<u>dem th 18</u> On suppose que $\mathbb{E}$ est de dimension finie et que $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$. On pose $n = \dim(\mathbb{E})$

<u>but</u> Donner $\mathbb{G}$ sev de $\mathbb{E}$ tq $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$

D'après le th 12, $\mathbb{F}$ est de dimension finie.

On peut donc se donner $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ une base de $\mathbb{F}$ avec $p = \dim(\mathbb{F}) \leq n = \dim(\mathbb{E})$.

La famille $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ est libre dans $\mathbb{F}$ et comme $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ elle est encore libre dans $\mathbb{E}$.

D'après le théorème de la base incomplète on peut la compléter en $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p}, \vec{e_{p+1}}, \dots, \vec{e_n})$ base de $\mathbb{E}$.

On pose alors $\mathbb{G} \overset{\text{def}}{=} \text{Vect}(\vec{e_{p+1}}, \dots, \vec{e_n})$

Alors $\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$.

De plus l'union d'une base de $\mathbb{F}$ et d'une base de $\mathbb{G}$ donne une base de $\mathbb{E}$.

D'après le th 47 du chap 13 : $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$

Donc $\mathbb{F}$ admet <u>au moins un supplémentaire</u> dans $\mathbb{E}$.

De plus $\dim(\mathbb{G}) = \text{Card}(\vec{e_{p+1}}, \dots, \vec{e_n})$

$$= n - (p+1) + 1 = n - p = \dim(\mathbb{E}) - \dim(\mathbb{F})$$

<u>dem th 19</u> On suppose que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont deux sev de $\mathbb{E}$ et que $\mathbb{E}$ est de dimension finie.

<u>but</u> mq $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ et $\mathbb{F}+\mathbb{G}$ sont de dimension finie et :

$$\dim(\mathbb{F}+\mathbb{G}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) - \dim(\mathbb{F}\cap\mathbb{G})$$

Comme $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ et $\mathbb{F}+\mathbb{G}$ sont des sev de $\mathbb{E}$ on sait qu'ils sont de dimension finie d'après le th 12.

On note
$$p = \dim(\mathbb{F})$$
$$q = \dim(\mathbb{G})$$
$$r = \dim(\mathbb{F}\cap\mathbb{G})$$

L'idée est de construire <u>judicieusement</u> une base de $\mathbb{F}+\mathbb{G}$

On se donne $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_r})$ une base de $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}$.
Comme $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}$ est à la fois un sev de $\mathbb{F}$ et de $\mathbb{G}$, on peut la compléter en $(\underbrace{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_r}}_{\text{base de } \mathbb{F}\cap\mathbb{G}}, \vec{f_{r+1}}, \dots, \vec{f_p})$ base de $\mathbb{F}$

et $(\underbrace{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_r}}_{\text{base de } \mathbb{F}\cap\mathbb{G}}, \vec{g_{r+1}}, \dots, \vec{g_q})$ base de $\mathbb{G}$, grâce au théorème de la base incomplète.

* Nous allons montrer que $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_r}, \vec{f_{r+1}}, \dots, \vec{f_p}, \vec{g_{r+1}}, \dots, \vec{g_q})$ est une base de $\mathbb{F}+\mathbb{G}$.

* Mq $\mathcal{B}$ est libre.

On se donne des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \mu_{r+1}, \dots, \mu_p, \gamma_{r+1}, \dots, \gamma_q$ tels que

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k . \vec{e_k} + \sum_{k=r+1}^{p} \mu_k . \vec{f_k} + \sum_{k=r+1}^{q} \gamma_k . \vec{g_k} = \vec{0_E}.$$

but ces scalaires sont tous nuls.

On a
$$\underbrace{\underbrace{-\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \vec{e_k}}_{\in \mathbb{F} \cap \mathbb{G}} - \sum_{k=r+1}^{p} \mu_k . \vec{f_k}}_{\in \mathbb{F}} = \underbrace{\sum_{k=r+1}^{q} \gamma_k . \vec{g_k}}_{\in \mathbb{G}}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=r+1}^{q} \gamma_k . \vec{g_k} \in \mathbb{F} \cap \mathbb{G}$

Mais d'après le th 47 du chap 13 le fait que
$(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_r}, \vec{g_{r+1}}, \dots, \vec{g_q})$ soit une base de $\mathbb{G}$ donne

$$\mathbb{G} = \underbrace{\mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_r})}_{= \mathbb{F} \cap \mathbb{G}} \oplus \mathrm{Vect}(\vec{g_{r+1}}, \dots, \vec{g_q})$$

En particulier : $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} \cap \mathrm{Vect}(\vec{g_{r+1}}, \dots, \vec{g_q}) = \{\vec{0_E}\}$

Donc $\displaystyle\sum_{k=r+1}^{q} \gamma_k \vec{g_k} = \vec{0_E}$.

Comme la famille $(\vec{g_{r+1}}, \dots, \vec{g_q})$ est libre (sous-famille d'une famille libre) on en déduit que :

$\gamma_{r+1} = \dots = \gamma_q = 0$

On le réinjecte dans l'identité de départ :

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \vec{e_k} + \sum_{k=r+1}^{p} \mu_k \cdot \vec{f_k} = \vec{0_E}$$

Par liberté de $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_r}, \vec{f_{r+1}}, \dots, \vec{f_p})$: c'est une base

$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_{r+1} = \dots = \mu_p = 0$ CQFD

* Mq $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{F} + \mathbb{G}$.

On a :

$\mathbb{F} + \mathbb{G} = \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_r}, \vec{f_{r+1}}, \dots, \vec{f_p}) + \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_r}, \vec{g_{r+1}}, \dots, \vec{g_q})$

$= \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_r}, \vec{f_{r+1}}, \dots, \vec{f_p}, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_r}, \vec{g_{r+1}}, \dots, \vec{g_q})$

th 41 chap 13

$= \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ d'après le principe de réduction d'une famille génératrice.

* Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{F} + \mathbb{G}$.

On a donc :

$\dim(\mathbb{F} + \mathbb{G}) = \mathrm{Card}(\mathcal{B}) = p + (q - (r+1)) + 1$

$= p + q - r = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) - \dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G})$

Exemple 1 On suppose que $\dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) > \dim(\mathbb{E})$

D'après la formule de Grassman :

$$\dim(\mathbb{F}+\mathbb{G}) + \dim(\mathbb{F}\cap\mathbb{G}) > \dim(\mathbb{E})$$

Mais $\mathbb{F}+\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ donc on a aussi

$$\dim(\mathbb{F}+\mathbb{G}) \leq \dim(\mathbb{E})$$

Par transitivité :

$$\dim(\mathbb{E}) + \dim(\mathbb{F}\cap\mathbb{G}) > \dim(\mathbb{E})$$

Donc $\dim(\mathbb{F}\cap\mathbb{G}) > 0$

Comme c'est un entier : $\dim(\mathbb{F}\cap\mathbb{G}) \geqslant 1$

Donc $\{0_{\mathbb{E}}\} \neq \mathbb{F}\cap\mathbb{G}$

donc $\exists \vec{x} \in \mathbb{F}\cap\mathbb{G},\ \vec{x} \neq \vec{0}_{\mathbb{E}}$.

<u>dem cor 20</u> * $\dim(F \cap G) \geqslant 0$ car c'est un nombre entier naturel

Donc $\dim(F+G) \leq \dim(F) + \dim(G)$

* De plus : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$

$\iff \dim(F \cap G) = 0$

$\iff F \cap G = \{0_E\}$

$\iff$ F et G sont en somme directe

<u>dem th 21</u> D'après le th 47 du chap 13 les prédicats (i), (ii), (iii) et (iv) sont équivalents.

On va donc montrer l'équivalence de (ii), (v) et (vi) par implications circulaires

$\boxed{(ii) \Longrightarrow (v)}$ On suppose que $\mathbb{E} = \mathbb{F} + \mathbb{G}$ et $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{\vec{0}_{\mathbb{E}}\}$

<u>but</u> $\mathbb{E} = \mathbb{F} + \mathbb{G}$ et $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$

Comme $\mathbb{E} = \mathbb{F} + \mathbb{G}$ on a :

$$\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F} + \mathbb{G}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) - \dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G})$$

Mais on a supposé $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{\vec{0}_{\mathbb{E}}\}$ donc $\dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G}) = 0$

Finalement $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$

$\boxed{(v) \Longrightarrow (vi)}$ On suppose que $\mathbb{E} = \mathbb{F} + \mathbb{G}$ et $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$

<u>but</u> $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{\vec{0}_{\mathbb{E}}\}$ et $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$

Comme $\mathbb{E} = \mathbb{F} + \mathbb{G}$ on a d'après la formule de Grassman :

$$\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) - \dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G})$$

Or on a supposé : $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$

Donc $\dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G}) = 0$

donc $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{\vec{0_E}\}$

$\boxed{(vi) \Longrightarrow (ii)}$ On suppose que $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{\vec{0_E}\}$ et que
$\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$

<u>but</u> $\mathbb{F} + \mathbb{G} = \mathbb{E}$ et $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{\vec{0_{\mathbb{E}}}\}$

On sait déjà que $\mathbb{F} + \mathbb{G} \subseteq \mathbb{E}$ car $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev de $\mathbb{E}$

Il suffit donc de prouver que $\dim(\mathbb{F} + \mathbb{G}) = \dim(\mathbb{E})$
d'après le cor 13.

Or on a $\dim(\mathbb{F} + \mathbb{G}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) - \dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G})$
d'après la formule de Grassmann.

Et on a supposé que $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$
et que $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{\vec{0_E}\}$ donc $\dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G}) = 0$

On a donc bien $\dim(\mathbb{F} + \mathbb{G}) = \dim(\mathbb{E}) - 0$
$= \dim(\mathbb{E})$

Exemple 2

méthode 1 par concaténation de bases

$\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(1,1,1)}_{\vec{u_1}}\big)$

Comme $\vec{u_1} \neq \vec{0}$ la famille $(\vec{u_1})$ est une base de $\mathbb{F}$.

$\mathbb{G} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x+y+z = 0 \}$

$\mathbb{G} = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(-1,1,0)}_{\vec{u_2}}, \underbrace{(-1,0,1)}_{\vec{u_3}}\big)$

Comme $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ sont non colinéaires la famille $(\vec{u_2}, \vec{u_3})$ est une base de $\mathbb{G}$.

On les concatène, on obtient $\mathcal{B} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$

Cette famille est libre car :

$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2} + \lambda_3 \vec{u_3} = \vec{0}$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ la famille $\mathcal{B}$ est libre maximale dans $\mathbb{R}^3$ donc est une base de $\mathbb{R}^3$.

D'après (iii) du th 21 on a : $\mathbb{R}^3 = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$

<u>méthode 2</u> Par calcul de dimensions.

On reprend $(\vec{u_1})$ base de $\mathbb{F}$ et $(\vec{u_2}, \vec{u_3})$ base de $\mathbb{G}$.

On en déduit que :

$$\dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Il reste à montrer que $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{\vec{0}\}$.

Si $\vec{v} \in \mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ alors

comme $\vec{v} \in \mathbb{F}$, $\vec{v}$ s'écrit $\vec{v} = (a, a, a)$ avec $a \in \mathbb{R}$

et comme $\vec{v} \in \mathbb{G}$ on a $a + a + a = 0$

Donc $a = 0$ et donc $\vec{v} = \vec{0}$. OK.

D'après (vi) du th 21 on a $\mathbb{R}^3 = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$