Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$e(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \; ; \; \varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in [a,b], \varphi(x) \leqslant f(x) \right\}$$

= ensemble des aires "sous la courbe" des fonctions en escalier qui minore f sur l'intervalle $[a,b]$

$$E(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \psi \; ; \; \psi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in [a,b], f(x) \leqslant \psi(x) \right\}$$

= ensemble des aires "sous la courbe" des fonctions en escalier qui majore f sur l'intervalle $[a,b]$

Comme f est continue sur le segment $[a,b]$ elle est bornée sur l'intervalle $[a,b]$:

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 ; \; \forall x \in [a,b], \; m \leqslant f(x) \leqslant M$$

La fonction constante égale à m est donc une fonction en escalier sur $[a,b]$ qui minore f.

Donc $\int_{[a,b]} m = m(b-a) \in e(f)$

et donc $e(f) \neq \emptyset$

De même $\int_{[a,b]} M = M(b-a) \in E(f)$

donc $E(f) \neq \emptyset$

De plus si $\varphi \in \mathcal{E}([a,b];\mathbb{R})$ vérifie $\forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \leq f(x)$

Alors $\forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \leq M$

donc $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} M = M(b-a)$ d'après 3. de la prop 5

Donc l'ensemble $e(f)$ est majoré par $M(b-a)$

Donc $\boxed{\alpha = \operatorname{Sup} e(f) \text{ existe}}$ d'après le th fondamental de la borne supérieure [th 54 du chap 6].

De même $E(f)$ est minoré par $m(b-a)$.

Donc $\boxed{\beta = \operatorname{Inf} E(f) \text{ existe}}$

Enfin soit I un réel appartenant à $e(f)$.

Alors $I = \int_{[a,b]} \varphi$ pour φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \leq f(x)$

Soit ensuite J un réel appartenant à $E(f)$:

$J = \int_{[a,b]} \psi$ où ψ en escalier sur $[a,b]$ et

$\forall x \in [a,b], \; f(x) \leq \psi(x)$

On a $\forall x \in [a,b], \; \varphi(x) \leq \psi(x)$

donc $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$ d'après 3. de la prop 5

donc $I \leq J$.

Or a $\forall J \in E(f), \; I \leq J$

Donc I est un minorant de $E(f)$.

Comme β est le plus grand minorant de $E(f)$:

$I \leq \beta$

Ceci est vrai pour tout $I \in e(f)$ donc β est un majorant de $e(f)$.

Comme α est le plus petit majorant de $e(f)$ on a

donc : $\boxed{\alpha \leq \beta}$

dem th 7 On suppose que f est continue sur le segment $[a,b]$.

but $\alpha = \beta$.

On sait déjà que $\alpha \leq \beta$.

Donc il reste à montrer que $\alpha \geq \beta$.

On fixe $\varepsilon > 0$.

D'après le th 6 il existe φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que :

$$\forall x \in [a,b], \quad \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

$$\text{et } 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$$

Si on pose $I = \int_{[a,b]} \varphi$ et $J = \int_{[a,b]} \psi$ on a donc

$I \in e(f)$ et $J \in E(f)$ et avec la prop 5 :

$$0 \leq J - I \leq \varepsilon(b-a)$$

Comme $I \leq \alpha$ (α est un majorant de $e(f)$)

on a $I + \varepsilon(b-a) \leq \alpha + \varepsilon \times (b-a)$

Comme $J \leq I + \varepsilon(b-a)$ on a par transitivité : $J \leq \alpha + \varepsilon(b-a)$

Mais on a aussi : $J \geqslant \beta$ (β est un minorant de $E(f)$).

donc par transitivité : $\beta \leq \alpha + \varepsilon \times (b-a)$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ on peut en déduire que $\beta \leq \alpha$.

CQFD.

<u>Rem</u> Tout ce qui a été dit avant le th 7 est vrai si on suppose seulement que f est <u>bornée</u> sur $[a,b]$, à la place de f continue :

<u>α et β existent</u> et <u>$\alpha \leq \beta$</u> (mais le th 6 est faux)

Par contre on peut avoir $\alpha < \beta$.

Par exemple si $[a,b]=[0,1]$ et $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ alors

$$\alpha = 0 < 1 = \beta.$$

Les fonctions <u>bornées</u> pour lesquelles <u>$\alpha = \beta$</u> sont appelées <u>fonctions intégrables au sens de Riemann</u>. Le th 7 dit que les fonctions continues sur un segment sont intégrables au sens de Riemann. Vous verrez des fonctions intégrables et non continues en math spé.