

Chapitre 11

Polynômes

Sommaire

1	Généralités	298
1.1	Construction rapide de $\mathbb{K}[X]$	298
1.2	Opérations dans $\mathbb{K}[X]$	298
1.3	L'indéterminée X	299
1.4	Degré d'un polynôme	302
1.5	Parité d'un polynôme	304
1.6	Fonction polynomiales	304
2	Racines d'un polynôme	305
2.1	Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	305
2.2	Racines d'un polynôme	306
2.3	Ordre de multiplicité d'une racine	308
2.4	Décompositions en facteurs irréductibles	309
2.5	Somme et produit des racines d'un polynôme scindé	312
3	Dérivée d'un polynôme et applications	313
3.1	Dérivée d'un polynôme	313
3.2	Formule de Taylor	314
4	Expression par radicaux des racines des polynômes	316
4.1	Cas du degré 1 ou du degré 2	316
4.2	Cas du degré 3 : méthode de Cardan (hors-programme)	316
4.3	Cas du degré 4 : méthode de Ferrari (hors-programme)	317
4.4	Théorème d'Abel-Galois (hors-programme)	317
5	Compétences à acquérir sur ce chapitre	318
6	Exercices	319

Dans tout le chapitre \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Généralités

1.1 Construction rapide de $\mathbb{K}[X]$

Nous allons construire les polynômes indépendamment de la notion de fonction, comme la simple succession de ses coefficients. Les polynômes servent en effet à bien d'autres choses qu'à construire des fonctions.

On rappelle que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{K} : A est une application de \mathbb{N} vers \mathbb{K} .

La suite A sera aussi notée $A = (a_0, a_1, a_2, \dots)$.

Une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera dite à *support fini* si elle est nulle à partir d'un certain rang :

$$\exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, a_n = 0$$

On l'appellera *polynôme à coefficients dans \mathbb{K}* . Les termes de la suite sont appelés *coefficients du polynôme*.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathbb{K}[X]$. Donc $\mathbb{K}[X] \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Il est clair que $\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$.

Le *polynôme nul* est :

$$0_{\mathbb{K}[X]} = (0, 0, 0, \dots)$$

Si P est un polynôme, il existe donc un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$P = (a_0, a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots)$$

Par définition deux polynômes $P = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ et $Q = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ sont égaux si, et seulement si tous leurs coefficients sont égaux :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = b_k$$

1.2 Opérations dans $\mathbb{K}[X]$

Si $P = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ et $Q = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ sont deux polynômes on définit leur *somme* $P + Q$ par :

$$P + Q = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

Cette addition est évidemment *associative* et *commutative*. L'élément neutre est $0_{\mathbb{K}[X]}$:

$$P + 0_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]} + P = P$$

On définit le *produit* $P \times Q$, aussi noté PQ , par :

$$P \times Q = (c_0, c_1, c_2, \dots)$$

où on a posé pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Cette opération est elle aussi *associative* et *commutative*. L'élément neutre est $1_{\mathbb{K}[X]} = (1, 0, 0, \dots)$:

$$P \times 1_{\mathbb{K}[X]} = 1_{\mathbb{K}[X]} \times P = P$$

La multiplication est *distributive par rapport à l'addition*. Si R est un autre polynôme de $\mathbb{K}[X]$:

$$P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$$

On définit aussi la *multiplication par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda.P = (\lambda \times a_0, \lambda \times a_1, \lambda \times a_2, \dots)$$

Le polynôme $(-1).P$ est noté $-P$ et on l'appelle *opposé* de P . L'opération $P + (-1).Q$ est noté $P - Q$. On a évidemment $P - P = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

La multiplication par un scalaire est compatible avec le produit dans le sens suivant :

$$\lambda.(P \times Q) = (\lambda.P) \times Q = P \times (\lambda.Q)$$

1.3 L'indéterminée X

On note X la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, x_n = 0$. Avec d'autres notations :

$$X = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$$

\triangle Ne pas perdre de vue que la lettre X désigne un polynôme et non un élément de l'ensemble \mathbb{K} des scalaires.

On vérifie facilement que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$X^k = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ (k+1)\text{-ième}}}{1}, 0, 0, \dots)$$

avec la convention $X^0 = 1_{\mathbb{K}[X]}$.

Tout polynôme $P = (a_0, a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots)$ peut donc désormais se noter :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_N X^N = \sum_{k=0}^N a_k X^k$$

où pour simplifier les notations on note a_0 à la place de $a_0 1_{\mathbb{K}[X]} = a_0 X^0$.

Pour se remémorer que X est l'indéterminée, le polynôme P est aussi noté $P(X)$.

\triangle $P(X)$ ne désigne pas une fonction évaluée en X , mais un polynôme.

Résumé des premières propriétés.

- L'unicité des coefficients peut s'énoncer ainsi :

$$\sum_{k=0}^N a_k X^k = \sum_{k=0}^N b_k X^k \iff \forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, a_k = b_k$$

- Multiplication d'un polynôme par un scalaire :

$$\lambda \cdot \sum_{k=0}^N a_k X^k = \sum_{k=0}^N (\lambda \times a_k) X^k$$

- Somme de deux polynômes :

$$\sum_{k=0}^{N_1} a_k X^k + \sum_{k=0}^{N_2} b_k X^k = \sum_{k=0}^{\max(N_1, N_2)} (a_k + b_k) X^k$$

avec la convention que $a_k = 0$ si $k > N_1$ et $b_k = 0$ si $k > N_2$.

En particulier :

$$\sum_{k=0}^N a_k X^k + \sum_{k=0}^N b_k X^k = \sum_{k=0}^N (a_k + b_k) X^k$$

- Produit de deux polynômes :

$$\left(\sum_{k=0}^{N_1} a_k X^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^{N_2} b_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{N_1+N_2} c_k X^k$$

où $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ avec la convention que $a_k = 0$ si $k > N_1$ et $b_k = 0$ si $k > N_2$.

En particulier :

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k X^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^N b_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{2N} c_k X^k$$

où $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ avec la convention que $a_k = b_k = 0$ si $k > N$.

\triangle Dans l'écriture $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ l'entier N n'est pas unique. En effet, il désigne un rang à partir duquel les coefficients du polynôme sont nuls, donc si N convient alors $N+1, N+2, \dots$ conviennent aussi. Par conséquent on utilise aussi la notation :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

où la somme infinie a un sens puisque ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Les propriétés suivantes sont alors plus simples à écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k &\iff \forall k \in \mathbb{N}, a_k = b_k \\ \lambda \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda \times a_k) X^k \\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k \\ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k \quad \text{où } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \end{aligned}$$

Vocabulaire. Un polynôme n'ayant qu'un seul (resp. deux, resp. trois) coefficient(s) non nul(s) est appelé *monôme* (resp. *binôme*, resp. *trinôme*).

 **Exemple.** $P(X) = 2X^2 + X^5$ est un binôme ; $Q(X) = -X^3$ est un monôme.

Un polynôme est donc une somme de monômes.

Avec les règles de calculs données précédemment, on peut montrer une formule du binôme pour les polynômes.

Théorème 1 – Formule du binôme pour les polynômes

Si P et Q sont deux polynômes et n un entier naturel alors :

$$(P + Q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot P^k \cdot Q^{n-k}$$


De plus si n est un entier naturel non nul on a par télescopage :

$$P^n - Q^n = (P - Q) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k} \right)$$

et donc :

$$P^n - 1_{\mathbb{K}[X]} = (P - 1_{\mathbb{K}[X]}) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} P^k \right)$$

ce qu'on peut voir comme une généralisation des sommes géométriques à $\mathbb{K}[X]$.

 **Exemple.** Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ en regardant le coefficient de X^n dans le polynôme $(1 + X)^{2n}$.

1.4 Degré d'un polynôme

On se donne $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$. Par définition d'un polynôme il existe un entier naturel $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k > N \implies a_k = 0$$

Si on suppose de plus que $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, alors : $\exists k \in \llbracket 0, N \rrbracket; a_k \neq 0$

Définition 2 – Degré d'un polynôme non nul

Si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors on appelle *degré de P* l'entier naturel défini par :

$$\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N}; a_k \neq 0\}$$

Avec les notations précédentes on a $\deg(P) = \max\{k \in \llbracket 0, N \rrbracket; a_k \neq 0\}$, donc on est sûr que *le maximum existe* puisqu'il est pris dans un ensemble *fini* (inclus dans $\llbracket 0, N \rrbracket$).

Théorème 3 – Unicité de l'écriture d'un polynôme non nul

Si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors :

1. P s'écrit de manière unique $P(X) = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ avec $N \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{K}^{N+1}$ et $a_N \neq 0$;
2. dans ce cas $N = \deg(P)$.

On adopte la convention : $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$.

En général, pour un polynôme P quelconque, on a donc $\deg(P) \in \{-\infty\} \cup \mathbb{N}$.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X]; \deg(P) \leq n\}$$

Il est clair que $\mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}[X]$, que $\mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}_{n+1}[X]$ et plus généralement que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad n \leq m \implies \mathbb{K}_0[X] \subseteq \mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}_m[X] \subseteq \mathbb{K}[X]$$

Les éléments de $\mathbb{K}_0[X]$ sont appelés *polynômes constants*. On a donc :

$$P \text{ est un polynôme constant} \iff \deg(P) \leq 0 \iff \left(P = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ ou } \left(P \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ et } \deg(P) = 0 \right) \right)$$


Les polynômes constants se notent $P(X) = a1_{\mathbb{K}[X]}$, ou encore par abus de notation $P(X) = a$, avec $a \in \mathbb{K}$.


Pour tout polynôme P non nul, noté $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$, on appelle :

- *terme dominant de P* le monôme de plus haut degré, qui est ici $a_n X^n$;
- *coefficient dominant de P* le coefficient du terme dominant, qui est ici a_n ;
- *terme constant de P* le coefficient de degré 0, qui est ici a_0 .

Définition 4 – Polynôme unitaire

Si P est un polynôme non nul, on dit que P est *unitaire* lorsque son coefficient dominant est égal à 1.

 **Exemple.** $P(X) = 4X^5 - 2X + 3$ est de degré 5, de terme dominant $4X^5$, de coefficient dominant 4 et de terme constant 3. Il n'est pas unitaire.

 **Exemple.** Quel est la terme dominant de $(X + 1)^n$ lorsque $n \in \mathbb{N}$?

Dans les résultats suivants on suppose que P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 5 – Intégrité de $\mathbb{K}[X]$


Si P et Q sont deux polynômes on a :

$$P \times Q = 0_{\mathbb{K}[X]} \iff P(X) = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ ou } Q(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

Théorème 6 – Règles de calcul du degré

1. Si λ est un scalaire non nul : $\deg(\lambda.P) = \deg(P)$.
2. En général : $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
et si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
3. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

 **Exemple.** Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré du polynôme $(X + 1)^n$.

 **Exemple.** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P^2 = X$ puis tels que $P^2 = XP + 1$.


\triangle Si $\deg(P) = \deg(Q)$, on peut avoir $\deg(P + Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$ lorsque les termes dominants s'annulent.

 **Exemple.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le degré du polynôme $(X + 1)^n - X^n$.

On définit la *composition de deux polynômes*. Si P et Q sont deux polynômes, avec $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$$

Ce polynôme est aussi noté $P(Q(X))$.

 **Exemple.** $P(X^2) = \sum_{k=0}^n a_k X^{2k}$. Ne pas confondre avec $X^2 P = \sum_{k=0}^n a_k X^{k+2}$.

Proposition 7 – Degré d'une composée

Si Q est non nul et P est non constant : $\deg(Q \circ P) = \deg(Q) \times \deg(P)$

On peut encore affaiblir l'hypothèse sur P : P peut être constant mais cette valeur ne doit pas être une racine de Q .

 **Exemple.** Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré du polynôme $(X^2 + 1)^n$.

1.5 Parité d'un polynôme


Dans cette section, P est un élément quelconque de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 8 – Polynôme pair/impair

1. On dit que P est pair lorsque $P(-X) = P(X)$.
2. On dit que P est impair lorsque $P(-X) = -P(X)$.

Théorème 9 – Caractérisation de polynômes pairs/impairs

1. P est pair si, et seulement si, tous ses coefficients d'indice impair sont nuls.
2. P est impair si, et seulement si, tous ses coefficients d'indice pair sont nuls.

 **Exemple.** $X^5 + X$ est impair et $X^8 + 4X^4 + 3X^2$ est pair. Par contre, $X^3 + X^2$ n'est ni pair, ni impair.

1.6 Fonction polynomiales

Dans cette section, P et Q sont deux éléments quelconques de $\mathbb{K}[X]$.

Le polynôme P est noté $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, et Q est noté $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$.

Définition 10 – Fonction polynomiale associée à P

On appelle *fonction polynomiale* associée à P l'application $\tilde{P} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Théorème 11 – Injection entre polynômes et fonctions polynomiales

L'application $P \mapsto \tilde{P}$ est une injection.

Par conséquent on notera encore P à la place de \tilde{P} . Si $x \in \mathbb{K}$ le scalaire $\tilde{P}(x)$, encore noté $P(x)$, est appelé P évalué en x .

⚠ Ne pas confondre le scalaire $P(x)$ et le polynôme $P(X)$.

L'unicité des coefficients, combinée à l'injection précédente, a pour conséquence le résultat suivant :

$$\sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^n b_k X^k \iff \left(\forall x \in \mathbb{K}, \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n b_k x^k \right) \iff \left(\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k \right)$$

⚠ Ne pas oublier le quantificateur \forall pour le scalaire x .

Une autre conséquence du théorème est que les ensembles $\mathbb{K}_0[X]$ et \mathbb{K} sont en bijection. Par abus de notation on considère souvent que $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$, ie que $a1_{\mathbb{K}[X]} = a$.

On peut aussi remarquer que $P(0_{\mathbb{K}}) = a_0$: le *terme constant* de P est obtenu en évaluant P en $0_{\mathbb{K}}$.

On a donc : P est constant $\iff P = P(0_{\mathbb{K}})$

2 Racines d'un polynôme

2.1 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Dans toute cette section A , B et C sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 12 – Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Si $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, on dit que B *divise* A lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A(X) = B(X) \times Q(X)$. Dans ce cas on le note $B \mid A$.

On dit que B est un *diviseur* de A , que A est *divisible* par B ou que A est un *multiple* de B .

On peut remarquer que tout polynôme non nul divise $0_{\mathbb{K}[X]}$.

📎 **Exemple.** $X - 1$ divise $X^n - 1$, pour tout entier naturel n non nul.

Proposition 13 – Propriétés de la relation de divisibilité

1. Transitivité. Si $C \mid B$ et $B \mid A$ alors $C \mid A$.
2. Réflexivité. On a $B \mid B$.
3. Antisymétrie. Si $B \mid C$ et $C \mid B$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $B = \lambda.C$.
4. Si $B \mid C$ et $C \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, alors $\deg(B) \leq \deg(C)$


Lorsque $B \mid C$ et $C \mid B$, on dit que les polynômes B et C sont *associés*.

Un polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ quelconque est divisible par tout polynôme constant non nul et par tout polynôme qui lui est associé.

Théorème 14 – Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Si $B \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A(X) = B(X) \times Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

Q est appelé *quotient* et R est appelé *reste* de la division euclidienne de A par B .

 **Exemple.** Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 3X^3 + 2X^2 + X - 1$ par $X^2 - X + 1$, et de $X^5 - X^4 - 2X^2 - 3X + 1$ par $X^2 + 2$.

Proposition 15 – Division euclidienne et divisibilité

B divise A si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Proposition 16 – Division par $X - a$

Si P est un polynôme et a un scalaire, alors le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est $P(a)$.

Il existe donc un unique polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :


$$P(X) = (X - a).Q(X) + P(a)$$


2.2 Racines d'un polynôme

Dans cette section P est un polynôme et a un scalaire.

Définition 17 – Racine d'un polynôme

On dit que a est racine de P lorsque $P(a) = 0_{\mathbb{K}}$.


 **Exemple.** Le polynôme nul admet une infinité de racines : tous les scalaires. Les polynômes constants non nuls n'ont pas de racine.

 **Exemple.** Le polynôme $X - \alpha$ a une unique racine qui est α .

Rédaction.

Ne pas écrire $X - \alpha = 0 \iff X = \alpha$ puisque cette dernière égalité signifie l'égalité de suites $(0, 1, 0, 0, \dots) = (0, \alpha, 0, 0, \dots)$ qui est évidemment fausse.

Il faut écrire : pour $x \in \mathbb{K}$, $x - \alpha = 0 \iff x = \alpha$, donc α est l'unique racine de $X - \alpha$.

 **Exemple.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines du polynôme $X^n - 1$ sont les racines n -ièmes de l'unité.

Théorème 18 – Racine et divisibilité

α est racine de P si, et seulement si, $X - \alpha$ divise P .

Autrement dit : $P(\alpha) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X]; P(X) = (X - \alpha) \times Q(X)$.

On peut noter que si P est non constant alors $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Théorème 19 – Cas de racines deux à deux distinctes


Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires deux à deux distincts, alors :

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ sont racines de } P \iff \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) \mid P$$

Corollaire 20 – Relation entre degré et nombre de racines

Tout polynôme P non nul a un nombre de racines dans \mathbb{K} au plus égal à son degré.

Par contraposée, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(P) \leq n$ et P a au moins $n + 1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.

 **Exemple.** Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que P et Q coïncident en $n + 1$ points distincts de \mathbb{R} . Alors $P = Q$.

 **Exemple.** Montrer que la fonction exponentielle complexe n'est pas polynomiale.

2.3 Ordre de multiplicité d'une racine

Dans cette section P est un polynôme et α un scalaire.

Définition 21 – Racine multiple

L'ordre de multiplicité de α pour P est le plus grand entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $(X - \alpha)^k \mid P$, ie l'unique entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $(X - \alpha)^k \mid P$ et $(X - \alpha)^{k+1} \nmid P$.
On dit alors que α est *racine d'ordre k* de P .

△ Remarquez que α racine d'ordre 0 signifie en fait que α n'est pas racine de P .

On utilise le vocabulaire suivant :

- si $k = 1$, on dit que α est *racine simple* de P ;
- si $k = 2$, on dit que α est *racine double* de P ;
- si $k \geq 3$, on dit que α est *racine multiple* de P .

Théorème 22 – Ordre de multiplicité et divisibilité

α est racine d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de P si, et seulement si, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - \alpha)^k \times Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

✎ **Exemple.** Pour $X(X - 2)^3$, 0 est racine simple et 2 est racine d'ordre 3. -1 est racine d'ordre 0 (ie n'est pas racine).

Définition 23 – Polynôme scindé

P est dit scindé s'il est non constant et s'il s'écrit comme un produit de polynômes du premier degré :

$$P = \lambda \times \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires.

Dans ce cas λ est le *coefficient dominant* de P , n est son *degré* et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les *racines* de P .

△ Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut être scindé dans $\mathbb{C}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$: par exemple $X^2 + 1$.

△ Les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ne sont pas supposé deux à deux distincts.

Si dans la liste $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ on regroupe les valeurs identiques, alors on a l'écriture :

$$P = \lambda \times \prod_{k=1}^r (X - \mu_k)^{\nu_k}$$

où μ_1, \dots, μ_r sont les racines *distinctes* de P et ν_1, \dots, ν_r sont leurs ordres de multiplicité.

Pour un polynôme scindé, le degré est supérieur ou égal à la somme des ordres de multiplicité de ses racines. C'est en fait vrai même si le polynôme n'est pas scindé, d'après le théorème suivant.

Proposition 24 – Factorisation d'un polynôme

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de racines dans \mathbb{K} distinctes μ_1, \dots, μ_r d'ordres de multiplicité v_1, \dots, v_r . Il existe alors un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(X) = Q(X) \times \prod_{k=1}^r (X - \mu_k)^{v_k} \quad \text{et} \quad Q \text{ n'a pas de racine dans } \mathbb{K}$$


Donc le degré de P est supérieur ou égal à la somme des ordres de multiplicité de ses racines.

2. Un polynôme P non nul est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ si, et seulement si, son degré est égal à la somme des ordres de multiplicité de ses racines dans \mathbb{K} .

Important. Très souvent, on compte les racines *avec leur ordre de multiplicité* : cela signifie qu'une racine est comptée autant de fois que son ordre de multiplicité. On ne parle donc plus de racines distinctes.

On obtient donc pour un polynôme P non nul :

- le degré de P est supérieur ou égal au *nombre de ses racines comptées avec leur ordre de multiplicité*.
- P est scindé si, et seulement si, son degré est égal au *nombre de ses racines comptées avec leur ordre de multiplicité*.

 **Exemple.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme $X^n - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.


2.4 Décompositions en facteurs irréductibles

Définition 25 – Polynôme irréductible

Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible* lorsqu'il est non constant, et lorsque ses seuls diviseurs sont les polynômes constants non nuls, et les polynômes qui lui sont associés.

Autrement dit un polynôme P non constant est irréductible si, et seulement si :

$$\forall (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (P = QR) \implies \left(Q \text{ est constant non nul ou } R \text{ est constant non nul} \right)$$

 **Exemple.** Dans $\mathbb{K}[X]$ les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

\triangle L'irréductibilité dépend du choix de \mathbb{K} : $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$; $X^2 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Le résultat fondamental est le suivant.

Théorème 26 – Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant a au moins une racine dans \mathbb{C} .

Remarquer que ce résultat s'applique aux polynômes de $\mathbb{R}[X]$: ils ont toujours au moins une racine dans \mathbb{C} .

Ce résultat est très puissant : l'introduction des nombres complexes a donné une racine au polynôme $X^2 + 1$, et du même coup à tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$!

Les conséquences sont nombreuses.

Corollaire 27 – Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.

Corollaire 28 – Décomposition en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

Tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant s'écrit :

$$P(X) = \lambda \times \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$.

Les nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les racines complexes de P et ne sont pas nécessairement deux à deux distinctes (chaque racine est répétée autant de fois que son ordre de multiplicité).

Un autre énoncé possible est le suivant : tous les polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ sont *scindés*.

Pour factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, il suffit donc de déterminer ses racines.

Corollaire 29 – Nombre de racines des polynômes de $\mathbb{C}[X]$

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non nul a un nombre de racines, comptées avec leur ordre de multiplicité, égal à son degré.

C'est faux pour le polynôme nul qui a lui une infinité de racines.

 **Exemple.** Factoriser $X^4 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

En remarquant que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ se décompose dans $\mathbb{C}[X]$ on peut établir les résultats suivants.

Lemme 30 – Racines complexes et polynômes de $\mathbb{R}[X]$

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff \bar{\alpha} \text{ est racine de } P$$

Pour un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ les racines complexes non réelles sont deux à deux conjuguées ; elles sont donc en nombre pair.

Le calcul suivant sera fondamental dans la suite. Si $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$(X - \alpha) \times (X - \bar{\alpha}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}[X]$$

Corollaire 31 – Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

- les polynômes de degré 1 ;
- les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatifs.

Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ degré 2 à discriminant strictement négatifs, sont ceux qui n'ont pas de racine réelle.

⚠ Le fait de ne pas avoir de racine réelle ne garantit pas d'être irréductible : $X^4 + 1$ n'a pas de racine réelle mais est réductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Corollaire 32 – Décomposition en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Tout $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit :

$$P(X) = \lambda \times \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)^{r_i} \times \prod_{j=1}^{\ell} (X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{v_j}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $(k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_{\ell}, \gamma_1, \dots, \gamma_{\ell}) \in \mathbb{R}^{k+2\ell}$ et $(r_1, \dots, r_k, v_1, \dots, v_{\ell}) \in (\mathbb{N}^*)^{k+\ell}$, avec $\forall j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket, \Delta_j = \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$.

Dans cet écriture, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont les racines *réelles* de P et ne sont pas nécessairement deux à deux distinctes (chaque racine est répétée autant de fois que son ordre de multiplicité).

Important. Pour factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$, il suffit donc en théorie de déterminer ses racines *complexes*, puis de regrouper les racines conjuguées deux à deux.

📎 **Exemple.** Décomposer $X^3 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Corollaire 33 – Nombre de racines des polynômes de $\mathbb{R}[X]$

1. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ non nul a un nombre de racines, comptées avec leur ordre de multiplicité, inférieur ou égal à son degré.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. On a équivalence des prédicats :
 - (i) P a un nombre de racines, comptées avec leur ordre de multiplicité, égal à son degré
 - (ii) P n'a pas de racine complexe non réelle
 - (iii) P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$

Corollaire 34 – Cas des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair a au moins une racine réelle.

2.5 Somme et produit des racines d'un polynôme scindé

Dans cette section, P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ noté :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$$

avec $a_n \neq 0$.

On suppose P scindé; il a donc n racines comptées avec leur ordre de multiplicité qu'on note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Théorème 35 – Somme et produit des racines d'un polynôme scindé

On a les formules :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \times \alpha_2 \times \dots \times \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Dans le cas d'un trinôme du second degré, on retrouve le théorème de Viète.

Ces formules permettent de calculer des sommes et des produits. Elles ont permis à l'Euler de deviner que :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

On peut remarquer que chaque coefficient de P donne une formule faisant intervenir les racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Mais à part les deux ci-dessus, elles ne sont pas au programme de PCSI.

3 Dérivée d'un polynôme et applications

3.1 Dérivée d'un polynôme


Dans cette section P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 36 – Dérivée d'un polynôme

On définit le *polynôme dérivé* de P , noté P' par :

- si P est constant alors on pose $P' = 0$;
- si $\deg(P) \geq 1$ alors on le note $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

$$\text{On pose alors } P'(X) = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k.$$

 **Exemple.** $P(X) = 4X^5 + 9X + \frac{3}{2}$ donne $P'(X) = 20X^4 + 9$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si on identifie polynôme et fonction polynomiale, alors on retrouve la dérivée en tant que fonction numérique.

Proposition 37 – Degré du polynôme dérivé

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non constant, ie si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme constant, ie si $\deg(P) \leq 0$, alors $P' = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

On a donc :

$$P \text{ est un polynôme constant} \iff P' = 0_{\mathbb{K}[X]}$$


Théorème 38 – Propriétés de la dérivation

Si $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$(\lambda.P + Q)' = \lambda.P' + Q' \quad \text{et} \quad (P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$$

et :

$$(Q \circ P)' = P' \times Q' \circ P$$


 **Exemple.** $(X^2 \times P(X))' = 2X \times P(X) + X^2 \times P'(X)$ et $(P(2X))' = 2 \times P'(2X)$.

Définition 39 – Dérivée d'ordres supérieurs

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le *polynôme dérivé d'ordre k* de P , note $P^{(k)}$, par :

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall k \in \mathbb{N}, P^{(k+1)} = (P^{(k)})' \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le polynôme $P^{(k)}$ désigne le polynôme P dérivé k fois.

 **Exemple.** $P(X) = 4X^5 + 9X + \frac{3}{2}$, $P'(X) = 20X^4 + 9$, $P''(X) = 80X^3$, $P^{(3)}(X) = 240X^2$, $P^{(4)}(X) = 480X$, $P^{(5)}(X) = 480$ et pour $k \geq 6$, $P^{(k)}(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Proposition 40 – Degré du polynôme $P^{(k)}$


Soit $k \in \mathbb{N}$.

1. Si $k > \deg(P)$, alors $P^{(k)} = 0$.
2. Si $k \leq \deg(P)$, on a $\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k$

Si $k \leq \deg(P)$ et si $P(X) = \sum_{j=0}^n a_j X^j$, alors :

$$\begin{aligned} P^{(k)}(X) &= \sum_{j=k}^n j(j-1) \times \dots \times (j-k+1) \times a_j X^{j-k} = \sum_{j=k}^n \frac{j!}{(j-k)!} a_j X^{j-k} \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k} X^j \end{aligned}$$


et on en déduit que $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

 **Exemple.** La dérivée de k -ième de X^j est 0 si $k > j$, et si $k \leq j$ elle vaut $j \times (j-1) \times \dots \times (j-k+1) \times X^{j-k} = \frac{j!}{(j-k)!} X^{j-k}$.

3.2 Formule de Taylor**Théorème 41 – Formule de Taylor**

Si $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$ alors :

$$\forall a \in \mathbb{K}, \quad P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

 **Exemple.** Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = P'(1) = 1$ et $P''(1) = -1$.

L'unicité des coefficients permet donc de dire à nouveau que $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

On arrive au résultat principal de ce paragraphe, qui permet de déterminer simplement l'ordre de multiplicité d'une racine.

Lemme 42 – Dérivé et ordre de multiplicité

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors :


$$\alpha \text{ est racine d'ordre } r \text{ de } P \implies \alpha \text{ est racine d'ordre } r - 1 \text{ de } P'$$


Théorème 43 – Calcul de l'ordre de multiplicité

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors on a équivalence de :

- (i) α est racine d'ordre r de P ;
- (ii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \dots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

Lorsqu'on factorise un polynôme, on peut donc simplifier la recherche de racines en déterminant les ordres de multiplicité avec ce théorème.


 **Exemple.** Factoriser le polynôme $P(X) = X^5 - 3X^4 + 2X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

 **Exemple.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (X + 1)^n (X - 1)^n$. Alors $\forall k \in [0, n - 1]$, $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$ et de plus $P_n^{(n)}(1) \neq 0$ et $P_n^{(n)}(-1) \neq 0$.

Corollaire 44 – Caractérisation des polynômes scindés à racines simples

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant. On a équivalence des prédicats :

- (i) P est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et à racines simples
- (ii) P a un nombre de racines distinctes supérieur ou égal à son degré
- (iii) P est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et n'a pas de racine commune avec P' .

 **Exemple.** Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, et $P = X^n - X + 1$. Montrer que P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

4 Expression par radicaux des racines des polynômes

« Exprimer par radicaux », signifie exprimer à l'aide de sommes, produits, quotients, et fonction racines n -ièmes (les fameux radicaux).

4.1 Cas du degré 1 ou du degré 2

Une équation du degré 1 est de la forme $x + a = 0$, avec $a \in \mathbb{K}^2$. Elle a pour unique solution $x = -a$.

Une équation du degré 2 est de la forme $x^2 + ax + b = 0$, avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On sait la résoudre à partir de l'étude de son discriminant; les solutions s'expriment à partir de produits et quotients de radicaux d'expressions en a et b .

Ces connaissances se retrouvent dans différentes civilisations jusqu'à 2000 avant JC.

4.2 Cas du degré 3 : méthode de Cardan (hors-programme)

Une équation du degré 3 est de la forme $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$.

On peut simplifier le problème en utilisant le changement de variable $y = x + \frac{a}{3}$. On obtient l'équation $y^3 + py + q = 0$ où p et q s'expriment comme des produits de a , b et c .

On se donne alors deux nombres u et v tels que $u + v = x$ et $uv = -\frac{p}{3}$ (ils existent d'après les résultats sur les systèmes sommes-produits). Ces deux nombres vérifient :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

Toujours d'après le théorème sur les systèmes somme-produits, on sait calculer u^3 et v^3 en fonction de radicaux de p et q , donc de a , b et c . On en déduit que u , v puis x s'exprimer par radicaux en fonction de a , b et c .

On peut obtenir par exemple :

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2}} - \frac{a}{3}$$

avec p et q à remplacer en fonction de a , b et c . Mais dans certains cas ces formules conduisent à écrire la racine carrée d'un nombre négatif... Cardan (1501-1576) aurait alors eu l'idée d'introduire les nombres complexes pour donner un sens rigoureux à ses calculs.

On pense que cette méthode a été confiée à Cardan par un autre mathématicien du nom de Tartaglia (1499-1577) qui lui avait fait jurer de la garder secrète...

 **Exemple.** Résoudre $6x^3 - 6x^2 + 12x + 7 = 0$.

4.3 Cas du degré 4 : méthode de Ferrari (hors-programme)


Une équation du degré 4 est de la forme $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$.

On peut simplifier le problème en utilisant le changement de variable $y = x + \frac{a}{4}$. On obtient l'équation $y^4 = py^2 + qy + r$ où p, q et r s'expriment comme des produits de a, b, c et d .

On se donne alors un nombre t tel que $q^2 - 4(2t + p)(t^2 + r) = 0$, qu'on trouve avec la méthode de Cardan (ou autre). Pour cette valeur de t , l'expression $(2t + p)y^2 + qy + (t^2 + r)$ qui est du second degré en y , a un discriminant nul et peut donc se factoriser sous la forme $(\alpha y + \beta)^2$.

On remarque de plus que $y^4 = (y^2 + t^2)^2 - 2y^2t - t^2$ donc $(y^2 + t^2) = (2t + p)y^2 + qy + (t^2 + r) = (\alpha y + \beta)^2$. On en déduit que $y = -t^2 \pm (\alpha y + \beta)$. C'est une équation du second degré en y dont la résolution va donner y exprimé par radicaux en fonction de t, α, β , et donc on aura x exprimé par radicaux en fonction de a, b, c et d .

Cette méthode a été découverte par le mathématicien Ferrari (1522-1565), élève de Cardan.

 **Exemple.** Résoudre $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 10 = 0$.

4.4 Théorème d'Abel-Galois (hors-programme)

A partir du degré 5 les mathématiciens ont échoué à trouver des formules qui expriment par radicaux les solutions en fonction des coefficients de l'équation.

Les mathématiciens Abel (1802-1829) et Galois (1811-1832) sont parvenus à donner une définition formelle de l'expression « équation résoluble par radicaux » puis à prouver qu'aucune formule par radicaux générale n'est possible pour les équations de degré supérieur ou égal à 5.

Pourtant d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on sait que pour une équation de degré n il y a toujours n racines complexes (comptées avec leur ordre de multiplicité). Mais elles ne peuvent pas être exprimées à l'aide des symboles $+, -, *, /$ et $\sqrt[n]{}$.

5 Compétences à acquérir sur ce chapitre

- ➔ Connaître les notions de degré et de coefficient dominant.
 - ★ Savoir calculer le degré ou le coefficient dominant d'une somme, d'un produit ou d'une composée de polynômes.
 - ★ Utiliser ces notions pour simplifier la recherche de solutions d'une équation dont l'inconnue est un polynôme.

- ➔ Utiliser l'unicité des coefficients des polynômes.
 - ★ Différencier une égalité entre deux polynômes et deux fonctions polynomiales.
 - ★ L'utiliser pour démontrer des identités combinatoires.
 - ★ L'utiliser pour rechercher les solutions d'une équation dont l'inconnue est un polynôme.

- ➔ Utiliser le lien entre nombre de racines d'un polynôme et son degré.
 - ★ Montrer qu'un polynôme est nul grâce à un argument sur son nombre de racines.
 - ★ Montrer qu'un polynôme est scindé grâce à un argument sur son nombre de racines.

- ➔ Connaître le lien entre racines d'un polynômes, factorisation en polynômes irréductibles et racines des polynômes dérivés.
 - ★ Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$, sur un exemple ou de manière générale.
 - ★ Déterminer l'ordre de multiplicité d'une racine en factorisant ou en recherchant les racines des polynômes dérivés.
 - ★ Utiliser les coefficients d'un polynôme scindé pour calculer la somme ou le produit de ses racines.

6 Exercices

Notions de base

EXERCICE 1. Calculs de degrés et de coefficients dominants

Déterminer les degrés et coefficients dominants des polynômes suivants :

1. $X^3 - X(X - 2 + i)$
2. $(X - 2)^n - (X + 5)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
3. $\prod_{k=0}^n (2X - k)$
4. $\prod_{k=0}^n (X - 6)^k$
5. $\prod_{k=0}^n (kX - 2)^{k^2}$

EXERCICE 2. Décomposition en irréductibles

Factoriser les polynômes suivants :

1. $X^4 - X^2 + 1$, $X^8 + X^4 + 1$ et $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant que $i + 1$ est racine dans \mathbb{C}

EXERCICE 3. Un peu de géométrie

On désire prouver le résultat suivant :

« Si a , b et c sont trois complexes de module 1 vérifiant $a + b + c = 1$, alors un des ces trois complexes vaut 1 ».

Supposons que a , b et c soient trois nombres complexes de module 1 tels que $a + b + c = 1$.

1. Justifier l'égalité : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.
2. On considère le polynôme P défini par : $P = (X - a)(X - b)(X - c)$.
Justifier l'existence d'une constante complexe α non nulle telle que : $P = X^3 - X^2 + \alpha X - \alpha$.
3. Conclure.

EXERCICE 4. Détermination d'ensemble de polynômes

1. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $P(X + 1) = P(X)$.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $P_n - P'_n = X^n$.

EXERCICE 5. Division euclidienne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B lorsque :

1. $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ et $B = X^2 + 1$
2. $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ et $B = (X - i)^2$
3. $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X - 2)^2$
4. $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X - 3)^2$

EXERCICE 6. Calcul de puissances d'une matrice avec un polynôme annulateur

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une relation entre A^3 , A^2 et A .
2. Méthode 1 : Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n A + b_n A^2$. En déduire l'expression de A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Méthode 2 : Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 2X^2 + X$. En déduire l'expression de A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 7. Formule de Vandermonde

Soient N_1 et N_2 deux éléments de \mathbb{N}^* et $n \in [0, N_1 + N_2]$.

En considérant le coefficient de X^n dans le polynôme $(1 + X)^{N_1} \times (1 + X)^{N_2}$, calculer :

$$\sum_{k=0}^n \binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}$$

Proposer une autre démonstration de cette formule en dénombrant des tirages simultanés dans une urne.

Sujets d'étude
EXERCICE 8. Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne $n + 1$ réels x_0, x_1, \dots, x_n deux à deux distincts, et $n + 1$ réels y_0, y_1, \dots, y_n .

1. Soit $k \in [0, n]$. Déterminer l'unique polynôme $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in [0, n], \quad \begin{cases} L_k(x_j) = 0 & \text{si } j \neq k \\ L_k(x_k) = 1 \end{cases}$$

2. En déduire que $P = \sum_{k=0}^n y_k L_k$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in [0, n], P(x_j) = y_j.$$

EXERCICE 9. Calcul d'un produit

Soit $n \geq 2$. On pose $P = (X + 1)^n - 1$.

1. Déterminer toutes les racines de P dans \mathbb{C} et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On note Q le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P = XQ$. A l'aide des racines de Q déterminer la valeur de :

$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

EXERCICE 10. Polynômes de Tchebychev

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} P_0 = 1 \text{ et } P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n .
2. Déterminer le terme constant de P_n et étudier la parité de P_n .
3. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_n(\cos x) = \cos(nx)$.
4. En déduire les racines de P_n .
5. Donner alors une expression factorisée de $P_n(X)$.
6. À l'aide des formule d'Euler et de De Moivre donner une autre expression de $P_n(X)$.

EXERCICE 11. Localisation des coefficients d'un polynôme

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note z_0, z_1, \dots, z_n les racines $(n+1)$ èmes de l'unité : $z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n+1}}$.

On définit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, avec $a_n \neq 0$, et on pose $M = \max_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} |P(z_k)|$.

1. Vérifier que : $M > 0$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Calculer $\sum_{k=0}^n (z_k)^p$ en fonction de p .
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left| \sum_{k=0}^n P(z_k) \right| \leq (n+1)M$.
 (b) En déduire que : $|a_0| \leq M$.
4. Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |a_k| \leq M$.

