dem th 8 On suppose f, g continues sur un intervalle I et que $(a,b,c) \in I^3$.

Alors f et g sont continues sur les segments $[a,b]$, $[a,c]$ et $[c,b]$ donc leurs intégrales sur ces segments existent.

1. * Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

but $\int_a^b \lambda \times f(x)\,dx = \lambda \times \int_a^b f(x)\,dx$

si $\lambda > 0$: Soit $\varepsilon > 0$ et φ et ψ en escaliers sur $[a,b]$

tq $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \leq \varphi(x) + \varepsilon$ [th 6]

Comme $\lambda > 0$ on a :

$\forall x \in [a,b]$, $\lambda\varphi(x) \leq \lambda f(x) \leq \lambda \times \psi(x) \leq \lambda \times \varphi(x) + \lambda\varepsilon$

Comme $\int_{[a,b]} \varphi \in e(f)$ on a $\int_{[a,b]} \varphi \leq \alpha = \int_a^b f(x)\,dx$

et comme $\int_{[a,b]} \psi \in E(f)$ on a $\int_{[a,b]} \psi \geq \beta = \int_a^b f(x)\,dx$

Donc $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_{[a,b]} \psi$

et de même $\int_{[a,b]} \lambda\varphi \leq \int_a^b \lambda \times f(x)\,dx \leq \int_{[a,b]} \lambda\psi$

Mais avec la prop 5 on a :

$$\int_{[a,b]} \psi \leq \int_{[a,b]} (\varphi+\varepsilon) = \int_{[a,b]} \varphi + \int_{[a,b]} \varepsilon = \int_{[a,b]} \varphi + \varepsilon \times (b-a)$$

$$\int_{[a,b]} \lambda\varphi = \lambda \times \int_{[a,b]} \varphi$$

$$\int_{[a,b]} \lambda\psi = \lambda \times \int_{[a,b]} \psi \underset{\lambda>0}{\leq} \lambda \times \int_{[a,b]} \varphi + \lambda\varepsilon \times (b-a)$$

On a donc en posant $I = \int_{[a,b]} \varphi$ et $J = \int_{[a,b]} \psi$:

$$\lambda I \leq \lambda \int_a^b f(x)dx \leq \lambda J \leq \lambda I + \lambda\varepsilon(b-a) \ (1)$$

$$\lambda I \leq \int_a^b \lambda f(x)dx \leq \lambda J \leq \lambda I + \lambda\varepsilon(b-a) (2)$$

donc $-\lambda\varepsilon(b-a) \leq \lambda \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \lambda f(x)dx \leq \lambda\varepsilon(b-a)$ $(1) + (-(2))$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ on en déduit que :

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

si $\lambda < 0$ On inverse les inégalités mais les arguments sont les mêmes.

si $\lambda = 0$ C'est évident.

* **but** $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$\forall x \in [a,b], \quad \varphi_1(x) \leq f(x) \leq \psi_1(x) \leq \varphi_1(x) + \varepsilon$$
$$\varphi_2(x) \leq g(x) \leq \psi_2(x) \leq \varphi_2(x) + \varepsilon$$

On note $I_1 = \int_{[a,b]} \varphi_1$ et $J_1 = \int_{[a,b]} \psi_1$. On définit de même

I_2 et J_2.

Avec les raisonnements précédents on a :

$$I_1 \leq \int_a^b f(x)dx \leq J_1 \leq I_1 + \varepsilon(b-a) \quad (1)$$
$$I_2 \leq \int_a^b g(x)dx \leq J_2 \leq I_2 + \varepsilon(b-a) \quad (2)$$

Par somme d'inégalités :

$$\forall x \in [a,b], \quad \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \leq f(x) + g(x) \leq \psi_1(x) + \psi_2(x) \leq \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + 2\varepsilon$$

Et comme : $\int_{[a,b]} (\varphi_1 + \varphi_2) = I_1 + I_2$ et $\int_{[a,b]} (\psi_1 + \psi_2) = J_1 + J_2$

grâce à la prop 5, on a :

$$I_1 + I_2 \leq \int_a^b (f(x) + g(x))dx \leq J_1 + J_2 \leq I_1 + I_2 + 2\varepsilon \times (b-a) \quad (3)$$

En additionnant (1), (2) et $-(3)$, on a :

$$-2\varepsilon\times(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x) - \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx \leqslant 2\varepsilon\times(b-a)$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Rem : Dans les preuves on a supposé $a \leqslant b$. On généralise facilement au cas $a > b$.

2. On suppose $a \leq b$.

(a) Si φ est en escalier sur $[a,b]$ et vérifie

$$\forall x \in [a,b],\quad f(x) \leq \varphi(x)$$

alors $\forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \geqslant 0$ puisqu'on a supposé $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geqslant 0$

D'après la prop 5 : $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \geqslant 0$.

Ceci prouve que $E(f)$ est minorée par 0.

Donc $\beta = \operatorname{Inf} E(f) \geqslant 0$.

Donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

(b) On applique (a) à la fonction $g-f$ et on utilise 1.

(c) On utilise (b) avec l'inégalité : $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$

3. Si $c \in [a,b]$.

On fixe $\varepsilon > 0$ et on se donne $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ en escalier sur $[a,b]$ telles que :

$$\forall x \in [a,c], \quad \varphi_1(x) \leq f(x) \leq \psi_1(x) \leq \varphi_1(x) + \varepsilon$$

$$\forall x \in [c,b], \quad \varphi_2(x) \leq f(x) \leq \psi_2(x) \leq \varphi_2(x) + \varepsilon$$

On definit alors les fonctions φ et ψ sur $[a,b]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } a \leq x < c \\ \varphi_2(x) & \text{si } c \leq b \leq b \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) & \text{si } a \leq x < c \\ \psi_2(x) & \text{si } c \leq x \leq b \end{cases}$$

Alors φ et ψ sont en escalier sur $[a,b]$ et :

$$\forall x \in [a,b], \quad \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \leq \varphi(x) + \varepsilon$$

On note $I_1 = \int_{[a,c]} \varphi$ et $J_1 = \int_{[a,c]} \psi$ et on definit de même I_2, J_2 puis I et J.

Avec les raisonnements du 1. on a :

$$I_1 \leq \int_a^c f(x)\,dx \leq J_1 \leq I_1 + \varepsilon \times (c-a) \quad (1)$$

$$I_2 \leq \int_c^b f(x)\,dx \leq J_2 \leq I_2 + \varepsilon \times (b-c) \quad (2)$$

$$I \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq J \leq I + \varepsilon \times (b-a) \quad (3)$$

Et avec la prop 5 : $I = I_1 + I_2$ et $J = J_1 + J_2$

En additionnant (1), (2) et $-(3)$ on a :

$$-\varepsilon(b-a) \leqslant \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \leqslant \underbrace{\varepsilon\times(c-a)+\varepsilon\times(b-c)}_{=\varepsilon\times(b-a)}$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ donc :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

On généralise ensuite facilement au cas $c \notin [a,b]$.