dem prop 24

1. p, q sont définies sur $\mathbb{E}$ et respectivement à valeurs dans $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$ donc à valeurs dans $\mathbb{E}$.

On a donc $p : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ et $q : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$.

but p et q sont linéaires

Soit $(\alpha, \vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2$.

On note $\vec{x} = \underbrace{\vec{x}_G}_{\in \mathbb{G}} + \underbrace{\vec{x}_H}_{\in \mathbb{H}}$ et $\vec{y} = \underbrace{\vec{y}_G}_{\in \mathbb{G}} + \underbrace{\vec{y}_H}_{\in \mathbb{H}}$

Alors $\alpha \vec{x} + \vec{y} = \underbrace{(\alpha \vec{x}_G + \vec{y}_G)}_{\in \mathbb{G}} + \underbrace{(\alpha \vec{x}_H + \vec{y}_H)}_{\in \mathbb{H}}$

Donc par déf de p : $\begin{cases} p(\vec{x}) = \vec{x}_G \\ p(\vec{y}) = \vec{y}_G \\ p(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{x}_G + \vec{y}_G \end{cases}$

et donc $p(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \alpha . p(\vec{x}) + p(\vec{y})$

De même par déf de q : $\begin{cases} q(\vec{x}) = \vec{x}_H \\ q(\vec{y}) = \vec{y}_H \\ q(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{x}_H + \vec{y}_H \end{cases}$

donc $q(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \alpha . q(\vec{x}) + q(\vec{y})$

Ceci prouve que p et q sont linéaires.

On peut donc conclure que <u>p et q sont des endomorphismes de $\mathbb{E}$.</u>

<u>2.</u> <u>but</u> $\forall x \in \mathbb{E},\ (p+q)(\vec{x}) = id_{\mathbb{E}}(\vec{x})$

ie $p(\vec{x}) + q(\vec{x}) = \vec{x}$

Soit $x \in \mathbb{E}$ fixé qcq.

On note $\vec{x} = \underbrace{\vec{x}_G}_{\in G} + \underbrace{\vec{x}_H}_{\in H}$

Par def de p et q : $\begin{cases} p(\vec{x}) = \vec{x}_G \\ q(\vec{x}) = \vec{x}_H \end{cases}$

Donc $p(\vec{x}) + q(\vec{x}) = \vec{x}_G + \vec{x}_H = \vec{x}$

<u>Rem</u> La décomposition de $\vec{x}$ dans $G \oplus H$ est donc :

$$\vec{x} = \underbrace{p(\vec{x})}_{\in G} + \underbrace{q(\vec{x})}_{\in H}$$

<u>3.</u> * Montrons que $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ie $\forall \vec{x} \in \mathbb{E},\ p(q(\vec{x})) = \vec{0}_E$

Soit $\vec{x} \in \mathbb{E}$ fixé qcq.

Par def : $q(\vec{x}) \in H$

Mais par def de p : $p_{|\mathbb{H}} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}$

Donc $p(q(\vec{x})) = \vec{0}_{\mathbb{E}}$.

* De même on montre que $q \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{E})}$

* Montrons que $p \circ p = p$ ie que $\forall \vec{x} \in \mathbb{E}, p(p(\vec{x})) = \vec{x}$

Soit $\vec{x} \in \mathbb{E}$ fixé qcq.

Par déf de p : $p(\vec{x}) \in \mathbb{G}$.

et $p_{|\mathbb{G}} = id_{\mathbb{G}}$

Donc $p(p(\vec{x})) = p(\vec{x})$

* De même on montre que $q \circ q = q$

4. * Soit $\vec{x} \in \mathbb{E}$ fixé qcq.

<u>but</u> $\vec{x} \in \operatorname{Ker} p \Longleftrightarrow p(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{E}}$.

C'est la définition de $\operatorname{Ker} p$.

* Soit $\vec{x} \in \mathbb{E}$ fixé qcq.

<u>but</u> $\vec{x} \in \operatorname{Im}(p) \Longleftrightarrow p(\vec{x}) = \vec{x}$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose $p(\vec{x}) = \vec{x}$.

Par def de $\operatorname{Im}(p)$: $p(\vec{x}) \in \operatorname{Im}(p)$

Donc $\vec{x} \in \operatorname{Im}(p)$

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose $\vec{x} \in \mathrm{Im}(p)$.

Par def de $\mathrm{Im}(p)$: $\exists \vec{t} \in \mathbb{E}$, $\vec{x} = p(\vec{t})$

Alors $p(\vec{x}) = p(p(\vec{t})) = p(\vec{t}) = \vec{x}$

puisque $p \circ p = p$ d'après 3.

L'équivalence est démontrée par double-implication.

5. * Montrons que $\mathbb{H} = \mathrm{Ker}(p)$.

$\boxed{\subseteq}$ Soit $\vec{x} \in \mathbb{H}$ fixé qcq.

Par def de p : $p_{|\mathbb{H}} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}$

Donc $p(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{E}}$ donc $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(p)$

$\boxed{\supseteq}$ Soit $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(p)$ fixé qcq.

On a donc $p(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{E}}$.

Mais d'après 2. on a $\vec{x} = p(\vec{x}) + q(\vec{x})$

donc $\vec{x} = q(\vec{x})$

Or q à valeurs dans $\mathbb{H}$. Donc $q(\vec{x}) \in \mathbb{H}$.

Et donc $\vec{x} \in \mathbb{H}$.

Par double-inclusion : $\mathbb{H} = \mathrm{Ker}(p)$

* Montrons que $\mathbb{G} = \mathrm{Im}(p)$.

$\boxed{\subset}$ Soit $\vec{x} \in \mathbb{G}$ fixé qcq.

Par def de p : $p|_{\mathbb{G}} = id_{\mathbb{G}}$

Donc $p(\vec{x}) = \vec{x}$

Or $p(\vec{x}) \in \mathrm{Im}(p)$. Donc $\vec{x} \in \mathrm{Im}(p)$

$\boxed{\supset}$ Soit $\vec{x} \in \mathrm{Im}(p)$ fixé qcq.

D'après 4. on a $p(\vec{x}) = \vec{x}$.

Or p est à valeurs dans $\mathbb{G}$ donc $p(\vec{x}) \in \mathbb{G}$.

Donc $\vec{x} \in \mathbb{G}$.

Par double-inclusion : $\mathbb{G} = \mathrm{Im}(p)$.

On a vu du 4. que $\mathrm{Im}(p) = \{\vec{x} \in \mathbb{E} ; p(\vec{x}) = \vec{x}\}$

Donc $\mathbb{G} = \mathrm{Im}(p) = \{\vec{x} \in \mathbb{E} ; p(\vec{x}) = \vec{x}\}$

<u>Rem:</u> Comme q est la projection sur $\mathbb{H}$ parallèlement à $\mathbb{G}$ on a $\begin{cases} \mathrm{Ker}(q) = \mathbb{G} = \mathrm{Im}(p) \\ \mathrm{Im}(q) = \mathbb{H} = \mathrm{Ker}(p) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \mathbb{G} = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(id_{\mathbb{E}} - p) \\ \mathbb{H} = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(id_{\mathbb{E}} - p) \end{cases}$

6. On a $\mathbb{E} = \mathbb{G} \oplus \mathbb{H}$

Comme $\mathbb{G} = \mathrm{Im}(p)$ et $\mathbb{H} = \mathrm{Ker}(p)$

on a $\mathbb{E} = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$

donc $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$