dem th 46 On suppose $\mathbb{E} \xrightarrow{f} \mathbb{F} \xrightarrow{g} \mathbb{G}$ linéaires.

On a $g \circ f : \mathbb{E} \to \mathbb{G}$.

1. * Par def : $f(\mathbb{E}) \subseteq \mathbb{F}$.

donc : $g(f(\mathbb{E})) \subseteq g(\mathbb{F})$

Mais $g(\mathbb{F}) = \operatorname{Im} g$ et $g(f(\mathbb{E})) = \operatorname{Im}(g \circ f)$

On a donc $\operatorname{Im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{Im}(g)$

On passe aux dimensions :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(g)$$

* On montre ensuite que $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(g \circ f)$.

En effet soit $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$.

Alors $f(\vec{x}) = \vec{0}_F$.

Donc $g(f(\vec{x})) = g(\vec{0}_F) = \vec{0}_G$

donc $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$.

On passe aux dimensions : $\dim(\operatorname{Ker} f) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(g \circ f))$

D'après le th du rang appliqué à f et à $g \circ f$:

$$\dim(\mathbb{E}) - \operatorname{rg}(f) \leqslant \dim(\mathbb{E}) - \operatorname{rg}(g \circ f)$$

Donc $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$.

* On a donc $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$

<u>2.</u> * On suppose que g est un isomorphisme de $\mathbb{F}$ vers $\mathbb{G}$.

On a vu que $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(g \circ f)$

Réciproquement soit $\vec{x} \in \text{Ker}(g \circ f)$.

Alors $g(f(\vec{x})) = \vec{0}_G$

donc $f(\vec{x}) \in \text{Ker}(g)$.

Mais g est injectif, donc $\text{Ker}(g) = \{\vec{0}_F\}$

Ainsi $f(\vec{x}) = \vec{0}_F$ et donc $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$.

Ceci prouve que $\text{Ker}(g \circ f) \subseteq \text{Ker}(f)$.

Par double inclusion : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g \circ f)$ et donc $\dim(\text{Ker} f) = \dim(\text{Ker}(g \circ f))$

Avec le th du rang appliqué à f et $g \circ f$:

$$\dim(\mathbb{E}) - \text{rg}(f) = \dim(\mathbb{E}) - \text{rg}(g \circ f)$$

Donc : $\text{rg}(f) = \text{rg}(g \circ f)$

* On suppose que f est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$.

Alors f est surjectif, donc $f(\mathbb{E}) = \mathbb{F}$

Donc $g(f(\mathbb{E})) = g(\mathbb{F})$

ie $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

On passe aux dimensions : $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$