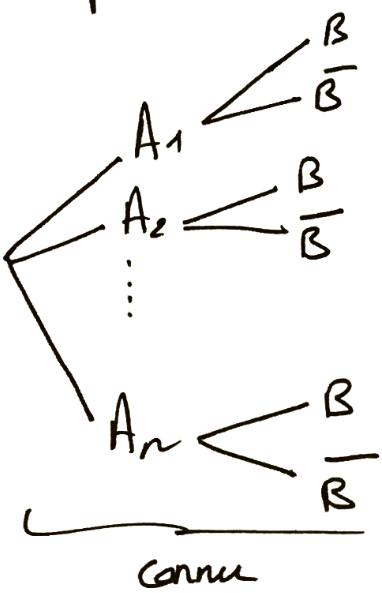
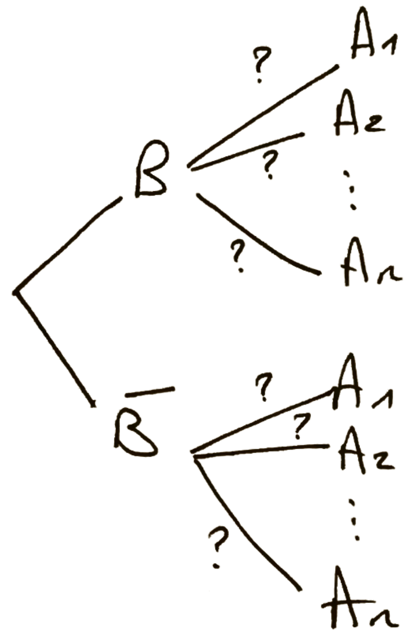
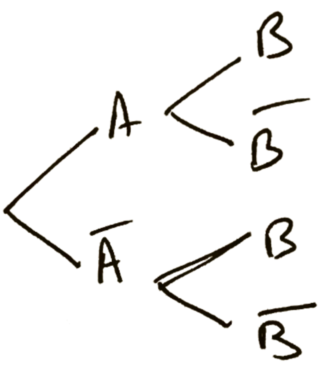
L'idée est d'inverser le sens de l'arbre.
On passe de l'arbre de gauche à celui de droite :

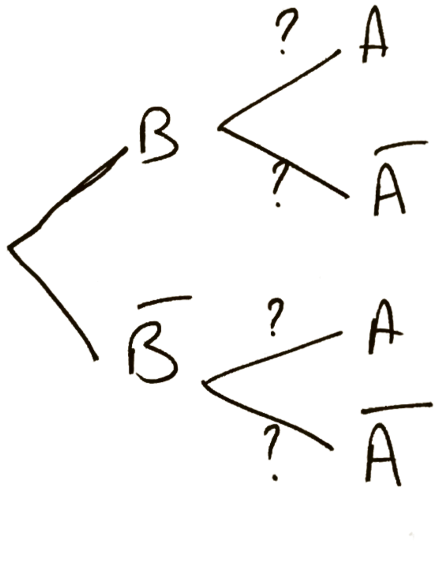




Si on choisit un sce du type $(A, \overline{A})$ on retrouve la formule de terminale qui permet de passer de



à



dém de la formule de Bayes :

On fixe $i \in I$. ⚠ dans les sommes on ne pourra pas noter i les variables muettes

On a $\mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$

et comme $A_i \cap B = B \cap A_i$ on a aussi :

$$\mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A_i)$$

On a donc $\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A_i)$

et donc $\boxed{\mathbb{P}_B(A_i) = \dfrac{\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}{\mathbb{P}(B)}}$

Comme $(A_1, \dots, A_n)$ est un sce la formule des probabilités totales donne : $\mathbb{P}(B) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}_{A_j}(B)$

On obtient : $\boxed{\mathbb{P}_B(A_i) = \dfrac{\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}_{A_j}(B)}}$

Test d'une maladie rare

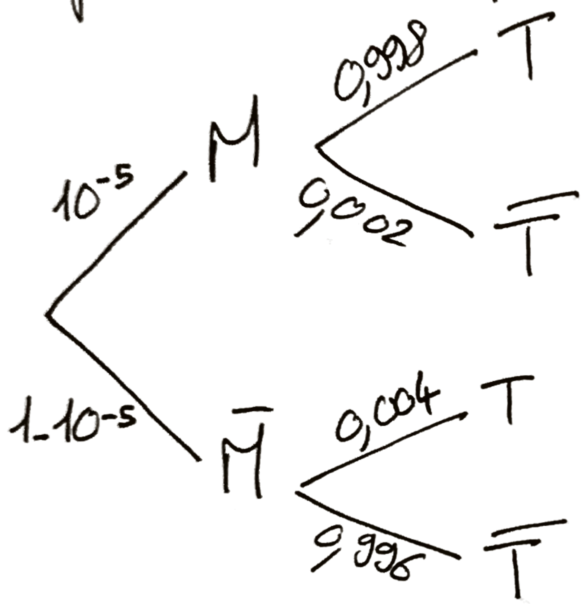
On pioche une personne au hasard dans la population et on la teste.

On définit les évènements :

M = " la personne est malade "

T = " le test est positif "

D'après l'énoncé on peut construire l'arbre suivant :



Et on veut calculer $\mathbb{P}_T(M)$ c'est-à-dire la probabilité que la personne soit malade sachant que le test est positif.

Comme $(M, \overline{M})$ est un sce on a d'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T)}{\mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M}) \times \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)}$$

$\mathbb{P}_T(M) \simeq 0{,}0024$ Alors qu'on voudrait 1.