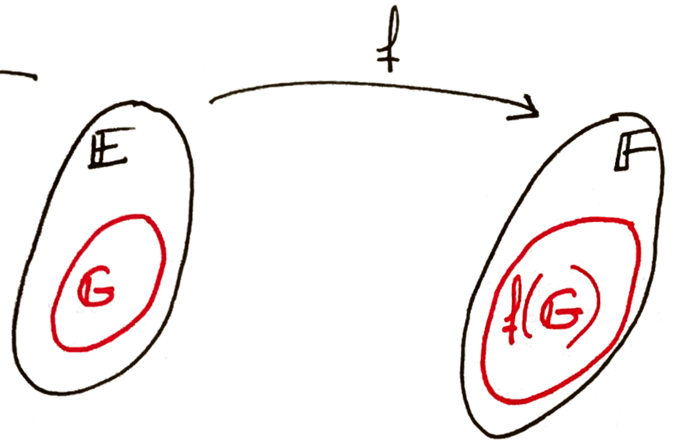
dem th16



RAPPEL : * Pour $\vec{y} \in F$:
$\vec{y} \in f(G)$
$\iff \exists \vec{x} \in G, \vec{y} = f(\vec{x})$

* Si $\vec{x} \in G$ alors $f(\vec{x}) \in f(G)$

On suppose que $f : E \longrightarrow F$ linéaire et que G est un sev de E.

Montrons que $f(G)$ est un sev de F.

* Comme f est linéaire : $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

Or G est un sev de E donc $\vec{0}_E \in G$.

Donc $f(\vec{0}_E) \in f(G)$.

et donc $\vec{0}_F \in f(G)$ et donc $f(G) \neq \emptyset$

* Soit $(\lambda, \vec{y_1}, \vec{y_2}) \in \mathbb{K} \times f(G)^2$.

but $\lambda \vec{y_1} + \vec{y_2} \in f(G)$.

On a $\vec{y_1} \in f(G)$ donc $\exists \vec{x_1} \in G, \vec{y_1} = f(\vec{x_1})$

et $\vec{y_2} \in f(G)$ donc $\exists \vec{x_2} \in G, \vec{y_2} = f(\vec{x_2})$

Alors $\lambda \vec{y_1} + \vec{y_2} = \lambda . f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2}) = f(\lambda \vec{x_1} + \vec{x_2})$
car f est linéaire

Mais on a $\lambda \in \mathbb{K}$, $\vec{x_1} \in \mathbb{G}$ et $\vec{x_2} \in \mathbb{G}$.

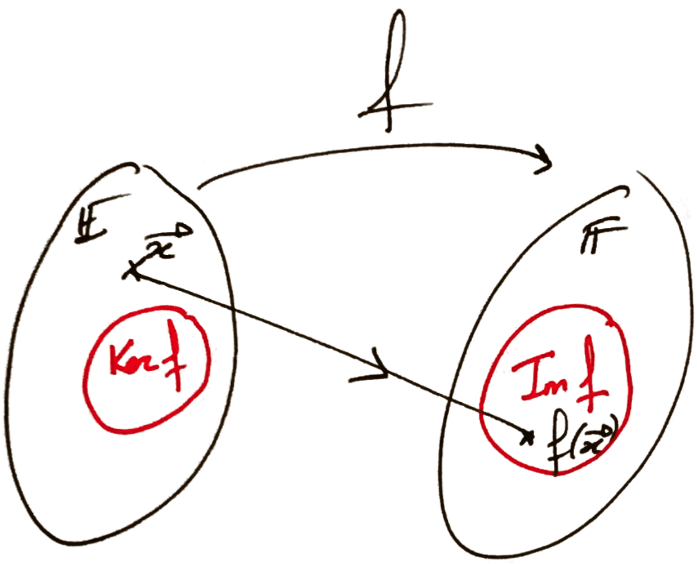
Comme $\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$: $\lambda\vec{x_1} + \vec{x_2} \in \mathbb{G}$

donc $f(\lambda\vec{x_1} + \vec{x_2}) \in f(\mathbb{G})$

et donc $\lambda\vec{y_1} + \vec{y_2} \in f(\mathbb{G})$.

* Ceci prouve que $f(\mathbb{G})$ est un sev de $\mathbb{F}$.

Cas général : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$



* Pour $\vec{x} \in \mathbb{E}$:

$\vec{x} \in \operatorname{Ker} f \iff f(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{F}}$

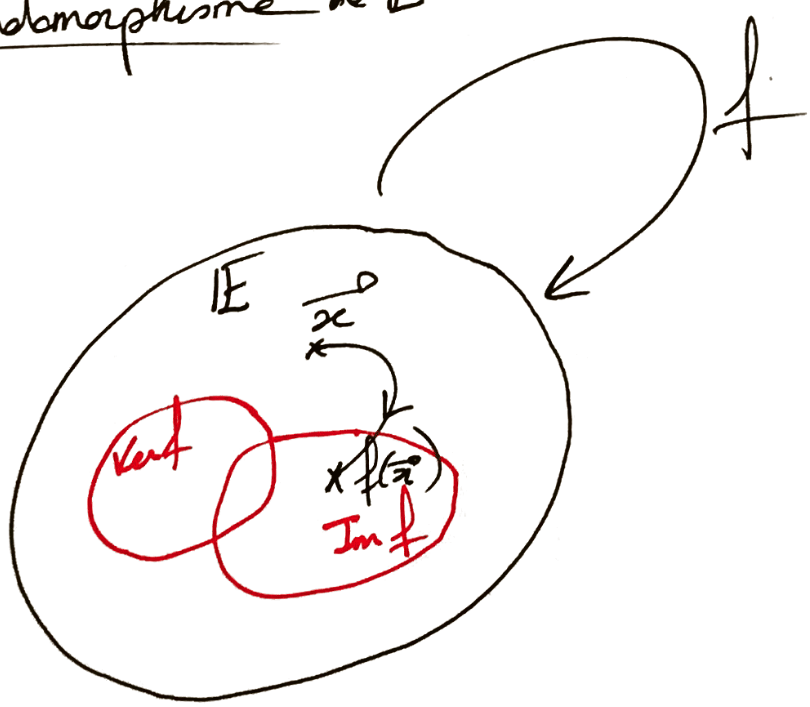
* Pour $\vec{y} \in \mathbb{F}$:

$\vec{y} \in \operatorname{Im}(f) \iff \exists \vec{x} \in \mathbb{E},\ \vec{y} = f(\vec{x})$

En particulier si $\vec{x} \in \mathbb{E}$ alors $f(\vec{x}) \in \operatorname{Im}(f)$

En général :
$\operatorname{Im} f \neq \mathbb{F}$

Cas d'un endomorphisme de $\mathbb{E}$



<u>dem Th 17</u> On suppose $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ linéaire.

① Montrons que $\mathrm{Ker}\, f$ est un sev de $\mathbb{E}$.

* Comme f est linéaire : $f(\overrightarrow{0_\mathbb{E}}) = \overrightarrow{0_\mathbb{F}}$

donc $\overrightarrow{0_\mathbb{E}} \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \emptyset$.

* Soit $(\lambda, \vec{x_1}, \vec{x_2}) \in \mathbb{K} \times \mathrm{Ker}(f)^2$. <u>but</u> $\lambda\vec{x_1} + \vec{x_2} \in \mathrm{Ker}(f)$

On a $\vec{x_1} \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(\vec{x_1}) = \overrightarrow{0_\mathbb{F}}$

et $\vec{x_2} \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(\vec{x_2}) = \overrightarrow{0_\mathbb{F}}$

Comme f est linéaire :

$$f(\lambda\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \lambda . f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2}) = \lambda . \overrightarrow{0_\mathbb{F}} + \overrightarrow{0_\mathbb{F}} = \overrightarrow{0_\mathbb{F}}$$

Donc $\lambda\vec{x_1} + \vec{x_2} \in \mathrm{Ker}(f)$.

* Ceci prouve que <u>$\mathrm{Ker}(f)$ est un sev de $\mathbb{E}$</u>.

② Montrons que $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de $\mathbb{F}$.

$\mathrm{Im}(f) \overset{\text{def}}{=} f(E)$

Or $\mathbb{E}$ est un sev de $\mathbb{E}$ et f est linéaire.

D'après le Th 16 : <u>$\mathrm{Im}(f)$ est un sev de $\mathbb{F}$</u>.

Exemple 1 $E = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) ; \ Tr(M) = 0 \}$

Rappel : $Tr(M) = \sum_{k=1}^{n} M_{k,k}$ donc $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$.

On a vu dans le TD13 (exercice 9) que si

$\lambda \in \mathbb{K}$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ on a :

$$Tr(\lambda A + B) = \lambda . Tr(A) + Tr(B)$$

Donc l'application Tr est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus $E = Ker(Tr)$.

Donc E est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 2 $\mathbb{E} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, ; \, f(0) = 0 \}$

On note φ l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

φ est l'évaluation en 0.

Montrons que φ est linéaire.

Soit $(\alpha, f, g) \in \mathbb{K} \times (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$.

On a : $\varphi(\alpha f + g) = (\alpha . f + g)(0) = \alpha . f(0) + g(0)$

$= \alpha . \varphi(f) + \varphi(g)$

Donc φ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

De plus $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Donc $\mathbb{E}$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exemple 3 $\mathbb{E} = \{ P \in \mathbb{K}[X] ; 3XP' = P \}$

On note f l'application

$$f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$
$$P \longmapsto 3XP' - P$$

Montrons que f est linéaire.

Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}[X])^2$.

$$f(\lambda P + Q) = 3X.(\lambda P + Q)' - (\lambda P + Q)$$
$$= 3X.(\lambda.P' + Q') - (\lambda P + Q)$$
$$= 3\lambda XP' + 3XQ' - \lambda P - Q$$
$$= \lambda(3XP' - P) + 3XQ' - Q$$
$$= \lambda.f(P) + f(Q)$$

Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Comme $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(f)$ on sait que $\mathbb{E}$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 4

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\vec{u} = (x,y,z) \longmapsto f(\vec{u}) = f(x,y,z) = (2x - z,\ x+y+z)$$

expression analytique de f

On a vu que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Donc on sait que $Ker(f)$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ et que $Im(f)$ est un sev de $\mathbb{R}^2$.

① Base de $Ker(f)$:

$$Ker(f) = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3 ;\ f(\vec{u}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2} \}$$

$$Ker(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ 2x - z = 0 \text{ et } x+y+z = 0 \}$$

équations cartésiennes de Ker(f)

On a
$$\begin{cases} \boxed{2x} - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{2x} - z = 0 \\ \boxed{-2y} - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} z \\ y = -\frac{3}{2} z \\ z \text{ qcq} \end{cases}$$

Donc $Ker(f) = Vect\left(\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1 \right) \right) = Vect(\underbrace{(1,-3,2)}_{\vec{u_1}})$

Comme $\vec{u_1} \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$ la famille $(\vec{u_1})$ est libre et est donc une base de $Ker(f)$.

② Base de Im f

$Im(f) = f(\mathbb{R}^3) = \{ f(\vec{u}) \in \; ; \; \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \}$

$Im(f) = \{ (2x - z, x+y+z) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$

paramétrage de Im f

On a $(2x - z, x+y+z) = x.(2,1) + y(0,1) + z.(-1,1)$

Donc $Im(f) = Vect\big(\underbrace{(2,1)}_{\vec{V_1}}, \underbrace{(0,1)}_{\vec{V_2}}, \underbrace{(-1,1)}_{\vec{V_3}}\big)$

Donc $(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3})$ est une famille génératrice de $Im(f)$. Est-elle libre ?

Non car : $\vec{V_1} + 2\vec{V_3} = 3\vec{V_2}$

Donc $Im(f) = Vect(\vec{V_1}, \vec{V_3})$

Cette fois $(\vec{V_1}, \vec{V_3})$ est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires.

Donc la famille $(\vec{V_1}, \vec{V_3})$ est une base de $Im(f)$.

Rem : on a donc $\dim(Im(f)) = Card(\vec{V_1}, \vec{V_3}) = 2$.

Or $Im(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ et $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Donc $Im(f) = \mathbb{R}^2$.

<u>dem prop 19</u> On suppose que $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ et $g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ sont linéaires.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{E})}$

ie $\forall \vec{x} \in \mathbb{E},\ g(f(\vec{x})) = \vec{0}_{\mathbb{E}}$

<u>but</u> $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$

Soit $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f)$ fixé qcq. <u>but</u> $\vec{y} \in \mathrm{Ker}(g)$

Comme $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f) : \exists \vec{x} \in \mathbb{E};\ \vec{y} = f(\vec{x})$.

Donc $g(\vec{y}) = g(f(\vec{x})) = \vec{0}_{\mathbb{E}}$

donc $\vec{y} \in \mathrm{Ker}(g)$. CQFD.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$.

<u>but</u> $\forall \vec{x} \in \mathbb{E},\ g(f(\vec{x})) = \vec{0}$

Soit $\vec{x} \in \mathbb{E}$ fixé qcq.

Alors $f(\vec{x}) \in \mathrm{Im}(f)$.

Or $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}\, g$ donc : $f(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}(g)$

et donc $g(f(\vec{x})) = \vec{0}_{\mathbb{E}}$. CQFD.

Contre - exemple 1

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x, x) \qquad\qquad (x,y) \longmapsto (x-y, x-y)$$

On montre que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ comme dans l'exemple 4.

On a :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad g(f(x,y)) = g(x,x) = (x-x, x-x) = (0,0)$

Donc $\underline{g \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}}$

Pourtant $\underline{g \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}}$ puisque $g(1,0) = (1,1) \neq (0,0)$

et $\underline{f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}}$ puisque $f(1,1) = (1,1) \neq (0,0)$

Contre - exemple 2

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x \qquad\qquad\qquad (x,y) \longmapsto x+y$$

On montre que f et g sont des formes linéaires avec la même méthode que celle de l'exemple 4.

$$\mathrm{Im}\, f = \{ f(x,y) \in \mathbb{R} \,;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = \{ x \,;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

donc $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Im}\, g = \{ x+y \in \mathbb{R} \,;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = \mathbb{R}$$

Donc $\underline{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)}$

Pourtant $\underline{f \neq g}$ puisque $f(1,1) = 1 \neq 2 = g(1,1)$

dem th 20 On suppose $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ linéaire.

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose f injective sur $\mathbb{E}$.

but $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_{\mathbb{E}}\}$

$\boxed{\supseteq}$ On sait d'après le th 18 que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sev de $\mathbb{E}$ donc $\vec{0}_{\mathbb{E}} \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $\{\vec{0}_{\mathbb{E}}\} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

$\boxed{\subseteq}$ Soit $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$.

On a donc $f(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{F}}$.

Comme f est linéaire on a aussi : $f(\vec{0}_{\mathbb{E}}) = \vec{0}_{\mathbb{F}}$

Donc $f(\vec{x}) = f(\vec{0}_{\mathbb{E}})$.

Comme f est injective : $\vec{x} = \vec{0}_{\mathbb{E}}$.

Donc $\vec{x} \in \{\vec{0}_{\mathbb{E}}\}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_{\mathbb{E}}\}$

but f est injective sur $\mathbb{E}$.

Soit $(\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in \mathbb{E}^2$ tq $f(\vec{x_1}) = f(\vec{x_2})$.

On a donc $f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_2}) = \vec{0}_{\mathbb{F}}$

Comme f est linéaire : $f(\vec{x_1} - \vec{x_2}) = \vec{0}_{\mathbb{F}}$

Donc $\vec{x_1} - \vec{x_2} \in \mathrm{Ker}(f)$.

Mais $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0_E}\}$ donc $\vec{x_1} - \vec{x_2} = \vec{0_E}$

donc $\vec{x_1} = \vec{x_2}$.

Par définition : f est injective sur $\mathbb{E}$.

2. D'après le chap 1 :

f est surjective de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F} \Longleftrightarrow f(\mathbb{E}) = \mathbb{F}$

Ici : $f(\mathbb{E}) = \mathrm{Im}(f)$

Donc : f est surjective de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{F}$

Exemple 5 Pour l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$(x,y,z) \longmapsto (2x-z,\ x+y+z)$$

on a vu que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1,-3,2))$
$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$$

Comme $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$: f n'est pas injective

Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$: f est surjective de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$.

Cas d'une restriction : $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ linéaire

$\mathbb{H}$ sev de $\mathbb{E}$.

On sait que $f_{|\mathbb{H}} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{F}$ est linéaire.

$$* \quad \operatorname{Ker}(f_{|\mathbb{H}}) = \{\vec{x} \in \mathbb{H} ; \ f_{|\mathbb{H}}(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{F}}\}$$
$$= \{\vec{x} \in \mathbb{H} ; \ f(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{F}}\}$$
$$= \{\vec{x} \in \mathbb{H} ; \ \vec{x} \in \operatorname{Ker} f\}$$

donc $\underline{\operatorname{Ker}(f_{|\mathbb{H}}) = \mathbb{H} \cap \operatorname{Ker}(f)} \subseteq \operatorname{Ker}(f)$.

$$* \quad \operatorname{Im}(f_{|\mathbb{H}}) = \{f(\vec{x}) \in \mathbb{F} ; \ \vec{x} \in \mathbb{H}\}$$
$$\subseteq \{f(\vec{x}) \in \mathbb{F} ; \ \vec{x} \in \mathbb{E}\} \text{ car } \mathbb{H} \subseteq \mathbb{E}$$

donc $\underline{\operatorname{Im}(f_{|\mathbb{H}}) \subseteq \operatorname{Im}(f)}$.