficiles

1. Montrer que la fonction $f : x \longrightarrow \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ (on dit qu'elle est *totalement discontinue.*

EXERCICE 3. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier la continuité de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Peut–on prolonger f par continuité ?
4. Étudier la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

EXERCICE 4. Prolongement par continuité

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $x \in]0,1[$ on pose $f(x) = \dfrac{\left|\ln(x)\right|^{\beta}}{\left|1-x\right|^{\alpha}}$.

1. Montrer que f est continue sur $]0,1[$.
2. Pour quelles valeurs de (α, β), f se prolonge-t-elle en une fonction continue sur $[0,1]$.

EXERCICE 5. Équation fonctionnelle

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.

EXERCICE 6. Une condition suffisante de continuité

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la fonction $x \longrightarrow \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorèmes des valeurs intermédiaires et de continuité sur un segment

EXERCICE 7. Théorème des valeurs intermédiaires

1. Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(0) = -1$ et que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]0,+\infty[$.
2. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f a au moins un point fixe. Montrer que ce résultat reste vrai si on remplace l'hypothèse f continue par f croissante.
3. Montrer que l'équation $x^{17} = x^{12} + 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.
4. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ continues.
5. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = 1$.

EXERCICE 8. Théorème de continuité sur un segment

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
   On suppose que la limite de f en $+\infty$ existe et est finie. Montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$.
3. Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
   On suppose que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que f est minorée sur $[0,+\infty[$ et que sa borne inférieure est atteinte.
4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I,\ f(x) > 0$. A-t-on $\inf\limits_{x\in I} f(x) > 0$?
   Et si I est un segment ?
5. Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $I = [a,b]$, telles que :
   $$\forall x \in [a,b], \quad f(x) < g(x)$$
   Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que : $\forall x \in [a,b],\ \epsilon + f(x) \leqslant g(x)$.
   Ce résultat est-il encore valable si l'intervalle I n'est pas un segment ?

Théorème de la bijection monotone

EXERCICE 9. Calculs d'applications réciproques

1. Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$. Montrer que $f_{|[-\frac{1}{2},+\infty[}$ admet une application réciproque continue que l'on explicitera.
2. Montrer que $\cosh_{|\mathbb{R}^+}$ et sinh sont bijectives et déterminer leur application réciproque.

EXERCICE 10. Nombre de solutions d'une équation

Soit t un réel. Discuter le nombre de solutions de l'équation $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=t$ d'inconnue x en fonction des valeurs du réel t.

Compléments

EXERCICE 11. Fonctions k-lipschitziennes et leur point fixe

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On suppose qu'il existe $k>0$ telle que f soit k-lipschitzienne ie :

$$\forall x, y \in I,\ |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$$

1. Montrer que f est continue sur I.
2. On suppose que $0<k<1$, que $I=[a,b]$ est stable par f, et que f a un unique point fixe $\ell \in I$.
   On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1}=f(x_n)$.

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n-\ell| \leq k^n|x_0-\ell|$.

   (b) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

   (c) Déterminer une valeur de l'entier n (en fonction de a, b et k) pour laquelle x_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

EXERCICE 12. Réciproque du théorème de la bijection monotone

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une bijection continue de I vers $J=f(I)$ telle que f^{-1} est continue sur J.
Montrer que f est strictement monotone sur I.

EXERCICE 13. Une autre condition suffisante de continuité

Soit $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et surjective de $[a,b]$ vers $[f(a),f(b)]$.
Montrer que f est continue sur $[a,b]$.