Exemple 1 On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

* étape 1 on ramène la borne du bas à 0 et on remplace k par $n \times \frac{k}{n}$

$$S_n = \sum_{\underset{k'=k-n}{k=n}}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+n\frac{k}{n}}$$

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

* étape 2 on identifie la fonction f.

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{où} \quad f : x \longmapsto \frac{1}{1+x}$$

est continue sur $[0,1]$

* étape 3 on utilise le théorème

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx + 0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

* étape 4 on calcule l'intégrale.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\ln(|1+x|)\Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Rem: On en déduit une nouvelle preuve du fait que

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

En effet $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_{n+1} - H_n \geqslant 0$ donc (H_n) est croissante.

Par l'absurde si elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$

alors $H_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ et $H_{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ (suites extraites)

donc $S_n = H_{2n} - H_{\ -1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l - l = 0$ (par différence de limites)

Par unicité de la limite : $\ln 2 = 0$.

donc $2 = e^0 = 1$. Absurde

Donc (H_n) n'est pas convergente. Et on a vu qu'elle est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone [th 55 chap 6]

$$H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$