<u>dem th33</u> On suppose que $f : E \longrightarrow F$ est linéaire.

<u>1.</u> On suppose que f est injective sur E et que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille libre de vecteurs de E.

<u>but</u> la famille $\left(f(\overrightarrow{u_1}), f(\overrightarrow{u_2}), \dots, f(\overrightarrow{u_p})\right)$ est libre.

On se donne $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ scalaires tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . f(\overrightarrow{u_k}) = \overrightarrow{0_E}$$

Comme f est linéaire : $f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \overrightarrow{u_k}\right) = \overrightarrow{0_E}$

donc $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \overrightarrow{u_k} \in \mathrm{Ker}(f)$.

Mais f est injective donc $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

Donc $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{0_E}$

Et la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est libre donc :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$

Ceci prouve que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est libre.

2. $\boxed{(i) \Longrightarrow (ii)}$ On suppose f injective sur $\mathbb{E}$.

Soit $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ une base qcq de vecteurs de $\mathbb{E}$. C'est donc une famille libre.

D'après 1. la famille $(f(\vec{u_1}), \dots, f(\vec{u_p}))$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{F}$.

$\boxed{(ii) \Longrightarrow (i)}$ On suppose qu'il existe $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ base de vecteurs de $\mathbb{E}$ telle que la famille $(f(\vec{u_1}), \dots, f(\vec{u_p}))$ est libre.

<u>but</u> Montrer que f est injective sur $\mathbb{E}$.

Soit $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$.

Par déf : $f(\vec{x}) = \vec{O_F}$.

On a $\vec{x} \in \mathbb{E}$ et $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ base de $\mathbb{E}$ donc

$\exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p ; \vec{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \vec{u_k}$

Comme f est linéaire :

$$f(\vec{x}) = \vec{O_F} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . f(\vec{u_k})$$

Comme la famille $(f(\vec{u_1}), \dots, f(\vec{u_p}))$ est libre :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$

Donc $\vec{x} = \vec{0}_E$.

On a donc $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \{\vec{0}_E\}$

Comme $\mathrm{Ker}(f)$ est un sev de $\mathbb{E}$: $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$.

Donc f est injective.