Exemple 1 On fixe $n \in \mathbb{N}$.

On pose $I_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \, dx$

La suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite d'intégrales.

* On a $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $(\cos x)^n \geq 0$

donc par positivité de l'intégrale : $I_n \geq 0$

Donc la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n+1} dx - \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left((\cos x)^{n+1} - (\cos x)^n \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \times (\cos x - 1) \, dx$$

De plus $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \cos x \leq 1$

donc $(\cos x)^n \times (\cos x - 1) \leq 0$

Par croissance de l'intégrale : $I_{n+1} - I_n \leq 0$

Donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

* D'après le théorème de la limite monotone, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exemple 2 On suppose f continue sur $[a,b]$ et $a \leq b$.

D'après le théorème des bornes atteintes, puisque $|f|$ est elle aussi continue sur $[a,b]$, $\max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ existe.

Or a $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \overset{\text{def}}{=} M$

Par croissance de l'intégrale: $\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M \times (b-a)$

Par inégalité triangulaire: $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Par transitivité: $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq M \times (b-a)$

dem th 10

On suppose f continue sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0$.

On montre 2.

On suppose que f n'est pas constante nulle sur $[a,b]$:

$\exists x_0 \in [a,b]\ ;\ f(x_0) \neq 0$.

but $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

f est continue en x_0 donc : $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$

donc $f(x) - \frac{1}{2} f(x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{f(x_0)}{2}$

On on a supposé $f(x_0) > 0$.

D'après le th 39 du chap 9 : $f(x) - \frac{1}{2} f(x_0) \underset{x \to x_0}{\sim} \frac{1}{2} f(x_0)$

et d'après le th 38 du chap 9 :

$f(x) - \frac{1}{2} f(x_0) \geq 0$ au vois de x_0

ie $\exists \delta > 0,\ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\ f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$

Par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \geq \frac{(x_0+\delta)-(x_0-\delta)}{2} f(x_0)$

$= \delta \times f(x_0) > 0$

Avec Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx}_{> 0} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx}_{\geq 0}$

Donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$. 1. est la contraposée de 2.

<u>Exemple 3</u> $n \in \mathbb{N}$.

On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \, dx$

On pose $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = (\cos x)^n$

Alors $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) \geqslant 0$ et $f(0) = 1 > 0$

donc par stricte positivité de l'intégrale : $I_n > 0$.

⚠ Ne pas dire que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) > 0$.

Le théorème ne demande pas une hypothèse aussi forte. Ici elle fausse (prendre $x = \frac{\pi}{2}$).

<u>Exemple 4</u> On suppose f continue sur $[a,b]$ et $a<b$.

On pose $\mu = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,dx$

On veut montrer qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tq $f(x_0)=\mu$.

* f a un minimum m et un maximum M sur $[a,b]$:

c'est une conséquence du théorème des bornes atteintes qui s'applique ici car f est <u>continue</u> sur le <u>segment</u> $[a,b]$.

* $m \leqslant \mu \leqslant M$ en effet :

On a $\forall x \in [a,b]$, $\quad m \leqslant f(x) \leqslant M$

donc par croissance de <u>l'intégrale</u> :

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

ie $$(b-a)\times m \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant (b-a)\times M$$

Comme $b-a>0$: $m \leqslant \mu \leqslant M$ en divisant par $b-a$.

* μ est une valeur prise par f en effet :

m et M sont des valeurs prises par f car ils correspondent à son minimum et son maximum :

$$\exists s \in [a,b],\ M = f(s)$$

et $\exists t \in [a,b],\ m = f(t)$.

On applique le TVI sur le segment $[\overleftrightarrow{s,t}]$. Comme $[\overleftrightarrow{s,t}] \subseteq [a,b]$ f est continue sur $[\overleftrightarrow{s,t}]$.

Comme $\mu \in [f(t), f(s)]$ le TVI donne l'existence

de $x_0 \in [s,t]$ tq $f(x_0) = \mu$.

Comme $[s,t] \subseteq [a,b]$ on a prouvé :

$$\exists x_0 \in [a,b],\ f(x_0) = \mu.$$