dem prop 15

On a les mêmes résultats avec Vect(.)
[cor 19 du chap 13]
En égalisant les dimensions on obtient la propriété puisque dim(Vect(.)) = rg(.)

Example 1 $\vec{u_1} = (1,0,1)$ $\vec{u_2} = (1,1,0)$ $\vec{u_3} = (0,-1,1)$

$\vec{u_1} - \vec{u_2} = \vec{u_3}$ donc $\mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}) = \mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2})$

On égalise les dimensions :

$$\mathrm{rg}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}) = \mathrm{rg}(\vec{u_1}, \vec{u_2})$$

Mais $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont non colinéaires et forment donc une famille libre et donc une base de $\mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2})$

Donc $\dim(\mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2})) = 2$.

Donc $\mathrm{rg}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}) = 2$.

dem th 16

1. $rg(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) = 0 \iff Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) = \{\vec{0_E}\}$

$\iff \vec{u_1} = \dots = \vec{u_p} = \vec{0_E}$

2. $Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est engendré par la famille de vecteurs $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$.

D'après le th 8 :

$$\dim(Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})) \leqslant Card(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$$

ie $rg(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) \leqslant p$

3. Toujours d'après le th 8 :

$rg(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) = p \iff \dim(Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})) = Card(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$

$\iff (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ famille génératrice minimale de $Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$

$\iff (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ base de $Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$

$\iff (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est libre dem th 17 On suppose $\mathbb{E}$ de dimension finie notée n.

1. D'après le th 16 : $rg(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) \leq p$.

De plus $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$

donc $Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) \subseteq \mathbb{E}$

Donc $\dim(Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})) \leqslant \dim(\mathbb{E})$ [th 12]

ie $rg(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) \leq n$.

On a donc $rg(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) \leq \min(n, p)$

2. $rg(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) = n$

$\Longleftrightarrow \dim(Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})) = \dim(\mathbb{E})$

$\underset{\text{cor 13}}{\Longleftrightarrow} Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) = \mathbb{E}$

$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{E}$ est engendré par la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$