Montrons que la quantité $I(\sigma, \varphi)$ ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée σ.

Pour cela on se donne σ' une autre subdivision adaptée à φ.

<u>but</u> $I(\sigma, \varphi) = I(\sigma', \varphi)$

On note $\sigma = (x_0, x_1, .., x_n)$ et $\sigma' = (y_0, y_1, ..., y_m)$

* On suppose d'abord que la subdivision σ' est contenue dans la subdivision σ.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction φ est égale à une constante d_k sur l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$

Mais cet intervalle se découpe en union de certains intervalle $]y_l, y_{l+1}[$, pour l dans un ensemble noté I_k, et sur ces intervalles φ est encore constante égale à d_k.

Donc $\displaystyle\sum_{l \in I_k} d_k (y_{l+1} - y_l) = d_k \cdot \sum_{l \in I_k} (y_{l+1} - y_l) = d_k (x_{k+1} - x_k)$

En sommant pour k allant de 0 à $n-1$ on trouve :

$I(\sigma, \varphi) = I(\sigma', \varphi)$

* Maintenant si σ et σ' sont deux subdivisions quelconques adaptées à φ on a d'après le point précédent:

$$I(\sigma, \varphi) = I(\sigma \vee \sigma', \varphi)$$
$$I(\sigma', \varphi) = I(\sigma \vee \sigma', \varphi)$$

donc $I(\sigma, \varphi) = I(\sigma', \varphi)$

<u>CQFD</u>.

Ainsi la quantité $I(\sigma, \varphi)$ ne dépend que de φ et de $[a,b]$. On la note: $\int_{[a,b]} \varphi$.

<u>dem prop 5</u> On suppose φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On se donne $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à la fois à φ et à ψ.

<u>1.</u> Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction φ (resp. ψ) est égale sur $]x_k, x_{k+1}[$ à une constante c_k (resp. d_k).
Alors sur $]x_k, x_{k+1}[$ la fonction $\lambda\varphi + \psi$ est égale à la constante $\lambda c_k + d_k$.

Donc
$$\int_{[a,b]} (\lambda\varphi + \psi) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)(\lambda c_k + d_k)$$
$$= \lambda \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) d_k$$
$$= \lambda \cdot \int_{[a,b]} \varphi + \int_{[a,b]} \psi$$

<u>2.</u> Si $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \geqslant 0$ alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $c_k \geqslant 0$

donc
$$\int_{[a,b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{\geqslant 0} \times \underbrace{c_k}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

<u>3.</u> Si $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$ alors

d'après 2. on a
$$\int_{[a,b]} (\varphi - \psi) \geqslant 0$$

puis d'après 1. on a $\int_{[a,b]} \varphi - \int_{[a,b]} \psi \geqslant 0$

et donc $\int_{[a,b]} \varphi \geqslant \int_{[a,b]} \psi$.

4. On a $\forall x \in [a,b]$, $-|\varphi(x)| \leqslant \varphi(x) \leqslant |\varphi(x)|$

donc d'après 3. et 1. on a $-\int_{[a,b]} |\varphi| \leqslant \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} |\varphi|$

et donc $\left| \int_{[a,b]} \varphi \right| \leqslant \int_{[a,b]} |\varphi|$

5. On ajoute c dans la subdivision σ.
On obtient une subdivision

$\sigma' = (x_0, \dots, x_l, c, x_{l+1}, \dots, x_n)$ où $l \in [\![0, n-1]\!]$

encore adaptée à φ sur $[a,b]$.

Les subdivisions $(x_0, \dots, x_l, c)$ et $(c, x_{l+1}, \dots, x_n)$ sont adaptées à φ sur les intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$. Donc :

$$\int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi = \sum_{k=0}^{l-1} (x_{k+1} - x_k) . c_k + (c - x_l) c_l + (x_{l+1} - c) c_l$$

$$+ \sum_{k=l+1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} (x_{k+1} - x_k) c_k + (x_{l+1} - x_l) c_l + \sum_{k=l+1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k = \int_{[a,b]} \varphi \, .$$