Chapitre 13

Introduction aux espaces vectoriels

Sommaire

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans cette section, $\mathbb{E}$ est un ensemble non vide.

1 Généralités sur les espace vectoriels

1.1 Espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

Définition 1 – Espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

On dira que $\mathbb{E}$ est un *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ lorsque :

(i) $\mathbb{E}$ est muni d'une *addition* + qui est une application de $\mathbb{E}^2$ vers $\mathbb{E}$ telle que :
- *Commutativité.* $\forall (x,y) \in \mathbb{E}^2,\ x+y=y+x$
- *Associativité.* $\forall (x,y,z) \in \mathbb{E}^3,\ (x+y)+z=x+(y+z)$
- *Élément neutre.* Il existe un unique élément de E, noté 0_E, tel que :
$$\forall x \in \mathbb{E},\ 0_E+x=x+0_E=x.$$
- *Opposé.* Pour tout $x \in \mathbb{E}$, il existe un unique élément de $\mathbb{E}$, noté $-x$ et appelé opposé de x, vérifiant : $\forall x \in \mathbb{E},\ x+(-x)=(-x)+x=0_E$.

(ii) $\mathbb{E}$ est muni d'une *multiplication externe* . qui est une application de $\mathbb{K}\times\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}$ telle que :
- $\forall (\lambda,\mu,u) \in \mathbb{K}^2\times\mathbb{E},\quad (\lambda+\mu).u=\lambda.u+\mu.u$
- $\forall (\lambda,u,v) \in \mathbb{K}\times\mathbb{E}^2,\quad \lambda.(u+v)=\lambda.u+\lambda.v$
- $\forall (\lambda,\mu,u) \in \mathbb{K}^2\times\mathbb{E},\quad \lambda.(\mu.u)=(\lambda\times\mu).u=\mu.(\lambda.u)$
- $1.x=x$

On dit aussi que $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*, ou que $\mathbb{E}$ est muni d'une *structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*. En abrégé, on dira que $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$*-ev*.

Les éléments de $\mathbb{E}$ sont appelés *vecteurs*, et ceux de $\mathbb{K}$ *scalaires*.

⚠ Par convention, dans une multplication externe $\lambda.x$, la variable de gauche est le *scalaire* et celle de droite est le *vecteur*. Cette convention est indispensable étant donné qu'on ne met pas de flèche au-dessus des vecteurs.

Dans la suite, l'opération $x+(-y)$ sera notée $x-y$. On peut donc *additionner* ou *soustraire* deux vecteurs dans un espace vectoriel.

Si λ est un scalaire non nul, on peut multiplier un vecteur par $\frac{1}{\lambda}$, ce qu'on apelle diviser un vecteur par λ. Dans un espace vectoriel on peut donc *multiplier* ou *diviser* un vecteur par scalaire.

⚠ Dans un espace vectoriel on ne peut donc pas multiplier ou diviser deux vecteurs.

On peut remarquer qu'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ donne aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, en considérant la restriction à $\mathbb{R}$ de la multiplication par un scalaire.

Proposition 2 – Règles de calcul avec le signe $\sum$

Si $u, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p$ sont des vecteurs de $\mathbb{E}$ et $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des scalaires dans $\mathbb{K}$ on a :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} (\lambda.u_k) = \lambda.\sum_{k=1}^{p} u_k$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^{p} u_k + \sum_{k=1}^{p} v_k$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k.u) = \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\right).u$

Proposition 3 – Règles de calcul avec 0 et $0_{\mathbb{E}}$

Si λ est un scalaire dans $\mathbb{K}$ et u, v sont deux vecteurs de $\mathbb{E}$ on a :

1. $\lambda.0_E = 0_E$
2. $0.u = 0_E$
3. **Intégrité externe :**
$$\begin{aligned} \lambda.u = 0_E &\iff \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E \\ \lambda.u = \mu.u &\iff u = 0_E \text{ ou } \lambda = \mu \\ \lambda.u = \lambda.v &\iff \lambda = 0 \text{ ou } u = v \end{aligned}$$

Proposition 4 – Règles de calcul avec le signe moins

Si λ, μ sont deux scalaires dans $\mathbb{K}$ et u, v sont deux vecteurs de $\mathbb{E}$, on a :

1. $-0_{\mathbb{E}} = 0_{\mathbb{E}}$
2. $(-1).u = -u$
3. $(-\lambda).u = -(\lambda.u)$
4. $(-\lambda).(-u) = \lambda.u$
5. $\lambda.(u - v) = \lambda.u - \lambda.v$
6. $(\lambda - \mu).u = \lambda.u - \mu.u$

✎ ***Exemple.*** L'ensemble des vecteurs du plan est un $\mathbb{R}$-ev.

✎ ***Exemple.*** $\{0\}$ est un $\mathbb{R}$-ev et un $\mathbb{C}$-ev.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\mathbb{K}^n}$ Un vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ est un n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on définit leur somme :

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{K}^n$ on définit :

$$\lambda.x = \lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda \times x_1, \dots, \lambda \times x_n)$$

Alors $(\mathbb{K}^n, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Le vecteur nul est $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \dots, 0)$.

En particulier pour $n=1$: $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev pour ses opérations naturelles. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev, et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev donc un $\mathbb{R}$-ev.

$\mathbb{R}^2$ correspond à l'ensemble des vecteurs du plan, et $\mathbb{R}^3$ à l'ensemble des vecteurs de l'espace.

⚠ $\mathbb{R}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-ev!

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\mathbb{F}^A}$ Soient A un ensemble quelconque et $\mathbb{F}$ un $\mathbb{K}$-ev. On rappelle que $\mathbb{F}^A$ désigne l'ensemble des fonctions $f : A \longrightarrow \mathbb{F}$ définies sur A à valeurs dans $\mathbb{F}$.
Pour f et g éléments de $\mathbb{F}^A$, on définit la fonction $f+g : A \longrightarrow \mathbb{F}$ par :

$$\forall x \in A, \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

et pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et f élément de $\mathbb{F}^A$, on définit la fonction $\lambda.f : A \longrightarrow \mathbb{F}$ par :

$$\forall x \in A, \quad (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$$

Alors $\left(\mathbb{F}^A,+,.\right)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Le vecteur nul $0_{\mathbb{F}^A}$ est la fonction constante égale à 0_F.
En particulier :
• pour $\mathbb{F}=\mathbb{K}$ et $A=\mathbb{N}$, $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,.\right)$ est un $\mathbb{R}$-ev (suites réelles ou complexes)
• pour $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ et I intervalle de $\mathbb{R}$, $\left(\mathbb{R}^I,+,.\right)$ est un $\mathbb{R}$-ev (fonctions définies sur un intervalle I)

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\mathbb{K}[X]}$ On rappelle que $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On a déjà défini une addition et une multiplication externe.
Alors $(\mathbb{K}[X],+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Le vecteur nul $0_{\mathbb{K}[X]}$ est le polynôme nul.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ On rappelle que $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de taille $n\times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. On a déjà défini une addition et une multiplication externe.
Alors $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Le vecteur nul $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ est la matrice nulle $0_{n,p}$ de taille $n\times p$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Dasn cette section $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev et $\mathbb{F}$ est une partie de $\mathbb{E}$.

Définition 5 – Sous-espace vectoriel

On dit que $\mathbb{F}$ est un *sous-espace vectoriel de* $\mathbb{E}$ lorsque :

(i) $\mathbb{F}\neq\varnothing$;

(ii) $\mathbb{F}$ stable pour « + » : $\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{F}^2$, $x_1+x_2\in\mathbb{F}$;

(iii) $\mathbb{F}$ stable pour « . » : $\forall(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times\mathbb{F}$, $\lambda.x\in\mathbb{F}$

En abrégé, on dira que $\mathbb{F}$ *est un sev de* $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** Un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ a toujours deux sev triviaux : $\{0_E\}$ et $\mathbb{E}$.

Proposition 6 – Propriété du vecteur nul

Si $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$, alors $0_E \in \mathbb{F}$.

Pour montrer que $\mathbb{F} \neq \emptyset$, on vérifie donc la plupart du temps que $0_E \in \mathbb{F}$.

✎ ***Exemple.*** $\emptyset$ n'est pas un sev de $\mathbb{E}$.

Théorème 7 – Caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$

$\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ si et seulement si :

(i) $\mathbb{F} \neq \emptyset$;

(ii) $\mathbb{F}$ stable par combinaison linéaire : $\forall(\lambda, x_1, x_2) \in \mathbb{K} \times \mathbb{F}^2$, $\lambda.x_1 + x_2 \in \mathbb{F}$

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{F}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle/ x^2 + y^2 = 1\right\}$, $\mathbb{F}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle/ x + y = 1\right\}$ et $\mathbb{Z}^2$ ne sont pas des sev de $\mathbb{R}^2$. Par contre $\mathbb{F}_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle/ x + y = 0\right\}$ en est un.

✎ ***Exemple.*** L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues et un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$.

✎ ***Exemple.*** L'ensemble des vecteurs d'une droite est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des vecteurs du plan.

✎ ***Exemple.*** L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

✎ ***Exemple.*** L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène définie sur I est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.

✎ ***Exemple.*** L'ensemble des suites arithmétiques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

✎ ***Exemple.*** $T_n^+(\mathbb{K})$, $T_n^-(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

⚠ $GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: il ne contient pas le vecteur nul et n'est pas non plus stable par multiplication externe !

Théorème 8 – Un sev est un $\mathbb{K}$-ev

Si $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$, alors les restrictions à $\mathbb{F}$ des opérations « $+$ » et « . » de $\mathbb{E}$, munissent $\mathbb{F}$ d'une structure de $\mathbb{K}$-ev vérifiant $0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{E}}$.

En pratique, pour montrer qu'un ensemble $\mathbb{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (8 conditions), on cherche un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ contenant $\mathbb{F}$ (ie $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$), et on montre que $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ (seulement 2 conditions).

✎ ***Exemple.*** Pour tout entier naturel n, $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-ev puisque c'est un sev de $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 9 – Intersection de sev

Si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev de $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}$ est aussi un sev de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** $D_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

⚠ En général $\mathbb{F}\cup\mathbb{G}$ n'est pas un sev de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** On pose $\mathbb{F}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=x\}$ et $\mathbb{G}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=-x\}$. $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev de $\mathbb{R}^2$, mais $\mathbb{F}\cup\mathbb{G}$ n'en est pas un.

✎ ***Exemple.*** Si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{F}\cup\mathbb{G}$ est aussi un sev de $\mathbb{E}$ si, et seulement si, $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{G}$ ou $\mathbb{G}\subseteq\mathbb{F}$.

2 Familles de vecteurs

Dans toute cette section, $\mathbb{E}$ désigne un $\mathbb{K}$-ev et $\mathscr{F}=(u_1,\dots,u_p)$ une famille finie de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$.

2.1 Combinaisons linéaires

Définition 10 – Combinaison linéaire

On dit qu'un vecteur $x\in\mathbb{E}$ est *combinaison linéaire* des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ lorsqu'il existe des scalaires $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p$ tels que :

$$x=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k.u_k$$

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^2$: $(2,3)$ est CL de $(1,0)$ et $(1,1)$ car $(2,3)=3.(1,1)+(-1).(1,0)$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}[X]$: X^3 est CL de la famille de polynômes $\left(1,X-1,(X-1)^2,(X-1)^3\right)$ car $X^3=1+3(X-1)+3(X-1)^2+(X-1)^3$.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Un exemple général à connaître dans } \mathbb{K}^n.}$
Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on pose $e_i=(0,\dots,0,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{i–ième position}}}{1},0,\dots,0)$.
Alors tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ est CL de la famille $(e_1,\dots,e_n)$:

$$\begin{aligned} x &= (x_1,\dots,x_n)\\ &= (x_1,0,\dots,0)+(0,x_2,0,\dots,0)+\dots+(0,\dots,0,x_n)\\ &= x_1.(1,0,\dots,0)+x_2.(0,1,0,\dots,0)+\dots+x_n.(0,\dots,0,1)\\ &= x_1.e_1+x_2.e_2+\dots+x_n.e_n\\ &= \sum_{k=1}^{n}x_k.e_k \end{aligned}$$

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Un exemple général à connaître dans } \mathbb{K}_n[X].}$
Si $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ est un élément de $\mathbb{K}_n[X]$, alors P est CL des polynômes 1, X, …, X^n. Ceci prouve que tout élément de $\mathbb{K}_n[X]$ est CL de la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Un exemple général à connaître dans } \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}).}$
Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on rappelle qu'on note E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, exceptés celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, qui est égal à 1.Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors A est CL des matrices $E_{i,j}$, $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

Théorème 11 – Combinaisons linéaires et sev

Si $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ et et si u_1, …, u_p sont des vecteurs de $\mathbb{F}$, alors toute combinaison linéaire de ces vecteurs est encore un vecteur de $\mathbb{F}$.

Ainsi, si $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ et si $u_1 \in \mathbb{F}, \ldots, u_p \in \mathbb{F}$, alors $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . u_k \in \mathbb{F}$

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

On rappelle que $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est une famille finie de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$.

Définition 12 – Notation Vect($\mathscr{F}$)

On note Vect($\mathscr{F}$) l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{E}$ qui sont combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.
On l'appelle *partie engendrée* par les vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.

Vect($\mathscr{F}$) est donc la partie de $\mathbb{E}$ suivante :

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i . u_i \ ; \ \ \forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Donc pour $x \in \mathbb{E}$:

$$x \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \Longleftrightarrow \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p ; \ x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i . u_i$$

Vect($\mathscr{F}$) est aussi noté $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ et est appelée *partie engendrée* par les vecteurs u_1, u_2, …, u_p.

On adopte aussi la convention : $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

✎ ***Exemple.*** $\mathrm{Vect}(0_E) = \{0_E\}$.

✎ ***Exemple.*** Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul du plan $\mathbb{R}^2$ ou de l'espace $\mathbb{R}^3$, alors $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ est la droite engendrée par $\vec{u}$.

Définition 13 – Droite vectorielle

Si u est un vecteur non nul de $\mathbb{E}$, alors la partie $\text{Vect}(u)$ est appelé *droite vectorielle engendrée par u.*

Définition 14 – Vecteurs colinéaires

Si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{E}$, on dit qu'ils sont *colinéaires* lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda.v$ ou $v = \lambda.u$

Pour imposer que ce soit $u = \lambda.v$ il faut que $v \neq 0_E$.

✎ ***Exemple.*** Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, alors $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est le plan engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Définition 15 – Plan vectoriel

Si u et v sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{E}$, alors $\text{Vect}(u, v)$ est appelé *plan vectoriel engendré par u et v.*

✎ ***Exemple.*** On a vu au paragraphe 2.1. que $\mathbb{K}^n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, avec $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{i-ième position}}}{1}, 0, \dots, 0)$, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

✎ ***Exemple.*** On a vu au paragraphe 2.1. que $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}\left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$

✎ ***Exemple.*** On a vu au paragraphe 2.1. que $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \text{Vect}\left((E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}\right)$

Théorème 16 – Propriétés de $\text{Vect}(\mathscr{F})$

1. La partie $\text{Vect}(\mathscr{F})$ est un sev de $\mathbb{E}$ qui contient les vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.
2. C'est le plus petit sev de $\mathbb{E}$ contenant les vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.

$\text{Vect}(\mathscr{F})$ sera donc appelée *sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.*

On a donc $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $u_k \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ et si $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$:

$$u_1 \in \mathbb{F} \text{ et } u_2 \in \mathbb{F} \text{ et } \dots \text{ et } u_p \in \mathbb{F} \implies \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) \subseteq \mathbb{F}$$

✎ ***Exemple.*** Si u est un vecteur de $\mathbb{E}$, alors la droite vectorielle engendrée par u est le plus petit sev de $\mathbb{E}$ contenant u.

Ce résultat peut servir à montrer très rapidement qu'une partie $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + 2y = z\right\} = \text{Vect}\left((1, 0, 1); (0, 1, 2)\right)$.

Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux familles de vecteurs de $\mathbb{E}$, telles que tout vecteur de la famille $\mathscr{F}$ est un vecteur de la famille $\mathscr{G}$, on dit que $\mathscr{F}$ est une *sous-famille* de $\mathscr{G}$, ou que $\mathscr{G}$ est une *sur-famille* de $\mathscr{F}$.

Corollaire 17 – Inclusions de Vect

Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux familles finies de vecteurs de $\mathbb{E}$:

$$\mathscr{F} \text{ sous-famille de } \mathscr{G} \implies \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subseteq \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$$

✎ ***Exemple.*** Si u et v sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, la droite engendrée par u est incluse dans le plan engendré par (u, v).

Corollaire 18 – Preuve de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_q)$

Soient $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ et $(v_1, v_2, \dots, v_q)$ deux familles de vecteurs de $\mathbb{E}$. On suppose que

(i) $u_1, u_2, \dots, u_p$ sont combinaisons linéaires de $v_1, v_2, \dots, v_q$

(ii) $v_1, v_2, \dots, v_q$ sont combinaisons linéaires de $u_1, u_2, \dots, u_p$

Alors $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_q)$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\mathrm{Vect}\big((1,0,1);(0,1,0)\big) = \mathrm{Vect}\big((1,1,1);(-1,1,-1),(0,1,0)\big)$.

Dans le corollaire suivant, $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

Corollaire 19 – Règles de calcul sur les Vect

1. Si u_{p+1} est combinaison linéaire de la famille $(u_1, \dots, u_p)$, alors on peut « l'enlever » :
$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$
2. On peut additionner à un vecteur d'une famille toute CL des autres vecteurs :
$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^{p-1}, \quad \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_p) = \mathrm{Vect}\left(u_1, \dots, u_{p-1}, u_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i . u_i\right)$$
3. On peut multiplier un vecteur par un scalaire non nul :
$$\forall \alpha \in \mathbb{K}^*, \quad \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, \alpha . u_p)$$
4. $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ ne dépend pas de l'ordre des vecteurs :
$$\forall \sigma : [\![1, p]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!] \text{ bijective}, \quad \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)})$$
5. On peut « enlever le vecteur nul d'un Vect » :
$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p, 0_E) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$

Important. Les points 1., 2. et 3. ont été écrits pour le dernier vecteur de la famille. En les combinant avec le point 4., on peut les écrire pour n'importe quel autre vecteur.

2.3 Familles génératrices

On rappelle que $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$.

Définition 20 – Famille génératrice

On dit que $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une *famille génératrice* de $\mathbb{E}$, ou que $\mathbb{E}$ est *engendré* par $\mathscr{F}(u_1, \dots, u_p)$, lorsque :

$$\mathbb{E} = \text{Vect}(\mathscr{F}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$

Comme $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$, on a toujours $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \subseteq \mathbb{E}$. Donc $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de $\mathbb{E}$ si, et seulement si, $\mathbb{E} \subseteq \text{Vect}((u_1, \dots, u_p))$, ie ssi tout vecteur $x \in \mathbb{E}$ est CL des vecteurs u_1, ..., u_p.

Rédaction. *On suppose que $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.*
Pour montrer que la famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de $\mathbb{E}$, on se fixe un vecteur $x \in \mathbb{E}$, et on cherche des scalaires λ_1, ..., λ_p, tels que :

$$x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . u_k$$

En considérant cette égalité comme une équation d'inconnue $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, on doit montrer qu'il existe au moins une solution.

✎ ***Exemple.*** La famille $\big((1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\big)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{F} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y = z\big\}$ est engendré par $\big((1,0,1),(0,1,2)\big)$.

✎ ***Exemple.*** Pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille $\big(1, X - a, (X - a)^2, (X - a)^3\big)$ est génératrice de $\mathbb{K}_3[X]$.

✎ ***Exemple.*** En général une famille génératrice vide est génratrice de $\{0_E\}$.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Famille génératrice de } \mathbb{K}^n}$ On a vu au paragraphe 2.2. que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$, avec $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{i−ième position}}}{1}, 0, \dots, 0)$, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Famille génératrice de } \mathbb{K}_n[X]}$ On a vu au paragraphe 2.2. que la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Famille génératrice de } \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ On a vu au paragraphe 2.2. que la famille $(E_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Théorème 21 – Sur-famille d'une famille génératrice

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux familles finies de vecteurs de $\mathbb{E}$. On suppose que :
(i) $\mathscr{F}$ sous-famille de $\mathscr{G}$;
(ii) $\mathscr{F}$ est génératrice de $\mathbb{E}$.
Alors $\mathscr{G}$ est aussi une famille génératrice de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y = z\}$ est aussi engendré par $\big((1,0,1),(0,1,2),(1,1,3)\big)$.

Ainsi, si on ajoute des vecteurs de $\mathbb{E}$ dans une famille génératrice de $\mathbb{E}$, on obtient encore une famille génératrice de $\mathbb{E}$.

En pratique ce résultat n'a que très peu d'intérêt. En effet, on préférera avoir des familles génératrices de taille minimale (nous verrons pourquoi dans un autre chapitre). Pour cela on utilisera le théorème suivant.

Théorème 22 – Principe de réduction d'une famille génératrice

Si $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_{p-1}, u_p)$ est génératrice de $\mathbb{E}$, et si u_p est CL de la famille $\widetilde{\mathscr{F}} = (u_1, \dots, u_{p-1})$, alors $\widetilde{\mathscr{F}}$ est encore génératrice de $\mathbb{E}$.

On peut donc retenir que dans une famille génératrice de $\mathbb{E}$, si un vecteur est CL des autres, alors on peut l'ôter de la famille tout en gardant une famille génératrice de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** Si $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\big((1,0),(1,-1),(0,1)\big)$ alors $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\big((1,0),(0,1)\big)$.

2.4 Familles libres

On rappelle que $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$.

Définition 23 – Famille libre

On dit que $\mathscr{F}$ est une famille *libre* de vecteurs, ou que les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont *linéairement indépendants*, lorsque la seule CL nulle est celle dont tous les coefficients sont nuls :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . u_k = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille de vecteurs $\mathscr{F}$ est *liée*, ou que les vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ sont *linéairement dépendants*. C'est le cas où il exsite une CL nulle dont les coefficients sont non tous nuls :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p;\ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . u_k = 0_E \text{ et } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$$

On adoptera la convention que $\emptyset$ est une famille libre de tout $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.

On peut remarquer que le caractère libre d'une famille de vecteurs $\mathscr{F}$, ne dépend du choix du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$. Par conséquent si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{F}$ où $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$, alors :

$$\mathscr{F} \text{ est libre dans } \mathbb{F} \text{ si, et seulement, si elle est libre dans } \mathbb{E}$$

⚠ Ceci est faux pour la notion de famille génératrice qui est intrinsèquement liée à l'espace vectoriel dans lequel on travaille.

Rédaction. *Pour montrer que $\mathscr{F}$ est libre, on se fixe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, tels que :*

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . u_k = 0_E$$

En considérant cette égalité comme une équation d'inconnue $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, on doit montrer qu'elle a une unique solution.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^2$, $\big((1,2),(1,3)\big)$ est libre et $\big((1,0),(1,1),(0,2)\big)$ est liée.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Dans } \mathbb{K}^n}$ La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, avec $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{i-ième position}}}{1}, 0, \dots, 0)$, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Dans } \mathbb{K}_n[X]}$ La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est libre.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Dans } \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ La famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est libre.

Théorème 24 – Famille libre à un vecteur

Soit u un vecteur de $\mathbb{E}$. Alors :

$$(u) \text{ est une famille libre } \iff u \neq 0_E$$

Théorème 25 – Famille libre à deux vecteurs

Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors :

$$(u, v) \text{ est libre } \iff u \text{ et } v \text{ non colinéaires}$$

⚠ Ce critère est faux dès qu'on a plus de deux vecteurs. Par exemple pour trois vecteurs, le critère devient non coplanaires.

✎ ***Exemple.*** Il devient évident que $\big((1,2),(1,3)\big)$ est libre.

Théorème 26 – Caractérisation des familles liées

On a équivalence de :

(i) la famille de vecteurs $\mathscr{F}$ est liée ;

(ii) un des vecteurs de la famille de vecteurs $\mathscr{F}$ est CL des $(p-1)$ autres vecteurs.

✎ ***Exemple.*** Il devient évident que $\big((1,0),(1,1),(0,2)\big)$ est liée.

✎ ***Exemple.*** Toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.

✎ ***Exemple.*** Toute famille de vecteurs contenant deux vecteurs identiques est liée.

✎ ***Exemple.*** Si $(u,v)\in\mathbb{E}^2$, alors la famille $(u,v,u+v)$ est liée.

Théorème 27 – Sous-famille d'une famille libre

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux familles finies de vecteurs de $\mathbb{E}$. On suppose que :

(i) $\mathscr{F}$ sous-famille de $\mathscr{G}$;

(ii) $\mathscr{G}$ est libre.

Alors la famille $\mathscr{F}$ est libre.

✎ ***Exemple.*** $\big((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\big)$ est libre.

On peut donc retenir qu'en enlevant des vecteurs dans une famille libre on obtient encore une famille libre ; par contraposée, toute sur-famille d'une famille liée est liée ie que si on ajoute des vecteurs à une famille liée alors elle reste liée.

En pratique ce résultat n'a que très peu d'intérêt. En effet, on préférera avoir des familles libres de taille maximale (nous verrons pourquoi dans un autre chapitre). Pour cela on utilisera le théorème suivant.

Théorème 28 – Principe d'extension d'une famille libre

Si $\mathscr{F}=(u_1,\dots,u_p)$ est libre, alors :

$$(u_1,\dots,u_p,u_{p+1}) \text{ est libre} \iff u_{p+1}\notin \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$$

Donc par contraposée :

$$(u_1,\dots,u_p,u_{p+1}) \text{ est liée} \iff u_{p+1}\in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p) \iff u_{p+1} \text{ est CL de } (u_1,\dots,u_p)$$

On peut donc retenir que si on a au départ une famille libre de vecteurs, et si on veut lui ajouter un nouveau vecteur de telle sorte que la nouvelle famille soit encore libre, alors il faut et il suffit que ce vecteur ne soit pas CL des vecteurs de la famille initiale.

✎ ***Exemple.*** Former une famille libre à trois vecteurs à partir de $\big((1,2,0),(2,1,0)\big)$.

2.5 Bases

Dans ce paragraphe, la famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ est notée $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$.

Définition 29 – Base d'un K-ev

On dit que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{E}$ lorsque $\mathscr{B}$ est à la fois libre et génératrice de $\mathbb{E}$.

Proposition 30 – Base de $\mathrm{Vect}(\mathscr{B})$

Si $\mathscr{B}$ est une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$, alors :

$$\mathscr{B} \text{ base de } \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) \Longleftrightarrow \mathscr{B} \text{ est libre}$$

✎ ***Exemple.*** $\mathscr{B} = \Big((1,0,1),(0,1,2)\Big)$ est une base de $\mathbb{F} = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y = z\Big\}$.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Base canonique de } \mathbb{K}^n}$ On pose $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, avec $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{i-ième position}}}{1}, 0, \dots, 0)$, pour $i \in [\![1, n]\!]$. On a vu au paragraphe 2.3. que $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$, et au paragraphe 2.4. qu'elle est libre. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Base canonique de } \mathbb{K}_n[X]}$ On pose $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. On a vu au paragraphe 2.3. que $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, et au paragraphe 2.4. qu'elle est libre. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}_n[X]$.

✎ ***Exemple.*** $\boxed{\text{Base canonique de } \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ On pose $\mathscr{B} = (E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. On a vu au paragraphe 2.3. que $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et au paragraphe 2.4. qu'elle est libre. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée *base canonique* de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

IMPORTANT : Extraction d'une base du sev $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ **à partir de la famille** $\mathscr{F}$**.**
- Si $\mathscr{F}$ est libre alors $\mathscr{F}$ est la base cherchée.
- Si $\mathscr{F}$ est liée alors un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres. En l'enlevant de la famille on obtient une famille $\mathscr{F}'$ qui est encore génératrice de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ d'après le principe de réduction.
- On recommence le raisonnement avec $\mathscr{F}'$...
- Cet algorithme termine car la famille est finie et on ne peut donc pas lui enlever une infinité de vecteurs.

✎ ***Exemple.*** Donner une base de $\mathrm{Vect}\big((1,2,3,4),(2,3,4,5),(1,1,1,1)\big)$.

Théorème 31 – Caractérisation des bases

Soit $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors on a équivalence de :

(i) $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{E}$;

(ii) pour tout $x \in \mathbb{E}$, $\exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\varepsilon_k$.

Le théorème précédent donne que tout $x \in \mathbb{E}$ est caractérisé par l'unique p-liste $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\varepsilon_k$.

Définition 32 – Coordonnées dans une base

Les scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ sont appelés coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. On le note :

$$x = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^{\mathscr{B}}$$

✎ ***Exemple.*** Coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$

Elles sont égales aux composantes du vecteur. Par exemple, si $x = (2,1,3)$, alors ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont $(2,1,3)$.

✎ ***Exemple.*** Coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$

Elles sont égales aux coefficients de la fonction polynômes. Par exemple, $P = X^2 + 2X + 1$ a pour coordonnées $(1,2,1)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

✎ ***Exemple.*** Coordonnées dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Elles sont égales aux coefficients de la matrice. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(1,-1,1,2,0,1)$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_{23}(\mathbb{R})$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y = z\}$. Une base de $\mathbb{F}$ est $\mathscr{B} = \big((1,0,1),(0,1,2)\big)$. Par exemple : $x = (1,1,3) = (1,1)^{\mathscr{B}}$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $\big(1, X-1, (X-1)^2\big)$, quelles sont les coordonnées de $P = X^2 + 2X + 1$?

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{E}$ muni d'une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$, quelles sont les coordonnées de ε_k, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$?

Pour deux vecteurs le critère de liberté est très simple.

Théorème 33 – Liberté d'une famille deux vecteurs

Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{E}$.
La famille (u, v) est libre si, et seulement si, les coordonnées de u et v dans la base $\mathscr{B}$ sont non proportionnelles.

On donne ensuite un critère simple de liberté pour une famille de vecteurs, à partir de ses coordonnées dans une base de $\mathbb{E}$.

Définition 34 – Famille de vecteurs de coordonnées échelonnés

Soit $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $\mathbb{E}$ et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{E}$.
On lui associe la matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont chaque colonne est respectivement formée des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$.
On dit que $\mathscr{F}$ est de *coordonnées échelonnées dans la base* $\mathscr{B}$ lorsque la matrice A est échelonnée.

✎ ***Exemple.*** La famille de vecteurs $\big((0,0,0,0),(1,0,0,0),(1,-1,1,0),(1,1,-1,-1)\big)$ est de coordonnées échelonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

✎ ***Exemple.*** La famille de vecteurs $\big((0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,1,-1,1),(1,1,-1,-1)\big)$ est de coordonnées échelonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Théorème 35 – Liberté d'une famille de vecteurs de coordonnées échelonnés

Si $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille de vecteurs non nuls et de coordonnées échelonnées dans la base $\mathscr{B}$ alors $\mathscr{F}$ est une famille libre.

✎ ***Exemple.*** La famille de vecteurs $\big((0,0,0,1),(0,1,-1,1),(1,1,-1,-1)\big)$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.

⚠ La famille de vecteurs $\big((0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,1,-1,1),(1,1,-1,-1)\big)$ est de coordonnées échelonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ mais n'est pas libre.

Définition 36 – Famille de polynômes de degrés echelonnés

Une famille de polynômes $(P_0, \dots, P_n)$ est de *degrés echelonnés* lorsque :

$$\deg(P_0) < \deg(P_1) < \cdots < \deg(P_n)$$

Corollaire 37 – Liberté d'une famille de polynômes de degrés echelonnés

Une famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes non nuls et de degrés echelonnés est libre.

✎ ***Exemple.*** La famille $(1+X, X^2-1, X^3+X^2+1)$ est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$.

✎ ***Exemple.*** La famille $\left((1+X)^{k+1}-X^{k+1}\right)_{0\leq k\leq n}$ est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$.

⚠ Dans $\mathbb{R}_n[X]$ les familles libres ne sont pas toujours de degrés echelonnés.

✎ ***Exemple.*** La famille $\left(X^2, X(1-X), (1-X)^2\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de polynômes de même degré.

3 Sommes de sous-espaces vectoriels

3.1 Sommes de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$

On considère deux parties de $\mathbb{E}$ notés $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$.

Définition 38 – Somme de parties de $\mathbb{E}$

On appelle *somme* de $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ la partie de $\mathbb{E}$ suivante :

$$\mathbb{F}+\mathbb{G} = \left\{x = u_1+u_2 ;\ u_1 \in \mathbb{F} \text{ et } u_2 \in \mathbb{G}\right\}$$

On a donc $x \in \mathbb{F}+\mathbb{G}$ si, et seulement si, il existe $(u_1, u_2) \in \mathbb{F}\times\mathbb{G}$ tel que $x = u_1+u_2$.

⚠ En général, il n'y pas unicité des vecteurs u_1 et u_2 tels que $x = u_1+u_2$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathbb{F}_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x+y-z = 0\right\}$ et $\mathbb{F}_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ z = 0\right\}$. Alors $(1,1,1) = \underbrace{(0,1,1)}_{\in\mathbb{F}_1} + \underbrace{(1,0,0)}_{\in\mathbb{F}_2} = \underbrace{(1,0,1)}_{\in\mathbb{F}_1} + \underbrace{(0,1,0)}_{\in\mathbb{F}_2}$.

Dans la suite, lorsqu'on écrira $x = u_1+u_2$ avec $(u_1, u_2) \in \mathbb{F}\times\mathbb{G}$, on dira qu'on a écrit *une décomposition de x dans la somme* $\mathbb{F}+\mathbb{G}$.

On a les cas particuliers suivants.

Proposition 39 – Cas triviaux

On a $\mathbb{E}+\mathbb{E} = \mathbb{E}$, $\mathbb{E}+\{0_E\} = \{0_E\}+\mathbb{E} = \mathbb{E}$ et $\{0_E\}+\{0_E\} = \{0_E\}$.

Dans le théorème suivant on suppose que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev de $\mathbb{E}$.

Théorème 40 – Propriétés d'une somme de sev

On a :

1. $\mathbb{F}+\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$, contenant $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$;
2. c'est le plus petit sev de $\mathbb{E}$ contenant $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$.

Autrement dit, on a $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}+\mathbb{G}$ et $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{F}+\mathbb{G}$; et si $\mathbb{H}$ est un sev de $\mathbb{E}$ vérifant $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{H}$ et $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{H}$, alors $\mathbb{F}+\mathbb{G} \subseteq \mathbb{H}$.

On se donne deux familles finies de vecteurs de $\mathbb{E}$, notées $\mathscr{F} = (u_1,\dots,u_p)$ et $\mathscr{G} = (v_1,\dots,v_q)$. La famille $(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q)$ est appelée *famille obtenue par concaténation* des familles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.

Théorème 41 – Famille génératrice d'une somme de sev

On a :
$$\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)+\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_q) = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q)$$

Autrement dit, si $\mathscr{F}$ une famille génératrice d'un sev $\mathbb{F}$ et si $\mathscr{G}$ une famille génératrice d'un sev $\mathbb{G}$, alors la famille obtenue par concaténation de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de $\mathbb{F}+\mathbb{G}$.

⚠ Ce résultat est faux avec des familles libres : la concaténation de deux familles libres ne donne pas une famille libre en général.

✎ ***Exemple.*** Les familles $\big((\underbrace{1,0,1}_{=u_1});(\underbrace{0,1,1}_{=u_2})\big)$ et $\big((\underbrace{1,0,0}_{=u_3});(\underbrace{0,1,0}_{=u_4})\big)$ sont libres, mais la famille $\big(u_1,u_2,u_3,u_4\big)$ ne l'est plus car : $u_1-u_2 = u_3-u_4$

⚠ On ne dispose pas de formule pour $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)\cap\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_q)$.
Par exemple si $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\big((-1,0,1),(-1,1,0)\big) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y+z = 0\big\}$ et $\mathbb{G} = \mathrm{Vect}\big((2,1,0),(2,0,1)\big) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-2y-2z = 0\big\}$, alors le le fait que $\mathscr{F}\cap\mathscr{G} = \varnothing$ ne donne aucune information sur $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}$.

3.2 Sommes directes de sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev de $\mathbb{E}$.

Définition 42 – Somme directe de deux sev

On dit que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont en *somme directe*, ou que la *somme* $\mathbb{F}+\mathbb{G}$ *est directe*, lorsque :
$$\mathbb{F}\cap\mathbb{G} = \{0_E\}$$

Dans ce cas $\mathbb{F}+\mathbb{G}$ est notée $\mathbb{F}\oplus\mathbb{G}$.

Théorème 43 – Première caractérisation d'une somme directe

On a équivalence de :

(i) $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont en somme directe ;

(ii) $\forall x \in \mathbb{F}+\mathbb{G}, \exists!(f,g) \in \mathbb{F}\times\mathbb{G};\ x = f+g$

.

Autrement dit : $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont en somme directe si, et seulement si, tout vecteur de $\mathbb{F}+\mathbb{G}$ a une unique décomposition dans la somme $\mathbb{F}+\mathbb{G}$.

Corollaire 44 – Famille libre d'une somme directe

Si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont en somme directe, alors la concaténation d'une famille libre de $\mathbb{F}$ et d'une famille libre de $\mathbb{G}$ donne une famille libre de $\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

On rappelle que ce résultat est faux avec deux familles libres quelconques.

Corollaire 45 – Seconde caractérisation d'une somme directe

On a équivalence de :

(i) $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont en somme directe;

(ii) la concaténation d'une base de $\mathbb{F}$ et d'une base de $\mathbb{G}$ donne une base de $\mathbb{F} + \mathbb{G}$.

Ce résultat est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$.

On verra, tout au long de l'année, qu'il est fréquent dans les résultats d'algèbre linéaire, qu'une propriété vraie sur un cas particulier, s'étende automatiquement au cas général (ici : si la propriété est vraie pour *une* base de $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$, elle est alors vraie pour *toutes* les bases de $\mathbb{F}$ et de $\mathbb{G}$).

Définition 46 – Sous-espaces vectoriels supplémentaires

On dit que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont *supplémentaires* dans $\mathbb{E}$ lorsque $\mathbb{F} \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$.

⚠ Ne pas confondre avec la notion de *complémentaire* (qui ne donne pas un sev).
Lorsque $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ et $x \in \mathbb{E}$, on ne peut pas raisonner par disjonction des cas en disant que $x \in \mathbb{F}$ ou $x \in \mathbb{G}$.
On peut seulement dire que $x = f + g$ avec $f \in \mathbb{F}$ et $g \in \mathbb{G}$ uniques.

Théorème 47 – Caractérisations des sous-espaces vectoriels supplémentaires

On a équivalence de :

(i) $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$: $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$;

(ii) $\mathbb{F} + \mathbb{G} = \mathbb{E}$ et $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{0_E\}$;

(iii) la concaténation d'une base de $\mathbb{F}$ et d'une base de $\mathbb{G}$ donne une base de $\mathbb{E}$;

(iv) $\forall x \in \mathbb{E}, \exists!(f,g) \in \mathbb{F} \times \mathbb{G};\ x = f + g$

Dans ce cas la concaténation de n'importe quelle base de $\mathbb{F}$, avec n'importe quelle base de $\mathbb{G}$ donne une base de $\mathbb{E}$.

Lorsque $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ et qu'une base de $\mathbb{E}$ est obtenue par concaténation d'une base de $\mathbb{F}$ et d'une base de $\mathbb{G}$, on dit qu'on a une *base de* $\mathbb{E}$ *adaptée à la somme directe* $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

Le point (iv) permet d'interpréter deux sev supplémentaires dans $\mathbb{E}$ comme deux « axes » sur lesquels on peut décomposer les vecteurs de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\big((1,0)\big) \oplus \mathrm{Vect}\big((0,1)\big)$, donc $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\big((1,0)\big)$ et $\mathbb{G} = \mathrm{Vect}\big((0,1)\big]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Rédaction. *Dans la majorité des cas, on utilise le point (iv) pour montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$.*

On a donc deux choses à démontrer : l'existence et l'unicité de la décomposition de tout vecteur de $\mathbb{E}$. Il est plus facile commencer par vérifier l'unicité de la décomposition (si elle existe), puis de vérifier l'existence d'au moins une décomposition (en en donnant un exemple).
On rédige cette démonstration par **analyse-synthèse** *:*

• *On montre que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont deux sev de $\mathbb{E}$. On a donc $\mathbb{F}+\mathbb{G} \subseteq \mathbb{E}$.*

• *On se donne $x \in \mathbb{E}$ fixé quelconque.*

• **ANALYSE :** *on suppose qu'on a trouvé au moins une décomposition de x : $x = f + g$, avec $f \in \mathbb{F}$ et $g \in \mathbb{G}$.*
$\hookrightarrow$ *On veut montrer que cette décomposition est unique; pour cela on cherche à calculer f et g en fonction de x.*
À ce stade, on a montré que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont en somme directe; donc $\mathbb{F}+\mathbb{G} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

• **SYNTHESE :**
$\hookrightarrow$ *On veut montrer que x a au moins une décomposition; pour cela on utilise les formules obtenues dans la partie analyse.*
On définit donc f et g en fonction de x, à partir des formules obtenues dans la partie analyse. Il reste à vérifier que ceci donne bien une décomposition de x dans $\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$, c'est-à-dire trois points : (i) $f \in \mathbb{F}$; (ii) $g \in \mathbb{G}$ et (iii) $f + g = x$.
On alors montré que $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}+\mathbb{G}$.

Donc par double-inclusion : $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonction paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sev supplémentaires.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$.

⚠ La synthèse paraît n'être qu'une simple vérification, mais elle est indispensable dans le raisonnement, il ne faut donc pas la négliger.

✎ ***Exemple.*** Les parties de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par $\mathbb{F} = \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = a_{n+1} + a_{n+2}\big\}$ et $\mathbb{G} = \big\{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} + b_{n+2} = 0\big\}$ forment-elles des sev supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Corollaire 48 – Base scindée en deux

Si $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n)$ base de vecteurs de $\mathbb{E}$ alors :

$$\mathbb{E} = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) \oplus \mathrm{Vect}(e_{k+1},\dots,e_n)$$

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\big((1,0)\big) \oplus \mathrm{Vect}\big((0,1)\big)$ et $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big) \oplus \mathrm{Vect}\big((0,0,1)\big)$.

4 Compétences à acquérir sur ce chapitre

➥ Savoir montrer qu'une partie $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

- ✪ Connaître les espaces vectoriels de référence : K^n, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{E}^A$ (où $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev).
- ✪ Vérifier que $\mathbb{F}$ est non vide et stable par combinaison linéaire : $\forall(\lambda,u,v)\in\mathbb{K}\times\mathbb{F}^2$, $\lambda.u+v\in\mathbb{F}$.
- ✪ Montrer que $\mathbb{F}$ est l'intersection de sous-espaces vectoriels.
- ✪ Montrer que $\mathbb{F}$ est égal à l'espace engendré par une famille de vecteurs.

➥ Savoir montrer qu'une famille de vecteurs $(e_1,\dots,e_p)$ est génératrice d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$.

- ✪ Montrer que les vecteurs e_1, …, e_p appartiennent à $\mathbb{E}$ (ce qui donne $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)\subseteq\mathbb{E}$) puis que $\mathbb{E}\subseteq\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$.
- ✪ Montrer que tout vecteur de $\mathbb{F}$ est combinaison linéaire des vecteurs $e_1,\dots,e_p$: pour tout $u\in\mathbb{E}$, l'équation $u=\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k.e_k$ a au moins une solution $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p$.
- ✪ Montrer que $(e_1,\dots,e_p)$ a été obtenu avec le principe de réduction d'une famille génératrice de $\mathbb{F}$.

➥ Savoir montrer qu'une famille de vecteurs $(e_1,\dots,e_p)$ est libre.

- ✪ Pour une famille à deux vecteurs (e_1,e_2) il faut et il suffit de montrer que e_1 et e_2 sont non colinéaires.
- ✪ Montrer que l'équation $\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k.e_k=0_{\mathbb{E}}$ a pour unique solution $\lambda_1=\cdots=\lambda_p=0$.
- ✪ Montrer que $(e_1,\dots,e_p)$ a été obtenu avec le principe d'extension d'une famille libre.
- ✪ Montrer que $(e_1,\dots,e_p)$ est une famille de vecteurs de coordonnées échelonnées ou une famille de polynômes de degrés échelonnés.

➥ Savoir montrer qu'une famille de vecteurs $(e_1,\dots,e_p)$ est une base d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$.

- ✪ Montrer qu'elle est à la fois libre et génératrice de $\mathbb{E}$.
- ✪ Montrer que tout vecteur de $\mathbb{F}$ est combinaison linéaire unique des vecteurs $e_1,\dots,e_p$: pour tout $u\in\mathbb{E}$, l'équation $u=\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k.e_k$ a une unique solution $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p$.

➥ Savoir montrer que deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont en somme directe.

- ✪ Vérifier que $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}=\{0_{\mathbb{E}}\}$.
- ✪ Vérifier que tout vecteur de $\mathbb{F}+\mathbb{G}$ a une unique décomposition.
- ✪ Vérifier que la concaténation d'une base de $\mathbb{F}$ avec une base de $\mathbb{G}$ donne une base de $\mathbb{F}+\mathbb{G}$.

- Savoir montrer que deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$.
  - Vérifier que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ tels que $\mathbb{E} = \mathbb{F} + \mathbb{G}$ et $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{0_{\mathbb{E}}\}$.
  - Vérifier que tout vecteur de $\mathbb{E}$ a une unique décomposition dans $\mathbb{F} + \mathbb{G}$, en raisonnant par analyse-synthèse.
  - Vérifier que la concaténation d'une base de $\mathbb{F}$ avec une base de $\mathbb{G}$ donne une base de $\mathbb{E}$.

5 Exercices

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

EXERCICE 1. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Dans chacun des cas suivants, justifier si la partie considérée est un sous-espace vectoriel.

$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 = 0\right\}$ $\qquad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 0\right\}$

$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x - y = 0\right\}$ $\qquad D = \left\{(a+b, a-b, a);\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

$E = \{(1+x, x);\ x \in \mathbb{R}\}$ $\qquad F = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

EXERCICE 2. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$

On note $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ l'ensemble des fonctions numériques. Déterminer si les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$:

$A = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} ;\ f \text{ continue}\right\}$ $\qquad B = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} ;\ f \text{ paire}\right\}$

$C = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} ;\ f \text{ impaire}\right\}$ $\qquad D = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} ;\ f \text{ s'annule}\right\}$

EXERCICE 3. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$

On note $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Les parties suivantes sont-elles de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$?

$A = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} ;\ (u_n) \text{ bornée}\right\}$ $\qquad B = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} ;\ (u_n) \text{ monotone}\right\}$

$C = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} ;\ (u_n) \text{ convergente}\right\}$ $\qquad D = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} ;\ (u_n) \text{ arithmétique}\right\}$

$$E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} ;\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + \frac{1}{n+1} u_n\right\}$$

EXERCICE 4. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Les parties suivantes sont-elles de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$?

$A = \left\{P \in \mathbb{K}[X] ;\ 0 \text{ est racine de } P\right\}$

$B = \left\{P \in \mathbb{K}[X] ;\ 0 \text{ est racine double de } P\right\}$

$C = \left\{P \in \mathbb{K}[X] ;\ 0 \text{ est racine au moins d'ordre 2 de } P\right\}$

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé : $D = \left\{P \in \mathbb{K}[X];\ \deg(P) = n\right\}$

EXERCICE 5. Sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

1. Montrer que la partie $\mathbb{E} = \left\{\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & -a-b \end{pmatrix} ;\ (a, b) \in \mathbb{K}^2\right\}$ est un sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
2. La partie $\mathbb{F} = \left\{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) ;\ A^3 = 0_3\right\}$ est-elle un sev de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
   On pourra considérer $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Familles libres, familles génératrices bases

EXERCICE 6. Familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Les familles suivantes sont-elles libres (si non, on donnera une combinaison linéaire nulle, dont les coefficients sont non tous nuls) ?

$\mathscr{F}_1 = \big((2,4,3),(1,5,7)\big)$

$\mathscr{F}_2 = \big((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)\big)$

$\mathscr{F}_3 = \big((1,1,0),(2,1,0),(0,1,1)\big)$

$\mathscr{F}_4 = \big((1,1,0),(2,0,0),(1,1,1)\big)$

EXERCICE 7. Familles libres/liées

Les famille suivantes sont-elles des familles libres de l'espace vectoriel indiqué ?

1. $\mathscr{F} = \big((X-1)^2,(X-2)^2,(X-3)^2\big)$ dans $\mathbb{R}[X]$
2. $\mathscr{F} = \big(X^2+1,2X,2X^2+X\big)$ dans $\mathbb{R}[X]$
3. $\mathscr{F} = \big(X+1,2,2X^2+X\big)$ dans $\mathbb{R}[X]$
4. $\mathscr{F} = \big(X^2+1,2X,(X+1)^2\big)$ dans $\mathbb{R}[X]$
5. $\mathscr{F} = \big(x \mapsto \cos(x), x \mapsto x\cos(x), x \mapsto \sin(x), x \mapsto x\sin(x)\big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
6. $\mathscr{F} = \big(x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \cos^2(x), x \mapsto 1\big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
7. $\mathscr{F} = \big((2^n)_{n\in\mathbb{N}},(2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}},(2^{n+2})_{n\in\mathbb{N}}\big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
8. $\mathscr{F} = \big((2^n)_{n\in\mathbb{N}},(3^n)_{n\in\mathbb{N}},(n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
9. $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$
10. $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right)$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

EXERCICE 8. Sev de $\mathbb{K}^n$ définis par une ou plusieurs équation(s) cartésiennes(s).

Montrer que les parties suivantes sont des sev de $\mathbb{K}^n$ et en donner une base :

1. $\mathbb{E} = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\ x-y+z=0 \text{ et } y-2z=0\big\}$
2. $\mathbb{E} = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\ x+y+z=0 \text{ et } 2x-y=0\big\}$
3. $\mathbb{E} = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\ x+y+z=0\big\}$
4. $\mathbb{E} = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\ x-y+2z=0\big\}$
5. $\mathbb{E} = \big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ x-y+z=0 \text{ et } y-2t=0\big\}$
6. $\mathbb{E} = \big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ x-y+z+t=x-y-z+2t=x-y+2z+2t=0\big\}$
7. $\mathbb{E} = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\,;\ x-y+iz=0 \text{ et } iy-2z=0\big\}$
8. $\mathbb{E} = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\,;\ x+iy+(1-i)z=0\big\}$

EXERCICE 9. Sev de $\mathbb{K}^n$ définis par une famille génératrice.

Montrer que les parties suivantes sont des sev de $\mathbb{K}^n$ puis donner une base et un système d'équation(s) cartésienne(s) :

1. $\mathbb{E} = \{(2a-3b+c, a+2b-c, -b+c, a);\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.
2. $\mathbb{E} = \{(a-b, a+b+2c, -2a-b-3c);\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. $\mathbb{E} = \text{Vect}\big((1,2,-1,0),(0,1,3,-1)\big)$
4. $\mathbb{E} = \text{Vect}\big((2,-1,0),(1,3,-1),(1,-4,1)\big)$

EXERCICE 10. Familles génératrices - Bases

Donner une famille génératrice puis une base des espaces vectoriels suivants :

1. $\mathbb{E} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n;\ x_1 + x_n = 0\}$
2. $\mathbb{E} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n;\ x_2 = x_3 = \cdots = x_{n-1} = 0\}$
3. $\mathbb{E} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n\}$
4. $\mathbb{E} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$
5. $\mathbb{E} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n\}$
6. $\mathbb{E} = \{aX^2 + a;\ a \in \mathbb{K}\}$
7. $\mathbb{E} = \{aX^4 + (a+b)X;\ (a,b) \in \mathbb{K}^2\}$
8. $\mathbb{E} = \{(a-c)X^3 + (a+b)X^2 + cX + 4a - 3b;\ (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\}$
9. $\mathbb{E} = \{P \in \mathbb{K}_3[X];\ 0 \text{ est racine de } P\}$
10. $\mathbb{E} = S_2(\mathbb{K})$
11. $\mathbb{E} = A_2(\mathbb{K})$

EXERCICE 11. Opération sur une famille libre

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{E}$.

1. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note $\varepsilon_k = e_k + e_{k+1}$.
   Montrer que la famille $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1})$ est libre.
2. On pose aussi $\varepsilon_n = e_1 + e_n$.
   La famille $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n)$ est-elle libre ?

Sommes directes et sous-espaces supplémentaires

EXERCICE 12. Supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$

Soient $\mathbb{E} = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n;\ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$ et $\mathbb{F} = \{(\lambda,\lambda,\dots,\lambda);\ \lambda \in \mathbb{K}\}$. Montrer que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.

EXERCICE 13. Sommes de sev dans $\mathbb{K}[X]$

1. Donner un supplémentaire de $\mathbb{F} = \left\{aX^4 + (a+b)X;\ (a,b) \in \mathbb{K}^2\right\}$ dans $\mathbb{K}_5[X]$.
2. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant.
   Donner un supplémentaire de $\mathbb{F} = \left\{P \in \mathbb{E};\ Q \text{ divise } P\right\}$ dans $\mathbb{K}[X]$.
3. On pose $\mathbb{F} = \left\{P \in \mathbb{K}[X];\ X \text{ divise } P\right\}$ et $\mathbb{G} = \left\{P \in \mathbb{K}[X];\ (X-1) \text{ divise } P\right\}$.
   En remarquant que $1 = X - (X-1)$, vérifier que $\mathbb{K}[X] = \mathbb{F} + \mathbb{G}$. La somme est-elle directe ?

EXERCICE 14. Supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions numériques.
Soient $\mathbb{E} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}};\ f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi)\right\}$ et $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\big(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x)\big)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Vérifier que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$.