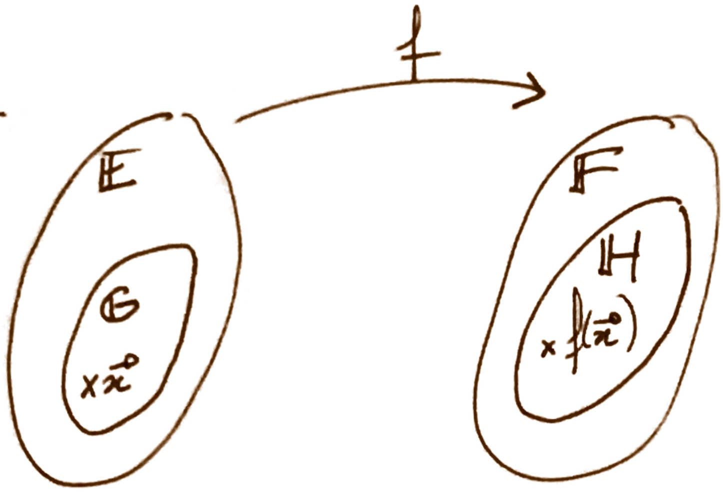
dem th 4



$f_{|\mathbb{G}}^{|\mathbb{H}} : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$

est bien définie car $\forall \vec{x} \in \mathbb{G},\ f(\vec{x}) \in \mathbb{H}$

Comme f est linéaire :

$\forall (\alpha, \vec{x_1}, \vec{x_2}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2,\ f(\alpha . \vec{x_1} + \vec{x_2}) = \alpha . f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2})$

Comme $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{E}$: un prédicat vrai $\forall \vec{x} \in \mathbb{E}$ est aussi vrai $\forall \vec{x} \in \mathbb{G}$.

Donc $\forall (\alpha, \vec{x_1}, \vec{x_2}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{G}^2,\ f(\alpha . \vec{x_1} + \vec{x_2}) = \alpha . f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2})$

ie $f_{|\mathbb{G}}^{|\mathbb{H}}(\alpha \vec{x_1} + \vec{x_2}) = \alpha . f_{|\mathbb{G}}^{|\mathbb{H}}(\vec{x_1}) + f_{|\mathbb{G}}^{|\mathbb{H}}(\vec{x_2})$

dem prop 5

$\ast$ On a $f+g : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$.

Soit $(\alpha, \vec{x_1}, \vec{x_2}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2$ qcq.

$$
\begin{aligned}
(f+g)(\alpha.\vec{x_1}+\vec{x_2}) &= f(\alpha.\vec{x_1}+\vec{x_2}) + g(\alpha\vec{x_1}+\vec{x_2}) \\
&= \alpha.f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2}) + \alpha g(\vec{x_1}) + g(\vec{x_2}) \quad \text{car } f, g \text{ linéaires} \\
&= \alpha.\left(f(\vec{x_1}) + g(\vec{x_1})\right) + f(\vec{x_2}) + g(\vec{x_2}) \\
&= \alpha.(f+g)(\vec{x_1}) + (f+g)(\vec{x_2})
\end{aligned}
$$

Donc $f+g$ est linéaire.

$\ast$ On a $\alpha.f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$

Soit $(\lambda, \vec{x_1}, \vec{x_2}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2$ qcq.

$$
\begin{aligned}
(\alpha.f)(\lambda\vec{x_1}+\vec{x_2}) &= \alpha.f(\lambda\vec{x_1}+\vec{x_2}) \\
&= \alpha.\left(\lambda.f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2})\right) \quad \text{car } f \text{ linéaire} \\
&= \lambda.\left(\alpha.f(\vec{x_1})\right) + \alpha.f(\vec{x_2}) \\
&= \lambda.\left((\alpha.f)(\vec{x_1})\right) + (\alpha.f)(\vec{x_2})
\end{aligned}
$$

Donc $\alpha.f$ est linéaire.

dem th 7

1. On suppose $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ linéaire et $g : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ linéaire.

Alors $g \circ f : \mathbb{E} \to \mathbb{G}$.

Soit $(\alpha, \vec{x_1}, \vec{x_2}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2$. On a :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha \vec{x_1} + \vec{x_2}) &= g(f(\alpha \vec{x_1} + \vec{x_2})) \\ &= g(\alpha . f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2})) \quad \text{car } f \text{ linéaire} \\ &= \alpha . g(f(\vec{x_1})) + g(f(\vec{x_2})) \quad \text{car } g \text{ linéaire} \\ &= \alpha . (g \circ f)(\vec{x_1}) + (g \circ f)(\vec{x_2})\end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est linéaire.

Cas particulier : si $\mathbb{E} = \mathbb{F} = \mathbb{G}$:

si f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{E}$ alors $g \circ f$ est aussi un endomorphisme de $\mathbb{E}$.

2. et 3. Evident

dem prop 8 On suppose f_1 et f_2 linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ et g_1 et g_2 linéaires de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{G}$.

1. * $f_1+f_2 : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ et $g_1 : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{G}$

donc $g_1 \circ (f_1+f_2) : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{G}$

$\forall \vec{x} \in \mathbb{E}$, $\big(g_1 \circ (f_1+f_2)\big)(\vec{x}) = g_1\big((f_1+f_2)(\vec{x})\big)$ def de $\circ$

$= g_1\big(f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x})\big)$ def de $+$

$= g_1\big(f_1(\vec{x})\big) + g_1\big(f_2(\vec{x})\big)$ car g_1 linéaire

$= (g_1 \circ f_1)(\vec{x}) + (g_1 \circ f_2)(\vec{x})$ def de $\circ$

$= (g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2)(\vec{x})$

Donc $g_1 \circ (f_1+f_2) = g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2$

(avec $\circ$ prioritaire sur $+$).

* On a :

$\forall \vec{x} \in \mathbb{E}$, $(g_1+g_2) \circ f_1(\vec{x}) = (g_1+g_2)\big(f_1(\vec{x})\big)$ def de $\circ$

$= g_1\big(f_1(\vec{x})\big) + g_2\big(f_1(\vec{x})\big)$ def de $+$

$= (g_1 \circ f_1)(\vec{x}) + (g_2 \circ f_1)(\vec{x})$ def de $\circ$

$= (g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_1)(\vec{x})$ def de $+$

Donc $(g_1+g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_1$

2. On fixe $\alpha \in \mathbb{K}$. On a :

$\forall \vec{x} \in E$, $(g_1 \circ (\alpha . f_1))(\vec{x}) = g_1((\alpha . f_1)(\vec{x}))$ def de $\circ$

$= g_1(\alpha . f_1(\vec{x}))$ def de .

$= \alpha . g_1(f_1(\vec{x}))$ car g_1 linéaire

$= \alpha . (g_1 \circ f_1)(\vec{x})$ def de $\circ$

Donc $g_1 \circ (\alpha . f_1) = \alpha . (g_1 \circ f_1)$

De plus :

$\forall \vec{x} \in E$, $(g_1 \circ (\alpha . f_1))(\vec{x}) = \alpha . g_1(f_1(\vec{x}))$

$= (\alpha . g_1)(f_1(\vec{x}))$ def de .

$= ((\alpha . g_1) \circ f_1)(\vec{x})$ def de $\circ$

Donc $g_1 \circ (\alpha . f_1) = (\alpha . g_1) \circ f_1$

dem th 13

1. Soit $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ linéaire et bijective de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$.

On sait déjà que $f^{-1} : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E}$ est bijective.

Soit $(\alpha, \vec{y_1}, \vec{y_2}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{F}^2$.

On pose $\vec{x_1} = f^{-1}(\vec{y_1})$ et $\vec{x_2} = f^{-1}(\vec{y_2})$

Alors $\vec{x_1}$ et $\vec{x_2}$ sont des vecteurs de $\mathbb{E}$ et $f(\vec{x_1}) = \vec{y_1}$

et $f(\vec{x_2}) = \vec{y_2}$.

Comme f est linéaire :

$$f(\alpha.\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \alpha.f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2}) = \alpha.\vec{y_1} + \vec{y_2}$$

Donc :

$$f^{-1}\left(f(\alpha\vec{x_1} + \vec{x_2})\right) = f^{-1}(\alpha\vec{y_1} + \vec{y_2})$$

ie $\alpha\vec{x_1} + \vec{x_2} = f^{-1}(\alpha\vec{y_1} + \vec{y_2})$

ie $\alpha.f^{-1}(\vec{y_1}) + f^{-1}(\vec{y_2}) = f^{-1}(\alpha\vec{y_1} + \vec{y_2})$

2. Evident